Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, Ю. В. Степанишина, Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 43–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:57:58

УДК 519.10

Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений

© 2001 г. В. А. Емеличев, Ю. В. Степанишина

Предлагается новый подход к исследованию устойчивости эффективных решений в n -критериальной линейной траекторной (на системе подмножеств конечного множества) задаче, принцип оптимальности которой задается целочисленным параметром s , изменяющимся от 1 до $n - 1$. При этом крайним значениям параметра соответствуют мажоритарный и паретовский принципы оптимальности. Для каждого значения параметра s указаны границы изменений параметров частных критериев, сохраняющих эффективность траектории.

1. Определения и леммы

Пусть

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}, \quad m \geq 2, \quad T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}, \quad A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{R}^{nm}, \quad n \geq 2.$$

Постановка n -критериальной (векторной) линейной комбинаторной задачи, которую принято называть траекторной, предполагает задание на множестве траекторий T векторного критерия

$$f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A)),$$

частными критериями которого являются линейные функционалы

$$\text{MINSUM} \quad f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \longrightarrow \min_{t \in T}, \quad i \in N_n,$$

где

$$N(t) = \{j \in N_m: e_j \in t\}, \quad N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Механизм выбора оптимального (в том или ином смысле) решения такой задачи обычно основан на использовании бинарных отношений, отражающих предпочтительность одних траекторий другим [1–6]. В свою очередь, всякое бинарное отношение порождает некий принцип оптимальности (в другой терминологии — функцию выбора) [4–8].

Здесь продолжены (см. [9–13]) исследования устойчивости эффективных решений векторных комбинаторных задач. На этот раз, рассматривая n -критериальную задачу, мы задаем принцип оптимальности путем введения целочисленного параметра s , изменяющегося от 1 до $n - 1$. При этом крайним значениям параметра s соответствуют такие широко известные принципы оптимальности, как мажоритарный (при $s = 1$) [4–6, 14–16] и паретовский (при $s = n - 1$) [1–8, 17]. Тем самым, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения, которая компенсирует дефект большого шага. В настоящей заметке найдены границы изменений (в чебышевской метрике) параметров частных критериев (элементов матрицы A), сохраняющих эффективность траектории, соответствующую каждому значению параметра $s = 1, 2, \dots, n - 1$. Тем самым, обобщены некоторые результаты, полученные ранее в [9, 18] (см. ниже следствия 2 и 3).

Для каждого $s \in N_{n-1}$ на множестве траекторий T зададим следующее бинарное отношение предпочтения между траекториями:

$$t' \prec_s t \iff [t, t', A]_+ > s[t, t', A]_-,$$

где

$$\begin{aligned} [t, t', A]_+ &= |\{i \in N_n : \tau_i(t, t', A) > 0\}|, \\ [t, t', A]_- &= |\{i \in N_n : \tau_i(t, t', A) < 0\}|, \\ \tau_i(t, t', A) &= f_i(t, A) - f_i(t', A). \end{aligned}$$

Таким образом, траектория t' предпочтительнее траектории t по бинарному отношению $\prec_s$ в том и только в том случае, когда число компонент, по которым вектор $f(t', A)$ лучше вектора $f(t, A)$, более чем в s раз превосходит число компонент, по которым $f(t, A)$ лучше $f(t', A)$.

Далее для каждого индекса $s \in N_{n-1}$ введем множество s -эффективных траекторий $T_s^n(A)$, полагая по определению

$$T_s^n(A) = \{t \in T : \Omega_s(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\Omega_s(t, A) = \{t' \in T : t' \prec_s t\}.$$

Очевидно, что множество $T_s^n(A)$ может быть задано следующим эквивалентным образом:

$$t \in T_s^n(A) \iff \forall t' \in T \quad ([t, t', A]_+ \leq s[t, t', A]_-). \quad (1)$$

Поэтому $T_s^n(A) \subseteq T_k^n(A)$ при $1 \leq s < k \leq n - 1$.

Ясно, что множество $T_1^n(A)$ 1-эффективных траекторий совпадает с множеством мажоритарно эффективных траекторий, которое определим традиционным образом [4, 5, 14–16]:

$$M^n(A) = \{t \in T : \Xi(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\Xi(t, A) = \{t' \in T : \sum_{i=1}^n \text{sign } \tau_i(t, t', A) > 0\}$$

или иначе,

$$\Xi(t, A) = \Omega_1(t, A) = \{t' \in T: [t, t', A]_+ > [t, t', A]_-\}.$$

Мажоритарный принцип оптимальности реализует известную процедуру принятия решений большинством голосов.

Нетрудно убедиться, что траектория t является эффективной (или иначе, оптимальной по Парето) тогда и только тогда, когда для любой траектории t' такой, что

$$f(t, A) \neq f(t', A),$$

справедливо неравенство

$$[t, t', A]_- \geq 1.$$

Поэтому, воспользовавшись очевидным неравенством $[t, t', A]_+ \leq n - 1$, получаем, что множество $T_{n-1}^n(A)$ всех $(n - 1)$ -эффективных траекторий есть не что иное как множество Парето [1-8,17], которое задается следующим образом:

$$P^n(A) = \{t \in T: \Gamma(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\Gamma(t, A) = \{t' \in T: f(t, A) \geq f(t', A), f(t, A) \neq f(t', A)\}$$

или иначе,

$$\Gamma(t, A) = \Omega_{n-1}(t, A) = \{t' \in T: [t, t', A]_+ > 0 \text{ \& } [t, t', A]_- = 0\}.$$

Итак, верна следующая лемма.

Лемма 1. Для любого $n \geq 2$ верны соотношения

$$M^n(A) = T_1^n(A) \subseteq T_2^n(A) \subseteq \dots \subseteq T_{n-1}^n(A) = P^n(A).$$

Отсюда следует, что

$$M^2(A) = P^2(A). \quad (2)$$

В дальнейшем будем исследовать устойчивость s -эффективной траектории $t \in T_s^n(A)$ к возмущению параметров векторного критерия $f(t, A)$ путем прибавления к матрице A возмущающих матриц множества

$$\mathfrak{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm}: \|B\| < \varepsilon\},$$

где

$$\varepsilon > 0, \quad \|B\| = \max\{|b_{ij}|: (i, j) \in N_n \times N_m\}$$

— чебышевская норма (l_∞) матрицы $B = [b_{ij}]_{n \times m}$.

По аналогии с [9,10,12,13] для каждого $s \in N_{n-1}$ радиусом устойчивости траектории $t \in T_s^n(A)$ назовем число

$$\rho_s^n(t, A) = \begin{cases} \sup \Theta(A), & \text{если } \Theta(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Theta(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Theta(A) = \{\varepsilon > 0: \forall B \in \mathfrak{B}(\varepsilon) \quad (t \in T_s^n(A + B))\}.$$

Опираясь на лемму 1, легко выводим неравенства

$$\rho_i^n(t, A) \leq \rho_{i+1}^n(t, A) \leq \dots \leq \rho_{n-1}^n(t, A),$$

верные для любых $t \in T_i^n(A)$, $i \in N_{n-2}$. В частности, для мажоритарно эффективной траектории $t \in T_1^n(A)$ справедлива цепочка неравенств

$$\rho_1^n(t, A) \leq \rho_2^n(t, A) \leq \dots \leq \rho_{n-1}^n(t, A). \quad (3)$$

Положим

$$\gamma_i(t, t', A) = -\frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}, \quad i \in N_n, \quad (4)$$

где

$$\Delta(t, t') = |(t \setminus t') \cup (t' \setminus t)|.$$

Лемма 2. Если $\gamma_i(t, t', A) > 0$, то для любого φ такого, что $0 < \varphi \leq \gamma_i(t, t', A)$, и любого $B \in \mathfrak{B}(\varphi)$

$$\tau_i(t, t', A + B) < 0.$$

Доказательство. Пусть матрица $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathfrak{B}(\varphi)$, а число φ удовлетворяет условию леммы. Тогда легко выводим, что

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t', B) &= \sum_{j \in N(t \setminus t')} b_{ij} - \sum_{j \in N(t' \setminus t)} b_{ij} \leq \sum_{j \in N((t \setminus t') \cup (t' \setminus t))} |b_{ij}| \\ &\leq \|B\| \Delta(t, t') < \gamma_i(t, t', A) \Delta(t, t') = -\tau_i(t, t', A). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом линейности функции $\tau_i(t, t', A)$ получаем, что

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) + \tau_i(t, t', B) < 0.$$

Лемма 2 доказана.

2. Основной результат

Пусть $t \in T_s^n(A)$, $t' \neq t$, $t' \in T$. Все числа $\tau_i(t, t', A)$, $i \in N_n$, упорядочим следующим образом:

$$\tau_{p_1}(t, t', A) \leq \tau_{p_2}(t, t', A) \leq \dots \leq \tau_{p_n}(t, t', A), \quad (5)$$

то есть

$$\gamma_{p_1}(t, t', A) \geq \gamma_{p_2}(t, t', A) \geq \dots \geq \gamma_{p_n}(t, t', A). \quad (6)$$

Для любого $s \in N_{n-1}$ положим

$$\varphi_s^n(t, A) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_{p_k}(t, t', A), \quad (7)$$

где $k = \lceil n/(s+1) \rceil$ — наименьшее целое число, большее либо равное $n/(s+1)$.

Очевидны неравенства

$$n \leq (s+1)k < n + s + 1. \quad (8)$$

Теорема 1. При любых $n \geq 2$ и $s \in N_{n-1}$ для радиуса устойчивости $\rho_s^n(t, A)$ любой s -эффективной траектории $t \in T_s^n(A)$ справедлива формула

$$\rho_s^n(t, A) = \varphi_s^n(t, A).$$

Доказательство. Пусть $t \in T_s^n(A)$. Сначала покажем, что $\varphi = \varphi_s^n(t, A) \geq 0$. Предположим, напротив, что $\varphi < 0$. Тогда в соответствии с определением (7) числа φ и неравенствами (5), (6) найдется такая траектория $t' \neq t$, что ввиду $k < n$ для всякого индекса $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ справедливо неравенство $\tau_{p_i}(t, t', A) > 0$. Поэтому $[t, t', A]_+ \geq n - k + 1$. Отсюда, учитывая (8) и очевидные неравенства $[t, t', A]_- \leq n - [t, t', A]_+$, находим, что

$$s[t, t', A]_- \leq s(n - [t, t', A]_+) \leq s(k - 1) < n + 1 - k \leq [t, t', A]_+.$$

Это противоречит условию, что t — s -эффективная траектория (см. (1)).

Далее докажем, что

$$\rho_s^n(t, A) \geq \varphi. \quad (9)$$

Будем предполагать, что $\varphi > 0$ (в случае $\varphi = 0$ неравенство очевидно). Тогда согласно определению числа φ для любой траектории $t' \neq t$ справедливо неравенство $\gamma_{p_k}(t, t', A) \geq \varphi > 0$. Отсюда, воспользовавшись леммой 2 и неравенствами (5), находим, что

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\varphi) \quad \forall i \in N_k \quad (\tau_{p_i}(t, t', A + B) < 0).$$

Поэтому получаем неравенство

$$[t, t', A + B]_- \geq k,$$

соединяя которое с (8) и очевидным неравенством

$$n - [t, t', A + B]_+ \geq [t, t', A + B]_-,$$

приходим к соотношениям

$$s[t, t', A + B]_- \geq sk \geq n - k \geq n - [t, t', A + B]_- \geq [t, t', A + B]_+.$$

Отсюда видно, что

$$\forall B \in \mathfrak{B}(\varphi) \quad (t \in T_s^n(A + B)),$$

следовательно, верно неравенство (9).

Наконец, докажем, что

$$\rho_s^n(t, A) \leq \varphi_s^n(t, A). \quad (10)$$

Пусть $\varepsilon > \beta > \varphi \geq 0$. Тогда существует такая траектория $t' \neq t$, что справедливы неравенства

$$\forall i \in \{k, k+1, \dots, n\} \quad (\beta > \gamma_{p_i}(t, t', A)). \quad (11)$$

Построим возмущающую матрицу $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathfrak{B}(\varepsilon)$, полагая

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t \setminus t'), \\ -\beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t' \setminus t), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда благодаря (4) и (11) для всякого индекса $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned}\tau_{p_i}(t, t', A+B) &= \tau_{p_i}(t, t', A) + \tau_{p_i}(t, t', B) \\ &= -\gamma_{p_i}(t, t', A)\Delta(t, t') + \beta\Delta(t, t') \\ &= (\beta - \gamma_{p_i}(t, t', A))\Delta(t, t') > 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}[t, t', A+B]_- &\leq k-1, \\ [t, t', A+B]_+ &\geq n-k+1.\end{aligned}$$

Поэтому в соответствии с (8)

$$s[t, t', A+B]_- \leq s(n - [t, t', A+B]_+) \leq s(k-1) < n-k+1 \leq [t, t', A+B]_+.$$

Следовательно, $t \notin T_s^n(A+B)$. Это свидетельствует о том, что для всякого $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho_s^n(t, A) < \varepsilon$. Тем самым верно неравенство (10), которое вместе с (9) доказывает теорему.

3. Следствия

Следствие 1. Радиус устойчивости всякой мажоритарно эффективной (1-эффективной) траектории $t \in M^n(A)$, $n \geq 2$, выражается формулой

$$\rho_1^n(t, A) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_{p_q}(t, t', A),$$

где $q = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, — целая часть числа $(n+1)/2$.

Отсюда с учетом (5) и (6) легко получаем следующее утверждение.

Следствие 2 ([18]). Для того чтобы мажоритарно эффективная траектория $t \in M^n(A)$, $n \geq 1$, была устойчива ($\rho_1^n(t, A) > 0$), необходимо и достаточно, чтобы для всякой траектории $t' \in T \setminus \{t\}$ выполнялось неравенство

$$[t, t', A]_- \geq \frac{n}{2}.$$

Откуда вытекает следующий критерий [9]: оптимальная траектория линейной скалярной задачи ($n=1$) устойчива тогда и только тогда, когда других оптимальных траекторий нет.

Принимая во внимание следствие 1, видим, что для радиуса устойчивости траектории $t \in M^2(A) = P^2(A)$ (см. (2)) верна формула

$$\rho_1^2(t, A) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \max_{i=1,2} \gamma_i(t, t', A).$$

Обобщением этой формулы является следующий сопутствующий результат, вытекающий из теоремы 1.

Следствие 3 ([9]). Радиус устойчивости любой оптимальной по Парето $((n-1)$ -эффективной) траектории $t \in P^n(A)$, $n \geq 2$, выражается формулой

$$\rho_{n-1}^n(t, A) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \max_{i \in N_n} \gamma_i(t, t', A).$$

4. Пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим n -критериальную задачу, в которой множества

$$T_1^n(A), T_2^n(A), \dots, T_{n-1}^n(A)$$

непусты и попарно различны.

Пусть

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}, \quad n \geq 3, \quad t_j = \{e_j\}, \quad j \in N_{n-1},$$

матрица $A = [a_{ij}]_{n \times (n-1)}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ & & \dots & & & \\ 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(t_1, A) = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n,$$

$$f(t_j, A) = (0, 0, \dots, 0, n-j, \dots, n-j) \in \mathbf{R}^n,$$

где число нулей в $f(t_j, A)$ равно $n-j$ и $j = 2, 3, \dots, n-1$.

Сначала покажем, что для любого $s \in N_{n-1}$ верно равенство

$$T_s^n(A) = \{t_1, t_2, \dots, t_s\}, \quad (12)$$

то есть имеет место цепочка строгих включений

$$\emptyset \neq T_1^n(A) \subset T_2^n(A) \subset \dots \subset T_{n-1}^n(A).$$

Воспользуемся методом индукции. Прежде всего, равенство (12) очевидно при $s = 1$, поскольку $t_1 \prec_1 t_j$ для любого числа $j = 2, 3, \dots, n-1$ (с учетом асимметрии отношения $\prec_1$).

Итак, $T_1^n(A) = \{t_1\}$.

Пусть равенство (12) верно при $s = k-1$. Покажем, что тогда

$$T_k^n(A) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} = T_{k-1}^n(A) \cup \{t_k\}.$$

Прежде всего заметим, что согласно лемме 1

$$(T_{k-1}^n(A) \subseteq T_k^n(A)).$$

Далее покажем, что $t_k \in T_k^n(A)$. Для этого, учитывая определение (1), достаточно убедиться, что при любом индексе $j \in N_{n-1}$ верно неравенство

$$k[t_k, t_j, A]_+ \geq [t_k, t_j, A]_-. \quad (13)$$

Для этого рассмотрим три случая.

В первом случае $j = 1$. Легко видеть, что $[t_k, t_1, A]_+ = k$, $[t_k, t_i, A]_- = 1$, и поэтому неравенство (13) верно.

Во втором случае $1 < j < k$. Тогда

$$[t_k, t_j, A]_+ = k - j, \quad [t_k, t_j, A]_- = j,$$

то есть выполняется неравенство (13).

В третьем случае $j > k$. Тогда

$$[t_k, t_j, A]_+ = k, \quad [t_k, t_j, A]_- = j - k.$$

Следовательно, выполняется неравенство (13).

Наконец, осталось показать, что $t_{k+j} \notin T_k^n(A)$ при любом индексе $j \in N_{n-k}$. Очевидно, что это равносильно существованию такой траектории $t' \in T$, что

$$[t_{k+j}, t', A]_+ > k[t_{k+j}, t', A]_-.$$

Понятно, что такой траекторией является t_1 , так как

$$[t_{k+j}, t_1, A]_+ = k + j, \quad [t_{k+j}, t_1, A]_- = 1$$

при любом индексе $j \in N_{n-k}$.

Итак, справедливо равенство (12) при $s \in N_{n-1}$.

Покажем теперь на примере траектории t_1 , входящей в каждое из множеств $T_s^n(A)$, $s \in N_{n-1}$, что радиусы устойчивости $\rho_s^n(t_1, A)$, $s \in N_{n-1}$, удовлетворяют неравенствам (3).

Действительно, для каждого индекса $j = 2, 3, \dots, n-1$ упорядочив в соответствии с (6) числа $\gamma_i(t_1, t_j, A)$, $i \in N_n$, получаем, что

$$\gamma(j) = (\gamma_{p_1}(t_1, t_j, A), \gamma_{p_2}(t_1, t_j, A), \dots, \gamma_{p_n}(t_1, t_j, A)),$$

то есть

$$\gamma(j) = \left(\frac{n-j}{2}, \dots, \frac{n-j}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2} \right),$$

где число нулей равно $n - j - 1$ и $j = 2, 3, \dots, n-1$. В частности,

$$\gamma(2) = \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2} \right),$$

где число нулей равно $n - 3$, и

$$\gamma(n-1) = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Отсюда, воспользовавшись (7), находим, что для всякого $s \in N_{n-1}$

$$\varphi_s^n(t_1, A) = \min_{2 \leq j \leq n-1} \gamma_{p_k}(t_1, t_j, A) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = 1, 2, \\ 0, & \text{если } 3 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Поэтому согласно теореме 1, принимая во внимание определение числа k , получаем, что

$$\rho_s^n(t_1, A) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq s < (n-2)/2, \\ 1/2, & \text{если } (n-2)/2 \leq s \leq n-1. \end{cases}$$

Аналогично для остальных траекторий t_j , $j = 2, 3, \dots, n - 1$, легко находим, что

$$\rho_s^n(t_j, A) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \leq s \leq n - 2, \\ 1/2, & \text{если } s = n - 1. \end{cases}$$

Список литературы

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д., *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
2. Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. Н., *Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации*. Наука, Москва, 1981.
3. Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б., *Теория выбора и принятия решений*. Наука, Москва, 1982.
4. Шоломов Л. А., *Логические методы исследования дискретных моделей выбора*. Наука, Москва, 1989.
5. Юдин Д. Б., *Вычислительные методы теории принятия решений*. Наука, Москва, 1989.
6. Айзерман М. А., Алескерев Ф. Т., *Выбор вариантов: основы теории*. Наука, Москва, 1990.
7. Мойсеев Н. Н., *Современное состояние теории исследования операций*. Наука, Москва, 1979.
8. Молодцов Д. А., *Устойчивость принципов оптимальности*. Наука, Москва, 1987.
9. Емеличев В. А., Гирлих Э., Подкопаев Д. П., Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации. I, II. *Известия АН Республики Молдова. Математика* (1996), №3, 5–16; (1997), №2, 9–25.
10. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Об устойчивости решений, оптимальных по Смейлу, Парето и Слейтеру, в векторных траекторных задачах оптимизации. *Известия АН Республики Молдова. Математика* (1998), №3, 81–86.
11. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования. *Дискретная математика* (1999) 11, №4, 27–32.
12. Емеличев В. А., Никулин Ю. В., Об устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования. *Докл. НАН Беларуси* (2000) 44, №4, 26–28.
13. Емеличев В. А., Похилько В. Г., Анализ чувствительности эффективных решений векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок. *Дискретная математика* (2000) 12, №3, 37–48.
14. Arrow K. J., *Social choice and individual values*, Wiley, New York, 1963.
15. Миркин Б. Г. *Проблема группового выбора*. Наука, Москва, 1974.
16. Мулен Э., *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели*. Мир, Москва, 1991.
17. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н., *Многокритериальные модели формирования и выборов вариантов системы*. Наука, Москва, 1986.
18. Emelichev V.A., Stepanishyna Yu. V., Stability of a majority efficient solution of a vector linear trajectorial problem. *Comput. Sci. J. Moldova* (1999) 7, №3(21), 291–307.

Статья поступила 17.01.2001.