Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кропанов, В. С. Рублев, Равномерное назначение работ минимальной стоимости, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 144–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:12:42

Равномерное назначение работ минимальной стоимости

© 2001 г. В. А. Кропанов, В. С. Рублев

Рассматривается задача назначения работ в течение ряда дней с указанием числа работ на каждый день, возможностей каждого работника и стоимости работ для работников, при котором при условии минимальной стоимости всех работ каждый работник получает примерно одинаковое число работ (равномерность). Приводится характеристическое свойство оптимального решения задачи и на этом основании строится эффективный алгоритм ее решения.

1. Задача о равномерном назначении работ

Задаче о равномерном назначении работ и некоторым из ее обобщений посвящены работы [1–3], в которых результаты исследований одного из авторов либо были депонированы, либо анонсировались направления последующих исследований. В этой статье приводятся доказательства ряда анонсированных результатов и приведены новые обобщения этой задачи.

1.1. Постановка задачи

В течение определенного периода из m дней n работников должны выполнить определенный объем работы, задаваемый вектором

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$

числа работ на каждый день. Возможности каждого работника на каждый день этого периода задаются $(0,1)$ -матрицей R размерности $n \times m$, элементы которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник может работать в } j\text{-й день} \\ 0, & \text{если } i\text{-й работник не может работать в } j\text{-й день.} \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия достаточности числа работников на каждый день (корректности задачи):

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} \geq s_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Обязательные назначения задаются $n \times m$ матрицей A , элементы которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник обязан работать в } j\text{-й день,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й работник не обязан работать в } j\text{-й день.} \end{cases}$$

Очевидно, что должны быть выполнены условия корректности задачи:

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow r_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq s_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Требуется построить матрицу X назначений работников по дням, элементы которой

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник назначен работать в } j\text{-й день,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й работник не назначен работать в } j\text{-й день.} \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия:

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow r_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = s_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Потребуем, чтобы матрица X , удовлетворяющая условиям (4)–(6), минимизировала функционал $f(X)$ среднеквадратичного отклонения числа работ (обоснование выбора функционала равномерности см. в [1])

$$f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(X) - \bar{k})^2, \quad (7)$$

где

$$k_i(X) = \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

— число работ, выполняемых каждым работником, а

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(X)$$

— среднее число работ.

Таким образом, задачу о равномерном назначении работ сформулируем следующим образом: для заданного вектора S числа работ на каждый день, матрицы R возможностей каждого работника на каждый день и матрицы A обязательных назначений, удовлетворяющих условиям (1)–(3), требуется построить матрицу X , удовлетворяющую условиям (4)–(6) и минимизирующую функционал (7).

Решение этой задачи назовем равномерным назначением работ.

Рис. 1.

1.2. Постановка Al -задачи

Для исследования свойств задачи о равномерном назначении работ и построения алгоритма ее решения сформулируем следующую (вспомогательную) задачу о максимальных назначениях при ограничении на число работ каждого работника.

Заданы вектор S максимального числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника, удовлетворяющая (1), и матрица A обязательных назначений, удовлетворяющая (2)–(3). Требуется построить матрицу назначений X , удовлетворяющую условиям (4)–(5), ограничениям

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq s_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^m a_{ij}, l \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad l > 0, \quad (10)$$

и максимизирующую число выполненных работ

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}. \quad (11)$$

Такую задачу будем называть Al -задачей, где $l = 1, 2, \dots$ — ограничение в условии (10).

Al -задача может быть сведена к задаче о наибольшем потоке (см., например, [4]) следующим образом. Построим транспортную (рис. 1) сеть, в которой из источника x_0 идет n дуг пропускной способности l к вершинам $b_1, b_2, \dots, b_n$, соответствующих работникам; из вершин $d_1, d_2, \dots, d_m$, соответствующих дням, в сток z идут дуги пропускной способности $s_1, s_2, \dots, s_m$; из вершины b_i в вершину d_j идет дуга пропускной способности 1 тогда и только тогда, когда элемент r_{ij} матрицы возможностей R равен 1.

Если величину потока из b_i в d_j обозначить через x_{ij} , то решение задачи о наибольшем потоке и будет решением Al -задачи. При этом может быть использован

алгоритм Форда–Фалкерсона (см. [4]) решения задачи о наибольшем потоке. Алгоритм Форда–Фалкерсона включает в себя задание начального потока (в Al -задаче этому соответствует задание любой матрицы назначений X , удовлетворяющей условию (4)) и увеличение потока при помощи построения цепочки улучшения. В исследуемой Al -задаче ей соответствует цепочка элементов матрицы X

$$x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_2} \dots x_{i_q j_{q-1}} x_{i_q j_q}, \quad (12)$$

не проходящая через элементы, соответствующие элементам $a_{ij} = 1$, и для которой выполнены условия

$$k_{i_1}(X) < l, \quad (13)$$

$$x_{i_t j_{t-1}} = 1, \quad t = 2, \dots, q, \quad (14)$$

$$x_{i_t j_t} = 0, \quad t = 1, \dots, q, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij_t} = s_{j_t}, \quad t < q, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij_q} < s_{j_q}. \quad (17)$$

Преобразование матрицы назначений $X \rightarrow Y = \|y_{ij}\|$ определяется следующим образом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = i_t \text{ и } j = j_{t-1}, \quad t = 2, \dots, q, \\ 1, & \text{если } i = i_t \text{ и } j = j_t, \quad t = 1, \dots, q, \\ x_{ij} & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (18)$$

При этом выполняются соотношения для числа единиц в строках

$$k_{i_1}(Y) = k_{i_1}(X) + 1, \quad k_i(Y) = k_i(X), \quad i \neq i_1,$$

и в столбцах

$$\sum_{i=1}^n y_{ij_q} = \sum_{i=1}^n x_{ij_q} + 1, \quad \sum_{i=1}^n y_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j \neq j_q.$$

Этими свойствами преобразования мы воспользуемся при доказательстве характеристического свойства решений задачи о равномерном назначении работ. Для его формулировки введем определение Al -срезки матрицы X .

Определение 1. Al -срезкой матрицы X назовем любую матрицу, полученную следующим образом:

- Al -срезка содержит все единичные (равные 1) элементы матрицы A ,
- в каждой i -й строке матрицы X , $i = 1, \dots, n$, содержащей более

$$M = \max \left\{ \sum_{j=1}^m a_{ij}, l \right\}$$

элементов, равных единице, оставлены равными единице ровно M (любых) элементов, а остальные заменены нулями,

– все остальные строки матрицы X оставлены без изменения.

Лемма 1. Пусть Y — Al -срезка матрицы X и пусть

$$k_i(Y) < \max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\}.$$

Тогда

$$\max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\} = l.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть выполнено условие леммы, но

$$\max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\} = \sum_{j=1}^m a_{ij} > l.$$

По определению Al -срезки

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \leq k_i(Y).$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \leq k_i(Y) < \max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{ij} \right\} = \sum_{j=1}^m a_{ij}.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

1.3. Характеристическое свойство решения задачи о равномерном назначении работ

Теорема 1. Матрица X является равномерным назначением работ тогда и только тогда, когда любая ее Al -срезка является решением Al -задачи.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть матрица Z — решение задачи. Тогда для любой ее Al -срезки выполняются условия (4), (5), (9), (10), то есть любая Al -срезка является матрицей назначений Al -задачи. Остается показать, что Al -срезка матрицы Z максимизирует значение функционала (11).

Предположим противное. Пусть существует матрица X , которая является Al -срезкой матрицы Z , и число ее ненулевых элементов не максимально. Тогда для нее можно построить цепочку элементов (12) с выполнением условий (13)–(17). Построим матрицу Y , используя преобразование (18). Далее мы покажем, как построить преобразование матрицы Y в матрицу W , которая является матрицей назначения (то есть для нее выполняются условия (4)–(6)) и для которой количество единиц в любой строке, кроме двух строк (с номерами i_1 и некоторым p) такое же, как и для

матрицы Z , а для выделенных строк выполняются условия

$$k_{i_1}(W) = k_{i_1}(Z) + 1 \leq \max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{i_1 j} \right\} = l, \quad (19)$$

$$k_p(W) = k_p(Z) - 1 \geq \max \left\{ l, \sum_{j=1}^m a_{pj} \right\} \geq l. \quad (20)$$

Так как $k_p(Z) - k_{i_1}(Z) > 1$, в силу (19) и (20)

$$\begin{aligned} f(W) - f(Z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(W) - \bar{k})^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Z) - \bar{k})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^2(W) - \bar{k}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^2(Z) + \bar{k}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i^2(W) - k_i^2(Z)) \\ &= \frac{1}{n} (k_{i_1}^2(W) + k_p^2(W) - k_{i_1}^2(Z) - k_p^2(Z)) \\ &= \frac{1}{n} (k_{i_1}^2(Z) + 2k_{i_1}(Z) + 1 + k_p^2(Z) - 2k_p(Z) + 1 - k_{i_1}^2(Z) - k_p^2(Z)) \\ &= \frac{2}{n} (k_{i_1}(Z) - k_p(Z) + 1) < \frac{2}{n} (-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что $f(W) < f(Z)$, и следовательно, Z не минимизирует функционал f , что противоречит предположению о равномерном назначении.

Для построения матрицы W образуем из матрицы Y матрицу V , восстановив все единицы, замененные на нули при получении Al -срезки, то есть положим

$$v_{ij} = \begin{cases} y_{ij}, & \text{если } x_{ij} = 1 \text{ или } z_{ij} = 0, \\ z_{ij}, & \text{если } x_{ij} = 0 \text{ и } z_{ij} = 1. \end{cases}$$

Далее мы рассмотрим 3 случая

$$\begin{aligned} q &= 1, \\ q &> 1, \quad z_{i_q j_q} = 1, \\ q &> 1, \quad z_{i_q j_q} = 0. \end{aligned}$$

В первом случае количество единиц в столбце j_1 матрицы V превышает s_{j_1} , то есть

$$\sum_{i=1}^n v_{ij_1} = s_{j_1} + 1,$$

поскольку в строке i_1 нет восстанавливаемых элементов ($z_{i_1 j_1} = 1$) и элемент $v_{i_1 j_1}$ будет как раз лишней единицей. Так как до восстановления

$$\sum_{i=1}^n y_{ij_1} \leq s_{j_1}$$

(это следует из (17)–(18)), при восстановлении найдется такая строка p , для которой $x_{pj_1} = 0$ и $z_{pj_1} = 1$. Образует матрицу W , заменив элемент v_{pj_1} на 0, то есть положим

$$w_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & \text{если } i \neq p \text{ или } j \neq j_1, \\ 0, & \text{если } i = p \text{ и } j = j_1. \end{cases}$$

Во втором случае $q > 1$ и $z_{iqj_q} = 1$. Заметим, что в случаях 2 и 3 не относятся к восстанавливаемым элементы v_{itj_t} , $t = 1, \dots, q-1$, поскольку число единиц матрицы X в столбцах j_t , $t < q$, равно s_{j_t} , а если бы при получении матрицы X элемент z_{itj_t} , $t < q$, был заменен на 0, то число единиц в столбце j_t матрицы X стало бы меньше s_{j_t} , что противоречит (16). Поэтому при восстановлении единицы в строках i_t , $t = 2, \dots, q-1$, число единиц не изменится, то есть

$$k_{i_t}(W) = k_{i_t}(Z), \quad t = 2, \dots, q-1.$$

После восстановления число единиц в столбце j_q равно s_{j_q} , а в строке i_q уменьшится, так как $v_{iqj_{q-1}} = 0$, а $z_{iqj_{q-1}} = 1$. Поэтому для этого случая можно взять $W = V$ и $p = q$.

В третьем случае $q > 1$ и $z_{iqj_q} = 0$. После восстановления число единиц в столбце j_q увеличится на 1 (станет больше s_{j_q}). Следовательно, найдется строка с номером p такая, что элемент v_{pj_q} восстанавливается (то есть $x_{pj_q} = 0$ и $z_{pj_q} = 1$). Образует матрицу W , заменив элемент v_{pj_q} на 0, то есть положим

$$w_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & \text{если } i \neq p \text{ или } j \neq j_q, \\ 0, & \text{если } i = p \text{ и } j = j_q. \end{cases}$$

Итак, во всех случаях построено требовавшееся преобразование к матрице W . Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть матрица назначений X удовлетворяет свойству оптимальности ее Al -срезов для соответствующих Al -задач, а матрица Z является решением задачи о равномерном назначении работ.

Обозначим через $n_i(Y)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, число строк $(0,1)$ -матрицы Y , содержащих ровно i единиц. Тогда

$$f(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (k_j(Y) - \bar{k})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_{\max}(Y)} n_i(Y)(i - \bar{k})^2,$$

где

$$k_{\max}(Y) = \max_{1 \leq j \leq n} k_j(Y).$$

Для доказательства достаточно показать, что

$$n_i(X) = n_i(Z), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

так как в этом случае

$$k_{\max}(X) = k_{\max}(Z) \quad (22)$$

и из формулы (21) следует, что $f(X) = f(Z)$, что и требуется.

Обозначим через $p_l(X)$ количество единиц Al -срезки матрицы X . Из доказанного условия необходимости следует, что $p_l(X) = p_l(Z)$. Поскольку значения $p_l(X)$ не убывают при увеличении l , найдется значение $l = l_{\max}$, для которого

$$p_l(X) = \sum_{j=1}^m s_j.$$

Отсюда следует, что

$$k_{\max}(X) = l_{\max}, \quad k_{\max}(Z) = l_{\max},$$

что доказывает справедливость равенства (22).

$A(l-1)$ -срезка Al -срезки матрицы X при $l = 2, 3, \dots$ является $A(l-1)$ -срезкой матрицы X , поэтому справедливы равенства

$$\sum_{i=0}^{l-1} n_i(X) + (p_l(X) - p_{l-1}(X)) = n, \quad l = 2, 3, \dots, l_{\max}.$$

Добавляя очевидные равенства

$$\sum_{i=1}^{l_{\max}} n_i(X) = n, \quad n_0(X) + p_1(X) = n,$$

получим систему линейных уравнений относительно $n_i(X)$, $i = 0, 1, \dots, l_{\max}$,

$$\begin{aligned} n_0(X) &= n - p_1(X), \\ \sum_{i=1}^{l-1} n_i(X) &= n - (p_l(X) - p_{l-1}(X)), \quad l = 2, 3, \dots, l_{\max}, \\ \sum_{i=1}^{l_{\max}} n_i(X) &= n. \end{aligned}$$

Поскольку матрица системы треугольная с диагональю из единиц, система имеет единственное решение. Это доказывает инвариантность значений $n_i(X)$ относительно выбора матрицы X и, следовательно, справедливость равенств (21). Теорема доказана.

1.4. Алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ

Из доказанной теоремы вытекает следующий алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ.

- (1) Полагаем $l = 1$ и $X = A$.
- (2) Решаем Al -задачу (алгоритм Форда–Фалкерсона), выбирая в качестве начального потока матрицу X , полученную на предыдущем шаге и получая в качестве решения новую матрицу X , удовлетворяющую условиям (4)–(6).

(3) Если

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^m s_j,$$

то задача решена и алгоритм заканчивает работу, иначе выполняем шаг 4.

(4) Увеличиваем l на 1 и переходим к шагу 2.

Для обоснования алгоритма заметим, что алгоритм увеличения потока (Форда–Фалкерсона) построением цепочки улучшения не уменьшает количество единиц матрицы, определяющей поток, в любой ее строке. Поэтому Ap -срежки, $p = 1, \dots, l-1$, матрицы-решения Al -задачи при решении таким методом будут решениями соответствующих Ap -задач. Таким образом, в результате применения алгоритма получается матрица X , удовлетворяющая характеристическому свойству, и по теореме 1 она является решением задачи о равномерном назначении работ, что и требовалось доказать.

2. Задача о равномерном назначении работ относительно вектора распределения

2.1. Постановка задачи

Заданы вектор S числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника на каждый день, удовлетворяющая условию (1), и вектор

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad h_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

желательного числа работ для каждого работника. Требуется построить матрицу X назначения работ, удовлетворяющую условиям (4), (6) и минимизирующую функционал

$$f^+(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(X) - h_i)^2, \quad (23)$$

где $k_i(X)$ — число назначаемых работ i -у работнику (определяется равенствами (8)).

Заметим, что при $h_i = \bar{k}$, $i = 1, \dots, n$, определенная таким образом задача превращается в частный случай задачи, рассмотренной в разделе 1. Назовем задачу из раздела 1 задачей равномерного назначения с матрицей обязательных назначений (РНМО), а определенную выше задачу задачей равномерного назначения относительно вектора (РНОВ). Покажем эквивалентность этих задач.

2.2. Эквивалентность задач РНОВ и РНМО

Теорема 2. Пусть задача РНМО определена заданием вектора числа работ S , матрицей возможностей R и матрицей обязательных назначений A , а задача РНОВ определяется заданием вектора числа работ S^+ , матрицей возможностей

R^+ и вектором желательного числа работ H для таких же значений параметров n и m . Пусть ограничения обеих задач связаны следующими условиями:

$$\begin{aligned} 2R^+ &= R - A, \\ s_j^+ &= s_j - \sum_{i=1}^n a_{ij}, & j &= 1, \dots, m, \\ h_i &= \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{j=1}^m a_{ij} - \sum_{j=1}^m a_{ij}, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Если X^+ — решение задачи РНОВ, то $X = X^+ + A$ — решение задачи РНМО.

Если X — решение задачи РНМО, то $X^+ = X - A$ — решение задачи РНОВ.

Доказательство. Введем обозначения

$$k_i(A) = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad k_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad h_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Пусть матрицы Y и Y^+ удовлетворяют условиям (4) и (6) соответствующих задач РНМО и РНОВ, связанных условиями теоремы, а также отношению $Y = Y^+ + A$. Тогда

$$\begin{aligned} f(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{\max} + k_{\max} - \bar{k})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{\max})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{\max})(k_{\max} - \bar{k}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_{\max} - \bar{k})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) + k_i(A) - k_{\max})^2 - (k_{\max} - \bar{k})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) - h_i)^2 - (k_{\max} - \bar{k})^2 = f^+(Y^+) - (k_{\max} - \bar{k})^2, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} f^+(Y^+) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) - h_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_i(A) - h_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k} + \bar{k} - k_i(A) - h_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})(\bar{k} - k_i(A) - h_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{k} - k_i(A) - h_i)^2 \\ &= f(Y) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})(\bar{k} - h_{\max}) + (h_{\max} - \bar{k})^2 = f(Y) + (h_{\max} - \bar{k})^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(Y)$ и $f^+(Y^+)$ различаются константой, которая не зависит от выбора Y или Y^+ , а потому из минимальности $f(X)$ следует минимальность $f^+(X^+)$ и наоборот. Теорема доказана.

2.3. Сведение задачи РНОВ к задаче РНМО

Теорема 2 дает возможность свести одну задачу к другой.

Пусть мы имеем задачу РНМО. Положим

$$\begin{aligned} h_i &= k_{\max} - k_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \\ R^+ &= R - A, \\ s_j^+ &= s_j - \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

и образуем задачу РНОВ с матрицей возможностей R^+ , вектором числа работ на каждый день

$$S^+ = (s_1^+, \dots, s_m^+)$$

и вектором желательного числа работ

$$H = (h_1, \dots, h_m).$$

Поскольку ограничения этих задач удовлетворяют условиям теоремы 2, по решению X^+ задачи РНОВ строим решение

$$X = X^+ + A$$

задачи РНМО.

Пусть мы имеем задачу РНОВ с матрицей возможностей R^+ и вектором числа работ на каждый день S^+ . Расширим матрицу R^+ , добавив $h_{\max}$ нулевых столбцов, вектор S^+ , добавив $h_{\max}$ нулевых компонент, и число дней m увеличим на $h_{\max}$ дней. образуем матрицы A, R и вектор S , полагая

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j > m + h_i - h_{\max}, \\ 0, & j \leq m + h_i - h_{\max} \end{cases}$$

при $i = 1, \dots, n$,

$$R = R^+ + A$$

и

$$s_j = \begin{cases} s_j^+, & j \leq m - h_{\max}, \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}, & j > m - h_{\max} \end{cases}$$

при $j = 1, \dots, m$.

Поскольку ограничения обеих задач удовлетворяют условиям теоремы 2, по решению X задачи РНМО строим решение

$$X^+ = X - A$$

задачи РНОВ. Отбросив $h_{\max}$ последних столбцов матрицы X^+ , получим решение исходной задачи.

3. Задача о равномерном назначении минимальной стоимости

Заданы вектор S числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника на каждый день, удовлетворяющая условию (1), и матрица C стоимостей выполнения работы каждым работником на каждый день (c_{ij} — стоимость работы i -го работника в j -й день). Требуется среди матриц X назначения работ, удовлетворяющих условиям (4), (6) и минимизирующих функционал стоимости

$$\psi(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij},$$

выбрать матрицу, минимизирующую функционал равномерности (7).

Решение этой задачи будем называть равномерным назначением минимальной стоимости (оно является равномерным среди решений минимальной стоимости). Свойства назначения минимальной стоимости описываются следующей очевидной леммой.

Лемма 2. Для любого решения Y минимальной стоимости

$$c_{ij} < m_j \wedge r_{ij} = 1 \Rightarrow y_{ij} = 1, \quad c_{ij} > m_j \Rightarrow y_{ij} = 0,$$

где m_j — s_j -й минимум в j -м столбце матрицы C (в упорядоченном по возрастанию списке значений j -го столбца на s_j -м месте стоит m_j), $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Из леммы 2 вытекает, что при построении равномерного назначения минимальной стоимости следует определить матрицу A обязательных назначений следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & c_{ij} < m_j \wedge r_{ij} = 1, \\ 0, & c_{ij} \geq m_j \vee r_{ij} = 0, \end{cases} \quad (24)$$

и переопределить матрицу R , полагая

$$r'_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & c_{ij} \geq m_j, \\ 0, & c_{ij} > m_j. \end{cases} \quad (25)$$

Из (24)–(25) и определения m_j следует, что для матриц A и R' выполнены условия (2)–(3). Это позволяет сформулировать следующую теорему 3.

Теорема 3. Пусть вектор S , матрицы R и C определяют задачу о равномерном назначении минимальной стоимости и матрицы A и R' определяются формулами (24) и (25). Тогда вектор S и матрицы R' и A определяют задачу о равномерном назначении, любое решение X которой является решением исходной задачи о равномерном назначении минимальной стоимости.

Доказательство. Пусть Y — любое назначение минимальной стоимости исходной задачи. Необходимо показать, что $\psi(X) = \psi(Y)$. Используя (24), (25) и лемму 2,

находим, что

$$\begin{aligned}
 & \psi(X) - \psi(Y) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} y_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{c_{ij} > m_j} c_{ij} x_{ij} - \sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} y_{ij} - \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} y_{ij} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{c_{ij} < m_j \wedge r'_{ij} = 1} c_{ij} a_{ij} - \sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} y_{ij} + \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} (x_{ij} - y_{ij}) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m m_j \sum_{c_{ij} = m_j} (x_{ij} - y_{ij}) = \sum_{j=1}^m m_j \left(s_j - s_j + \sum_{c_{ij} = m_j} x_{ij} - \sum_{c_{ij} = m_j} y_{ij} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m m_j \left(\sum_{c_{ij} < m_j} y_{ij} - \sum_{c_{ij} < m_j} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m m_j \left(\sum_{c_{ij} < m_j} y_{ij} - \sum_{c_{ij} < m_j} a_{ij} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует простой алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ минимальной стоимости:

- по формулам (24)–(25) строим матрицы A и R' ,
- решаем задачу о равномерном назначении работ для вектора S и матриц R' и A .

Нетрудно обобщить эту задачу, добавив вектор H желательного числа работ и заменив критерий равномерности (7) на (23).

Список литературы

1. Рублев В. С., Задача о равномерном распределении работ. Деп. ВИНТИ №611–В87 26.01.87.
2. Рублев В. С., Задача о равномерном распределении работ. В сб.: *Тезисы международной конференции «Математические методы в исследовании операций»*. София, 1987, с. 46.
3. Рублев В. С., Обобщения задачи о равномерном распределении работ. В сб.: *Тезисы докладов юбилейной научной конференции ЯрГУ*, Ярославль, 1995, с. 110–112.
4. Йенсен П., Барнес Д., *Потоковое программирование*. Радио и связь, Москва, 1984.

Статья поступила 10.01.2000.