Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кварацхелия, Одна числовая характеристика матрицы Сильвестра, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 92–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:23:53

УДК 519.142

Одна числовая характеристика матрицы Сильвестра

© 2001 г. В. В. Кварацхелия

В статье вводится одна характеристика матрицы Сильвестра и находится ее точное значение. Описаны применения введенной характеристики.

Матрицы Сильвестра находят применения в различных областях математики, главным образом в дискретной математике (см. например [1]). Отметим также, что с их помощью можно построить конструктивный пример безусловно сходящегося ряда в банаховом пространстве l_1 , который не сходится абсолютно [2]. Кроме того, в [3] с помощью матриц Сильвестра (Адамара) в банаховых пространствах l_p , $1 \leq p < \infty$, вводятся ряды специального типа и устанавливаются критерии их безусловной сходимости.

Матрица Сильвестра определяется следующими рекуррентными соотношениями (см. [1]):

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ S^{(n)} &= \begin{bmatrix} S^{(n-1)} & S^{(n-1)} \\ S^{(n-1)} & -S^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Ясно, что $S^{(n)}$ имеет порядок 2^n и она является частным случаем матрицы Адамара (подробно матрицы Адамара рассмотрены, например, в [4]), то есть все ее элементы есть $+1$ и -1 и любые ее две строки (а также два столбца) представляют собой взаимно ортогональные векторы в 2^n -мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{2^n}$.

Пусть

$$S^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$$

— матрица Сильвестра порядка 2^n . Для $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим функционалы

$$\rho^{(n)}(m) = \sum_{i=1}^{2^n} \left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n)} \right|, \quad m = 1, 2, \dots, 2^n, \quad (2)$$

и введем обозначение

$$\rho^{(n)} = \max_{1 \leq m \leq 2^n} \rho^{(n)}(m).$$

Величина $\rho^{(n)}$ представляет собой некоторую характеристику матрицы Сильвестра. С ее помощью в [5] конструктивным образом были построены нетривиальные условно сходящиеся ряды в банаховом пространстве l_1 . В этом важную роль сыграло доказанное там же неравенство

$$\max_{1 \leq m \leq 2^n} \rho^{(n)}(m) \leq n2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Цель настоящей работы — вычисление точного значения характеристики $\rho^{(n)}$ и нахождение точек максимума $\rho^{(n)}(m)$ при каждом фиксированном $n \geq 1$.

Начнем с доказательства следующей элементарной леммы.

Лемма 1. Функционал $\rho^{(n)}(m)$, определенный равенством (2), обладает следующими свойствами:

$$\rho^{(n)}(2^{n-1} + m) = \rho^{(n)}(2^{n-1} - m) + 2m \quad (3)$$

для всех $1 \leq m \leq 2^{n-1}$, $n \geq 1$ (здесь полагаем, что $\rho^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \geq 1$);

$$\rho^{(n+1)}(m) = 2\rho^{(n)}(m) \quad (4)$$

для всех $1 \leq m \leq 2^n$, $n \geq 1$;

$$\rho^{(n)}(2^{n-1} + 2^{n-2} + m) = \rho^{(n)}(2^{n-1} + 2^{n-2} - m) \quad (5)$$

для всех $1 \leq m \leq 2^{n-2}$, $n \geq 2$.

Доказательство. Первый столбец матрицы Сильвестра состоит только из +1 и он ортогонален ко всем остальным столбцам, для всех $n = 1, 2, \dots$, поэтому очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{2^n} s_{ki}^{(n)} = \begin{cases} 2^n, & i = 1, \\ 0, & i = 2, 3, \dots, 2^n. \end{cases} \quad (6)$$

Теперь по индукции докажем справедливость следующего свойства матрицы Сильвестра: для всех

$$1 \leq m \leq 2^{n-1}, \quad 2 \leq i \leq 2^n, \quad i \neq 2^{n-1} + 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеет место равенство

$$\left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2^n-m} s_{ki}^{(n)} \right|. \quad (7)$$

В самом деле, справедливость равенства (7) при $n = 1$ очевидна. Далее предположим, что (7) справедливо для n и докажем его справедливость для $n + 1$. Мы должны показать, что для всех

$$1 \leq m \leq 2^n, \quad 2 \leq i \leq 2^{n+1}, \quad i \neq 2^n + 1,$$

справедливо равенство

$$\left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n+1)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2^{n+1}-m} s_{ki}^{(n+1)} \right|. \quad (8)$$

В силу (1) левую сторону доказываемого равенства (8), очевидно, можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n+1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n)} \right|, & 2 \leq i \leq 2^n, \\ \left| \sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n+1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^m s_{ki-2^n}^{(n)} \right|, & 2^n + 2 \leq i \leq 2^{n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Правую сторону доказываемого равенства (8) сначала перепишем в виде

$$\left| \sum_{k=1}^{2^{n+1}-m} s_{ki}^{(n+1)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2^n} s_{ki}^{(n+1)} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-m} s_{ki}^{(n+1)} \right|,$$

где первая сумма в правой части, согласно (6), равняется нулю, а во второй сумме переменную $k - 2^n$ заменим опять на k и, следовательно, правая часть (8) примет вид

$$\left| \sum_{k=1}^{2^n-m} s_{ki}^{(n+1)} \right|.$$

Теперь, учитывая определение (1) матрицы Сильвестра, получаем, что правая сторона доказываемого равенства (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{2^{n+1}-m} s_{ki}^{(n+1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{2^n-m} s_{ki}^{(n)} \right|, & 2 \leq i \leq 2^n, \\ \left| \sum_{k=1}^{2^{n+1}-m} s_{ki}^{(n+1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{2^n-m} s_{ki-2^n}^{(n)} \right|, & 2^n + 2 \leq i \leq 2^{n+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получаем справедливость равенства (8) и завершаем доказательство свойства (7).

Чтобы доказать (3), воспользуемся определением (2) и свойствами (6) и (7) матрицы Сильвестра и получим, что

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}(2^{n-1} + m) &= 2^n + \sum_{i=2}^{2^{n-1}} \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}+m} s_{ki}^{(n)} \right| + \sum_{i=2^{n-1}+2}^{2^n} \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}+m} s_{ki}^{(n)} \right| \\ &= 2^n + \sum_{i=2}^{2^{n-1}} \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}-m} s_{ki}^{(n)} \right| + \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}-m} s_{ki}^{(n)} \right| \\ &= 2^n - 2m + \rho^{(n)}(2^{n-1} - m). \end{aligned}$$

Равенство (4) непосредственно вытекает из определения (1) матрицы Сильвестра.

Равенство (5) является следствием равенств (3) и (4). В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho^{(n)}(2^{n-1} + 2^{n-2} + m) &= 2\rho^{(n-1)}(2^{n-2} - m) + 2^{n-1} + 2m \\ &= 2\rho^{(n-1)}(2^{n-2} + m) + 2^{n-1} - 2m \\ &= \rho^{(n)}(2^{n-1} + 2^{n-2} - m). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Величина $\rho^{(n)}$ определяются равенством

$$\rho^{(n)} = (3n + 7)2^n/9 + 2(-1)^n/9, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для всех $n \geq 1$ максимум достигается в точке

$$m_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3,$$

а если $n \geq 3$, то тот же максимум достигается и в точке

$$m'_n = (5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1})/3.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что числа

$$(3n + 7)2^n/9 + 2(-1)^n/9$$

целые для всех $n = 1, 2, \dots$

Сначала по индукции докажем, что

$$\rho^{(n)} \leq (3n + 7)2^n/9 + 2(-1)^n/9. \quad (11)$$

В самом деле, непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что соотношение (11) выполняется для $n = 1$ и $n = 2$.

Теперь предположим, что $n \geq 3$ и выполнено соотношение (11) для некоторого n и докажем его справедливость для $n + 1$, то есть покажем, что

$$\rho^{(n+1)} \leq (3n + 10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9. \quad (12)$$

Для доказательства соотношения (12), достаточно показать, что

$$\rho^{(n+1)}(m) \leq (3n + 10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9$$

для всех $1 \leq m \leq 2^{n+1}$.

Пусть $1 \leq m \leq 2^n$. Тогда, пользуясь свойством (4) и соотношением (11), получаем, что

$$\begin{aligned} \rho^{(n+1)}(m) &= 2\rho^{(n)}(m) \leq (3n + 7)2^{n+1}/9 + 4(-1)^n/9 \\ &\leq (3n + 10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9. \end{aligned}$$

Пусть $2^n + 1 \leq m \leq (5/4)2^n$. Представим m в виде $m = 2^n + \bar{m}$, где $1 \leq \bar{m} \leq 2^{n-2}$. Тогда, пользуясь свойствами (3) и (4) функции $\rho^{(n)}(m)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \rho^{(n+1)}(m) &= \rho^{(n+1)}(2^n + \bar{m}) = \rho^{(n+1)}(2^n - \bar{m}) + 2\bar{m} \\ &= 2\rho^{(n)}(2^n - \bar{m}) + 2\bar{m} \leq (3n + 7)2^{n+1}/9 + 4(-1)^n/9 + 2^{n-1} \\ &\leq (3n + 10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9. \end{aligned}$$

Пусть $(5/4)2^n + 1 \leq m \leq (7/4)2^n$. Представим m в виде $m = 2^n + 2^{n-1} \pm \bar{m}$, где $1 \leq \bar{m} \leq 2^{n-2}$. Заметим, что согласно свойству (5) функции $\rho^{(n)}(m)$, достаточно рассмотреть случай $m = 2^n + 2^{n-1} - \bar{m}$. В этом случае

$$\begin{aligned}\rho^{(n+1)}(m) &= \rho^{(n+1)}(2^n + 2^{n-1} - \bar{m}) = \rho^{(n+1)}(2^{n-1} + \bar{m}) + 2^n - 2\bar{m} \\ &= 2\rho^{(n)}(2^{n-1} + \bar{m}) + 2^n - 2\bar{m} = 2\rho^{(n)}(2^{n-1} - \bar{m}) + 2^n + 2\bar{m} \\ &= 2(\rho^{(n)}(\bar{m}) + 2^{n-1} - 2\bar{m}) + 2^n + 2\bar{m} = 8\rho^{(n-2)}(\bar{m}) + 2^{n+1} - 2\bar{m} \\ &\leq (3n+1)2^{n+1}/9 + 16(-1)^{n-2}/9 + 2^{n+1} - 2 \\ &\leq (3n+10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9.\end{aligned}$$

Пусть $(7/4)2^n + 1 \leq m \leq 2^{n+1}$. Представим число m в виде $m = 2^{n+1} - \bar{m}$, где $1 \leq \bar{m} \leq 2^{n-2}$. В этом случае

$$\begin{aligned}\rho^{(n+1)}(m) &= \rho^{(n+1)}(2^{n+1} - \bar{m}) = \rho^{(n+1)}(\bar{m}) + 2^{n+1} - 2\bar{m} \\ &= 8\rho^{(n-2)}(\bar{m}) + 2^{n+1} - 2\bar{m} \\ &\leq (3n+1)2^{n+1}/9 + 16(-1)^{n-2}/9 + 2^{n+1} - 2 \\ &\leq (3n+10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9.\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (11) доказано.

Теперь рассмотрим числа

$$\begin{aligned}m_n &= (2^{n+1} + (-1)^n)/3, \quad n \geq 1, \\ m'_n &= (5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1})/3, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что оба эти числа целые и $2^{n-1} \leq m_n \leq m'_n \leq 2^n$ для всех $n \geq 3$.

По индукции покажем, что

$$\begin{aligned}\rho^{(n)}(m_n) &= \rho^{(n)}((2^{n+1} + (-1)^n)/3) \\ &= (3n+7)2^n/9 + 2(-1)^n/9.\end{aligned}\tag{13}$$

В самом деле, очевидно, что $\rho^{(1)} = 2$ и $\rho^{(1)}(m_1) = \rho^{(1)}(1) = 2$.

Теперь положим, что равенство (13) справедливо для некоторого $n \geq 1$ и докажем его справедливость для $n+1$, то есть покажем, что

$$\begin{aligned}\rho^{(n+1)}(m_{n+1}) &= \rho^{(n+1)}((2^{n+2} + (-1)^{n+1})/3) \\ &= (3n+10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9.\end{aligned}$$

Пользуясь свойствами (3) и (4) функции $\rho^{(n)}(m)$, находим, что

$$\begin{aligned}\rho^{(n+1)}(m_{n+1}) &= \rho^{(n+1)}((2^{n+2} + (-1)^{n+1})/3) \\ &= \rho^{(n+1)}(2^n + (2^n + (-1)^{n-1})/3) \\ &= 2\rho^{(n)}((2^{n+1} + (-1)^n)/3) + 2 \cdot (2^n + (-1)^{n-1})/3 \\ &= (3n+7)2^{n+1}/9 + 4(-1)^n/9 + (2^{n+1} - 2(-1)^n)/3 \\ &= (3n+10)2^{n+1}/9 + 2(-1)^{n+1}/9.\end{aligned}$$

Остается показать, что если $n \geq 3$, то $\rho^{(n)}(m_n) = \rho^{(n)}(m'_n)$. В самом деле, опять согласно свойствам (3) и (4) функции $\rho^{(n)}(m)$

$$\begin{aligned}\rho^{(n)}(m'_n) &= \rho^{(n)}((5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1})/3) \\ &= \rho^{(n)}(2^{n-1} + (2^n + (-1)^{n-1})/3) \\ &= 4\rho^{(n-2)}((2^{n-1} + (-1)^{n-2})/3) + 2 \cdot (2^n + (-1)^{n-1})/3 \\ &= (3n+1)2^n/9 + 8(-1)^{n-2}/9 + (2^{n+1} + 2(-1)^{n-1})/3 \\ &= (3n+7)2^n/9 + 2(-1)^n/9 = \rho^{(n)}(m_n).\end{aligned}$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 1. На доказанную теорему можно посмотреть и с точки зрения так называемого максимального неравенства. В частности, пусть $S^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$ — матрица Сильвестра порядка 2^n , $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим в конечномерном банаховом пространстве $l_1^{2^n}$ последовательность элементов $a_1, \dots, a_{2^n}$, где

$$a_k = (s_{k1}^{(n)}, \dots, s_{k2^n}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Очевидно, что

$$\rho^{(n)}(m) = \left\| \sum_{k=1}^m a_k \right\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма банахова пространства $l_1^{2^n}$. Тогда, согласно доказанной теореме,

$$\max_{1 \leq m \leq 2^n} \left\| \sum_{k=1}^m a_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m_n} a_k \right\| = (3n+7)2^n/9 + 2(-1)^n/9,$$

где

$$m_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3, \quad n \geq 1,$$

причем при $n \geq 3$ наряду с m_n можно взять

$$m'_n = (5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1})/3.$$

Замечание 2. Характеристику $\rho^{(n)} = \rho^{(n)}(S^{(n)})$ можно интерпретировать как норму матрицы Сильвестра $S^{(n)}$. В самом деле, обозначим через $\mathfrak{M}^{(n)}$ векторное пространство всех квадратных матриц порядка 2^n . Очевидно, что матрица Сильвестра $S^{(n)}$ является элементом пространства $\mathfrak{M}^{(n)}$. Пусть

$$T^{(n)} = [t_{ki}^{(n)}] \in \mathfrak{M}^{(n)}$$

— произвольная матрица, и пусть

$$\rho^{(n)}(T^{(n)}) = \max_{1 \leq m \leq 2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \left| \sum_{k=1}^m t_{ki}^{(n)} \right|.$$

Легко видеть, что $\rho^{(n)}$ является нормой в пространстве $\mathfrak{M}^{(n)}$ и относительно этой нормы $\mathfrak{M}^{(n)}$ является банаховым пространством.

Автор выражает благодарность Н. Н. Вахания за внимание и помощь при подготовке данной работы.

Список литературы

1. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
2. Vakhania N., Kvaratskhelia V., Absolute and unconditional convergence in l_1 . *Bull. Georgian Acad. Sci.* (1999) **160**, №2, 201–203.
3. Vakhania N., Kvaratskhelia V., On a criterion for unconditional convergence of Hadamard series in the spaces l_p , $1 \leq p < \infty$. *Bull. Georgian Acad. Sci.* (2000) **162**, №2.
4. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.
5. Vakhania N., Kvaratskhelia V., Convergence of Sylvester series in Banach space l_p , $1 \leq p < \infty$. *Bull. Georgian Acad. Sci.* (2001) **163**, №3.

Статья поступила 10.10.2000.