Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Чистяков, Статистики хи-квадрат, построенные по частотам неполных цепочек исходов независимых испытаний, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 52–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:20:36

Статистики хи-квадрат, построенные по частотам неполных цепочек исходов независимых испытаний

© 2001 г. В. П. Чистяков

Выявление зависимостей в случайных последовательностях, когда зависимость проявляется на частотах длинных цепочек исходов, оказывается затруднительной из-за ограниченности возможностей вычислительной техники. В таких случаях приходится использовать различные критерии, определяемые статистиками, которые зависят от длинных цепочек подряд идущих знаков исследуемых последовательностей или от знаков, значительно удаленных друг от друга. Критерии такого типа можно найти в известных книгах Д. Кнута. В данной работе получены предельные распределения χ^2 -статистик, построенных по несплошным цепочкам исходов независимых испытаний, когда число испытаний стремится к бесконечности, исходы испытаний равновероятны, а их число фиксировано.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00012, и Совете при президенте РФ по грантам и государственной поддержке ведущих научных школ, проект 00-15-96136.

1. Определения и обозначения

Пусть

$$x_1, x_2, \dots \quad (1)$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на множестве $\{1, 2, \dots, N\}$. Рассмотрим последовательность

$$(x_{t+r_1-1}, x_{t+r_2-1}, \dots, x_{t+r_v-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

v -цепочек, $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_v$, $v \geq 2$. Сплошная s -цепочка

$$(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+s-1}) \quad (3)$$

является наименьшей s -цепочкой, содержащей t -ю несплошную цепочку из (2), когда $r_1 = 1$ и $r_v = s$. Далее всегда предполагается, что $r_1 = 1$ и $r_v = s$. Положим

$$C = \{r_1, r_2, \dots, r_v\}, \quad \bar{C} = \{1, 2, \dots, s\} \setminus C.$$

Обозначим $\nu(n, I)$ частоту (число появлений) s -цепочки $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ среди s -цепочек (3) при $t = 1, 2, \dots, n$. Частоту цепочки $I^C = (i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_v})$ в n первых членах последовательности (2) обозначим $\nu^C(n, I^C)$. Очевидно, что

$$\nu^C(n, I^C) = \sum_{l \in \bar{C}} \sum_{i_l=1}^N \nu(n, I). \quad (4)$$

Нормированные и центрированные частоты обозначим

$$\xi^C(n, I^C) = \frac{\nu^C(n, I^C) - n/N^v}{\sqrt{n/N^v}}, \quad \xi(n, I) = \frac{\nu(n, I) - n/N^s}{\sqrt{n/N^s}}. \quad (5)$$

Вид статистики, имеющей в пределе χ^2 -распределение, оказался таким же, как и для сплошных цепочек, именно,

$$X(n) = \sum_{I^C} (\xi^C(n, I^C))^2 - \sum_{\bar{I}^C} (\tilde{\xi}^C(n, \bar{I}^C))^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} I^C &= (i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_v}), \\ \bar{I}^C &= (i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_{v-1}}), \\ \tilde{\xi}^C(n, I^C) &= (\tilde{\nu}^C(n, \bar{I}^C) - n/N^{v-1})/\sqrt{n/N^{v-1}}, \\ \tilde{\nu}^C(n, \bar{I}^C) &= \sum_{i_{r_v}=1}^N \nu^C(n, I^C). \end{aligned}$$

2. Ковариации нормированных частот

Часто используемые суммы

$$\sum_{l \in \bar{C}} \sum_{i_l=1}^N, \quad \sum_{l \in \bar{C}} \sum_{i_l=1}^N$$

будем обозначать соответственно $\Sigma_I^C, \Sigma_{\bar{I}}^C$. Нетрудно проверить, что

$$\xi^C(n, I) = \frac{1}{\sqrt{N^{s-v}}} \Sigma_I^C \xi(n, I).$$

Отсюда получаем выражение для ковариаций

$$\text{cov}(\xi^C(n, I^C), \xi^C(n, J^C)) = \frac{1}{N^{s-v}} \Sigma_I^C \Sigma_J^C \text{cov}(\xi(n, I), \xi(n, J)), \quad (7)$$

где $J = (j_1, \dots, j_s)$. Известно (см. [2]), что при $n \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(\xi(n, I), \xi(n, J)) = \sigma(I, J),$$

где

$$\sigma(I, J) = \delta(I, J) - \frac{2s-1}{N^s} + \sum_{m=1}^{s-1} \frac{1}{N^m} (\delta_{i_{m+1}j_1} \dots \delta_{i_s j_{s-m}} + \delta_{j_{m+1}i_1} \dots \delta_{j_s i_{s-m}}), \quad (8)$$

$$\delta(I, J) = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_s j_s},$$

и δ_{ij} — символ Кронекера.

Из (7) и (8) получаем, что существует предел ковариаций частот несплошных цепочек, равный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(\xi^C(n, I^C), \xi(n, J^C)) = \sigma^C(I^C, J^C),$$

где

$$\sigma^C(I^C, J^C) = \frac{1}{N^{s-v}} \Sigma_I^{\bar{C}} \Sigma_J^{\bar{C}} \sigma(I, J). \quad (9)$$

При суммировании в (9) символов Кронекера $\delta_{i_k j_l}$, входящих в (8), возможны три случая, именно, $k, l \in C$, k, l принадлежат разным множествам и $k, l \in \bar{C}$. В первом случае множитель $\delta_{i_k j_l}$ выносится за знак суммы. Во втором случае, например, если $k \in C, l \in \bar{C}$, множители $\delta_{i_k j_l}$ суммируются только по $l_l = 1, \dots, N$ и, следовательно,

$$\sum_{l_l=1}^N \delta_{i_k j_l} = 1.$$

Если же $k, l \in \bar{C}$, то суммирование проводится по двум индексам и

$$\sum_{i_k, j_k=1}^N = N.$$

Отметим еще, что при суммировании произведений $\delta_{i_{m+1} j_1} \dots \delta_{i_s j_{s-m}}$ из m -го слагаемого в (8), нужно суммировать по всем индексам i_k и j_l таким, что $k, l \in \bar{C}$, при этом i_k и j_l могут не входить в множества $(i_{m+1}, \dots, i_s)$, $(j_1, \dots, j_{s-m})$. Произведения $\delta_{j_{m+1} i_1} \dots \delta_{j_s i_{s-m}}$ суммируются аналогично.

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \begin{cases} 1, & \text{если } k \in C, \\ 0, & \text{если } k \in \bar{C}, \end{cases} \\ D_{kl}^{(1)} &= \begin{cases} 1, & \text{если } k, l \in C, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ D_{kl}^{(2)} &= \begin{cases} 1, & \text{если } k \in C, l \in \bar{C} \text{ или } k \in \bar{C}, l \in C, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ D_{kl}^{(3)} &= \begin{cases} 1, & \text{если } k, l \in \bar{C}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} D_{kl}^{(1)} &= \gamma_k \gamma_l, \\ D_{kl}^{(2)} &= (\gamma_k - \gamma_l)^2, \\ D_{kl}^{(3)} &= (1 - \gamma_k)(1 - \gamma_l). \end{aligned}$$

Используя эти замечания, сумму частей m -го слагаемого в (9) представим в виде

$$\begin{aligned} S_m^{(I)} &= \Sigma_i^{\bar{C}} \Sigma_j^{\bar{C}} \left(\prod_{k=1}^{s-m} \delta_{i_{m+k} j_k} \right) \\ &= \Pi_m^C \Pi_m^{\bar{C}} N^{(1-\gamma_{s-m+1})+(1-\gamma_{s-m+2})+\dots+(1-\gamma_s)} N^{(1-\gamma_1)+(1-\gamma_2)+\dots+(1-\gamma_m)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_m^C &= \prod_{k \in C, k \leq s-m} (D_{k,m+k}^{(1)} \delta_{j_k i_{k+m}} + D_{k,m+k}^{(2)} + N D_{k,m+k}^{(3)}), \\ \Pi_m^{\bar{C}} &= \prod_{k \in \bar{C}, k \leq s-m} (D_{k,m+k}^{(1)} \delta_{j_k i_{k+m}} + D_{k,m+k}^{(2)} + N D_{k,m+k}^{(3)}). \end{aligned}$$

Здесь два множителя N в указанных степенях появляются при суммировании по индексам $i_k \notin (i_{m1}, \dots, i_s)$, $j_l \notin (j_1, \dots, j_{s-m})$.

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \Pi_m^C &= \prod_{k \in C, k \leq s-m} (\gamma_{k+m} \delta_{j_k i_{k+m}} + (1 - \gamma_{k+m})) = \prod_{l \in C, l-m \in C, l \geq m+1} \delta_{i_l j_{l-m}}, \\ \Pi_m^{\bar{C}} &= \prod_{k \in \bar{C}, k \leq s-m} (\gamma_{k+m} + N(1 - \gamma_{k+m})) \\ &= N^{(1-\gamma_{m+1})(1-\gamma_1)+(1-\gamma_{m+2})(1-\gamma_2)+\dots+(1-\gamma_s)(1-\gamma_{s-m})}, \end{aligned}$$

так как при $k \in C$

$$D_{k,m+k}^{(1)} = \gamma_{k+m}, \quad D_{k,m+k}^{(2)} = 1 - \gamma_{k+m}, \quad D_{k,m+k}^{(3)} = 0$$

и при $k \in \bar{C}$

$$D_{k,m+k}^{(1)} = 0, \quad D_{k,m+k}^{(2)} = \gamma_{k+m}, \quad D_{k,m+k}^{(3)} = 1 - \gamma_{k+m}.$$

Отсюда и из равенств $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = v$ и

$$\sum_{k=s-m+1}^s (1 - \gamma_k) + \sum_{k=1}^m (1 - \gamma_k) + \sum_{k=1}^{s-m} (1 - \gamma_{k+m})(1 - \gamma_k) = s + m - 2v + \sum_{k=1}^{s-m} \gamma_k \gamma_{k+m}$$

получаем, что

$$S_m^{(I)} = N^{s+m-2v+\gamma_1\gamma_{m+1}+\dots+\gamma_{s-m}\gamma_s} \prod_{l, l-m \in C, l \geq m+1} \delta_{i_l j_{l-m}}. \quad (10)$$

Выражение для второй суммы $S_m^{(J)}$, соответствующей оставшейся части m -го слагаемого, получается из формулы для $S_m^{(I)}$, если поменять местами i и j .

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} \Sigma_I^{\bar{C}} \Sigma_J^{\bar{C}} \delta(I, J) &= N^{s-v} \prod_{l \in C} \delta_{i_l j_l}, \\ \Sigma_I^{\bar{C}} \sigma_J^{\bar{C}} 1 &= N^{2(s-v)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из формул (8)–(11) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$\text{cov}(\xi^C(n, I^C), \xi^C(n, J^C)) \rightarrow \sigma^C(I^C, J^C),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^C(I^C, J^C) &= \delta(I^C, J^C) - \frac{2s-1}{N^v} + \sum_{m=1}^{s-1} \left(\prod_{l=m+1}^s \delta_{i_l j_{l-m}}^{\gamma_l \gamma_{l-m}} + \prod_{l=m+1}^s \delta_{j_l i_{l-m}}^{\gamma_l \gamma_{l-m}} \right) f_m, \\ \delta(I^C, J^C) &= \prod_{l \in C} \delta_{i_l j_l}, \\ f_m &= N^{-v+\gamma_1 \gamma_{m+1} + \dots + \gamma_{s-m} \gamma_s}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\gamma_k = 1$ при $k \in C$, $\gamma_k = 0$ при $k \in \bar{C}$, и произведения равны единице, если множество индексов сомножителей пусто.

Применим полученный результат к случаю, когда

$$v = 3, \quad C = (r_1, r_2, r_3), \quad r_1 = 1, \quad r_2 = r, \quad r_3 = s.$$

Если $r \neq (s+1)/2$, то непустые произведения в (12) имеются только при $m = r-1, s-r, s-1$ и равны соответственно $\delta_{i_r j_1}, \delta_{i_s j_r}, \delta_{i_s j_1} \delta_{j_r i_1}, \delta_{j_s i_r}, \delta_{j_s i_1}$. В этих случаях

$$\sum_{k=1}^{s-m} \gamma_{k+m} \gamma_k = 1,$$

в остальных случаях эта сумма равна нулю. Таким образом, сумма по m в (12) равна

$$\frac{1}{N^2} (\delta_{i_r j_1} + \delta_{i_s j_r} + \delta_{i_s j_1} + \delta_{j_r i_1} + \delta_{j_s i_r} + \delta_{j_s i_1}) + \sum_{m \neq r-1, s-r, s-1} \frac{2}{N^3}.$$

Отсюда и из (12) получаем следующее утверждение.

Следствие 1. В случае, когда

$$C = (1, r, s), \quad 1 < r < s, \quad I^C = (i_1, i_r, i_s), \quad J^C = (j_1, j_r, j_s), \quad 2r \neq s+1,$$

пределная ковариация $\sigma^C(I^C, J^C)$ определяется формулой

$$\sigma^C(I^C, J^C) = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_r j_r} \delta_{i_s j_s} - \frac{7}{N^3} + \frac{1}{N^2} (\delta_{i_r j_1} + \delta_{i_s j_r} + \delta_{i_s j_1} + \delta_{j_r i_1} + \delta_{j_s i_r} + \delta_{j_s i_1}). \quad (13)$$

Если $2r = s = 1$, то три знака последовательности (1) берутся через одинаковые промежутки. В этом случае получается формула, совпадающая с формулой для сплошной s -цепочки при $s = 3$.

Следствие 2. Если

$$C = (1, r, s), \quad 1 < r < s, \quad I^C = (i_1, i_r, i_s), \quad J^C = (j_1, j_r, j_s), \quad 2r = s+1,$$

то

$$\sigma^C(I^C, J^C) = \delta_{i_1 j_1} + \delta_{i_r j_r} + \delta_{i_s j_s} - \frac{5}{N^3} = \frac{1}{N} (\delta_{i_r j_1} \delta_{i_s j_r} \delta_{j_s i_r}) + \frac{1}{N^2} (\delta_{i_s j_1} + \delta_{j_s i_1}). \quad (14)$$

3. Предельные распределения

При $n \rightarrow \infty$ вектор частот $\{\nu^C(n, I^C)\}$ асимптотически нормален с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $B = (\sigma^C(I^C, J^C))$, где $\sigma^C(I^C, J^C)$ определено равенством (12). Предельное распределение квадратичной формы (6) от нормированных частот $\{\xi^C(n, I^C)\}$ совпадает с распределением этой квадратичной формы, если в ней заменить $\{\xi^C(n, I^C)\}$ на нормально распределенный вектор $\{\xi^C(I^C)\}$, соответствующий предельному распределению.

Заменим в (6) нормированные частоты $\tilde{\xi}^C(n, I^C)$ по формуле

$$\tilde{\xi}^C(n, I^C) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i_{rv}=1}^N \xi^C(n, I^C).$$

Величину $X(n)$ можно представить в виде

$$X(n) = \sum_{I^C} \sum_{J^C} A(I^C, J^C) \xi^C(n, I^C) \xi^C(n, J^C),$$

где

$$A(I^C, J^C) = \delta_{i_{r_1}} \dots \delta_{i_{r_{v-1}}} j_{r_{v-1}} (\delta_{i_{rv} j_{rv}} - 1/N). \quad (15)$$

Положим

$$X = \sum_{I^C} \sum_{J^C} A(I^C, J^C) \xi^C(I^C) \xi^C(J^C).$$

Квадратичная форма X имеет хи-квадрат распределение (см. [3, 4]), если

$$ABA = A, \quad (16)$$

где A — матрица коэффициентов (15). Обозначим (i, j) -й элемент матрицы D через $(D)_{ij}$. Проверим условие (16). Представим $N \times N$ ковариационную матрицу B с элементами (12) в виде

$$B = E + \frac{2s-1}{N^v} F + \sum_{m=1}^{s-1} (G_{1,m} + G_{2,m}), \quad (17)$$

где $N^v \times N^v$ матрицы E , F , $G_{1,m}$ и $G_{2,m}$ определяются заданием их элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} (E)_{I^C, J^C} &= \delta_{i_{r_1} j_{r_1}} \delta_{i_{r_2} j_{r_2}} \dots \delta_{i_{rv} j_{rv}}, \\ (F)_{I^C, J^C} &= 1, \\ (G_{1,m})_{I^C, J^C} &= \prod_{r_k: m+1 \leq r_k \leq r_v} \delta_{i_{r_k} j_{r_k-m}} \gamma_{r_k-m}, \\ (G_{2,m})_{I^C, J^C} &= \prod_{r_k: m+1 \leq r_k \leq r_v} \delta_{i_{r_k-m} j_{r_k}} \gamma_{r_k-m}, \end{aligned} \quad (18)$$

Матрицу A коэффициентов (15) квадратичной формы X представим в виде

$$A = E - \frac{1}{N} \tilde{E}, \quad (19)$$

где

$$(\tilde{E})_{IC, JC} = \delta_{i_{r_1} j_{r_1}} \dots \delta_{i_{r_{v-1}} j_{r_{v-1}}} . \quad (20)$$

При проверке условия (16) появятся матрицы $\tilde{G}_{1,m}$ и $\tilde{G}_{2,m}$ с элементами

$$\begin{aligned} (\tilde{G}_{1,m})_{IC, JC} &= \prod_{r_k: m+1 \leq r_k \leq r_{v-1}} \delta_{i_{r_k} j_{r_k-m}}^{\gamma_{r_k-m}}, \\ (\tilde{G}_{2,m})_{IC, JC} &= \prod_{r_k: m+1 \leq r_k \leq r_{v-1}} \delta_{i_{r_k-m} j_{r_k}}^{\gamma_{r_k-m}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что при $\gamma_{r_v-m} = 0$ матрицы (21) совпадают с матрицами (18). При умножении матриц A на B и AB на A , будут использоваться равенства

$$\begin{aligned} \tilde{E}F &= NF, \quad F\tilde{E} = NF, \quad \tilde{E}^2 = NE, \\ \tilde{G}_{1,m} &= N^{1-\gamma_{r_v-m}} \tilde{G}_{1,m}, \quad G_{1,m}\tilde{E} = NG_{1,m}, \\ \tilde{G}_{1,m}\tilde{E} &= N\tilde{G}_{1,m}, \quad \tilde{E}G_{2,m} = G_{2,m}. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти равенства проверяются непосредственно с использованием определения произведения матриц. Найдем, например, $\tilde{E}G_{1,m}$. Положим

$$L^C = (l_{r_1}, \dots, l_{r_v}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\tilde{E}G_{1,m})_{IC, JC} &= \sum_{l_{r_1}, \dots, l_{r_v}=1}^N (\tilde{E})_{IC, JC} (G_{1,m})_{L^C, JC} \\ &= \sum_{l_{r_1}, \dots, l_{r_v}=1} \left(\prod_{\{r_k: r_1 \leq r_k \leq r_{v-1}\}} \delta_{i_{r_k} l_{r_k}} \right) \left(\prod_{m+1 \leq r_k \leq r_{v-1}} \delta_{l_{r_k} j_{r_k}}^{\gamma_{r_k-m}} \right) \delta_{l_{r_v} j_{r_v}}^{\gamma_{r_v-m}}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенства

$$\begin{aligned} \sum_{l_{r_v}=1}^N \delta_{l_{r_v} j_{r_v}}^{\gamma_{r_v-m}} &= N^{1-\gamma_{r_v-m}}, \\ \sum_{l_{r_k}=1}^N \delta_{i_{r_k} l_{r_k}} \delta_{l_{r_k} j_{r_k}}^{\gamma_{r_k-m}} &= \delta_{i_{r_k} j_{r_k}}^{\gamma_{r_k-m}}, \end{aligned}$$

получаем четвертое равенство в (22).

Умножим слева (17) на (19). Используя (22) и учитывая, что E — единичная матрица, получим, что

$$\begin{aligned} AB &= E + \frac{2s-1}{N^v} F + \sum_{m=1}^{s-1} f_m (G_{1,m} + G_{2,m}) \\ &\quad - \frac{1}{N} \tilde{E} - \frac{2s-1}{N^v} F - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{s-1} f_m (N^{1-\gamma_{r_v-m}} \tilde{G}_{1,m} + N G_{2,m}) \\ &= A + \sum_{\{m: \gamma_{r_v-m}=0\}} f_m (G_{1,m} - \tilde{G}_{1,m}) + \sum_{\{m: \gamma_{r_v-m}=0\}} f_m \left(G_{1,m} - \frac{1}{N} \tilde{G}_{1,m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$AB = A + \sum_{\{m: \gamma_{r_v-m}=1\}} f_m \left(G_{1,m} - \frac{1}{N} \tilde{G}_{1,m} \right), \quad (23)$$

так как $G_{1,m} = \tilde{G}_{1,m}$ при $\gamma_{r_v-m} = 0$. Умножая обе части этого равенства справа на A , получаем (16).

Число степеней свободы хи-квадрат распределения равно следу матрицы AB . Нетрудно проверить, что

$$\sum_{I^C} (A)_{I^C, I^C} = N^v - N^{v-1} \quad (24)$$

и след матрицы $G_{1,m} - N^{-1} \tilde{G}_{1,m}$ при $\gamma_{r_v-m} = 1$ равен нулю:

$$\begin{aligned} & \sum_{I^C} \left((G_{1,m})_{I^C, I^C} - \frac{1}{N} (\tilde{G}_{1,m})_{I^C, I^C} \right) \\ &= \sum_{i_{r_1}, \dots, i_{r_{v-1}}} \prod_{m+1 \leq r_k \leq r_{v-1}} \delta_{i_{r_k} i_{r_k-m}}^{\gamma_{r_k-m}} \sum_{i_{r_v}=1}^N \delta_{i_{r_v} i_{r_v-m}} \\ & \quad - \frac{1}{N} \sum_{i_{r_1}, \dots, i_{r_{v-1}}} \prod_{m+1 \leq r_k \leq r_{v-1}} \delta_{i_{r_k} i_{r_k-m}}^{\gamma_{r_k-m}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (23) следует, что след AB совпадает со следом A .

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ распределение квадратичной формы $X(n)$, определенной равенством (6), сходится к центральному хи-квадрат распределению с $N^v - N^{v-1}$ степенями свободы.

Список литературы

1. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ. Получисленные алгоритмы*. т. 2. Мир, Москва, 1977.
2. Селиванов Б. И., Чистяков В. П., Последовательный χ^2 -критерий, построенный по s -цепочкам состояний цепи Маркова. *Дискретная математика* (1977) **9**, №4, 127–136.
3. Dik J. J., Gunst M. C. M., The distribution of general quadratic form in normal variables. *Stat. Neerlandica* (1985) **39**, №1, 14–26.
4. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., О статистиках типа χ^2 , построенных по выходу конечного автомата. *Труды по дискретной математике* (1998) **2**, 305–314.

Статья поступила 02.07.2001.