Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Лозовану, Сетевые модели дискретного оптимального управления и динамические игры с p игроками, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 126–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:01:33

УДК 519.7

Сетевые модели дискретного оптимального управления и динамические игры с p игроками

© 2001 г. Д. Д. Лозовану

Рассматривается сетевая постановка задачи дискретного оптимального управления с закрепленными концами и формулируется ее игровой вариант с p игроками. Исследуется вопрос о существовании оптимальных стратегий игроков в смысле Нэша для сетевой динамической модели игры с p игроками и приводятся результаты, на базе которых предлагаются полиномиальные алгоритмы решения поставленных задач.

1. Введение

В работе рассматривается задача дискретного оптимального управления с закрепленными концами, когда динамика системы описывается с помощью ориентированного графа переходов ее состояний [1–3]. Вершины графа в этой задаче соответствуют состояниям управляемой системы, а дуги указывают на возможные ее переходы из одного состояния в другое. Дугам ориентированного графа поставлены в соответствие зависящие от времени функции, которые отражают стоимости переходов системы. Граф переходов, на дугах которого определены зависящие от времени функции стоимости дуг и в котором выделены две вершины, соответствующие начальному и конечному состояниям системы, назовем динамической сетью.

Основные результаты работы связаны с разработкой алгоритмов выбора оптимальной стратегии переходов системы из начального состояния в конечное состояние системы по дугам динамической сети. Формулируется игровой вариант этой задачи на динамической сети с p игроками и исследуется вопрос о существовании оптимальных в смысле Нэша стратегий сторон. Приводятся результаты, на базе которых предлагаются эффективные полиномиальные алгоритмы решения поставленных задач. Рассматриваемые в работе задачи обобщают известную из комбинаторной оптимизации задачу о кратчайшем пути во взвешенном ориентированном графе [4], некоторые классические задачи дискретного оптимального управления из [2] и задачи о выборе оптимальных путей в игровых сетях из [5–7].

2. Сетевая постановка задачи и метод динамического программирования

Пусть задана дискретная динамическая система L с конечным множеством состояний V , $|V| = n$, которая в каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ находится в состоянии $v(t) \in V$. В множестве V выделены два состояния v_0 , $v_0 = v(0)$, и v_f , которые назовем соответственно начальным и конечным состояниями системы. Будем считать, что динамика системы описывается с помощью ориентированного графа переходов

$$G = (V, E), \quad |E| = m,$$

дуга $e = (u, v)$ которого означает возможность перехода системы L из состояния $u = v(t)$ в состояние $v = v(t+1)$ для любого момента времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Каждой дуге $e = (u, v)$ соответствует функция $c_e(t)$, которая отражает стоимость перехода системы L из состояния $v(t) = u \in V$ в состояние $v(t+1) = v \in V$ в момент времени t .

Рассмотрим задачу поиска последовательности переходов

$$(v(0), v(1)), (v(1), v(2)), \dots, (v(T-1), v(T)) \in E,$$

которая за период времени $[0, T]$ переводит систему L из состояния $v_0 = v(0)$ в состояние $v_f = v(T)$ и сумма стоимостей переходов которой по траектории

$$v_0 = v(0), v(1), v(2), \dots, v(t) = v_f$$

является минимальной. Иными словами, рассмотрим задачу, в которой требуется найти

$$F_{v_0 v_f}(T) = \min_{\{v_0=v(0), v(1), v(2), \dots, v(T)=v_f\}} \sum_{t=0}^{T-1} c_{(v(t), v(t+1))}(t). \quad (1)$$

Заметим, что для $F_{v_0, v(t)}(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots, T$, справедливо рекуррентное соотношение

$$F_{v_0 v(t)}(t) = \min_{v(t-1) \in V_G^-(v(t))} \{F_{v_0 v(t-1)}(t-1) + c_{(v(t-1), v(t))}(t-1)\},$$

где

$$V_G^-(u) = \{v \in V \mid e = (v, u) \in E\}.$$

Поэтому, если добавить к этим соотношениям условие

$$F_{v_0, v(0)}(0) = 0,$$

то можно табулировать значения функции $F_{v_0, v(t)}(t)$ при $t = 0, 1, 2, \dots, T$ методом динамического программирования. Таким образом, если значения функций стоимости дуг $c_{(v(t), v(t+1))}(t)$ для любого момента времени t могут быть найдены непосредственно, то поставленную задачу, с заданным фиксированным T , можно решить за $O(n^2 T)$ элементарных операций, используя порядка $O(nT)$ ячеек памяти.

Нетрудно убедиться, что поставленная задача может быть решена и в случае, когда момент T не фиксирован, а возможные его значения принадлежат некоторому заданному отрезку времени $[T_1, T_2]$. Решение задачи в этом случае сводится к решению $T_2 - T_1 + 1$ задач с фиксированным T . Точнее, если $T \in [T_1, T_2]$, то последовательно фиксируя

$$T = T_1, \quad T = T_1 + 1, \quad T = T_1 + 2, \quad \dots, \quad T = T_2,$$

и каждый раз решая задачу с заданным T , мы сможем из всех полученных решений выбрать решение, для которого оптимальное значение функции цели является наименьшим.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда $T \in [0, n - 1]$ и оптимальная траектория переходов системы в G соответствует простому пути из v_0 в v_f . Одним из условий, гарантирующим выполнение такого свойства решения задачи, является положительность и неубываемость функций стоимости переходов динамической системы по дугам динамической сети. Итак, будем предполагать, что для рассматриваемой задачи нет ограничений на количество переходов системы и что оптимальная траектория в G соответствует простому пути из v_0 в v_f , ($T \leq n - 1$). В этом случае для нас полезно будет рассматривать задачу в терминах стратегий переходов системы на динамической сети. Стратегию переходов системы L на динамической сети с начальным состоянием v_0 и конечным состоянием v_f определим как отображение

$$s: v \rightarrow u \in V^+(v), \quad v \in V \setminus \{v_f\},$$

где

$$V^+(v) = \{u \in V \mid e = (v, u) \in E\}.$$

Для произвольной стратегии s множество дуг вида $(v, s(v))$ порождает в G подграф $G_s = (V, E_s)$, который обладает таким свойством, что либо в G_s существует единственный ориентированный путь $P_s(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f , либо такого пути в нем нет. В последнем случае при движении в G_s по исходящим дугам из v_0 мы однозначно попадем на некоторый ориентированный цикл C_s . Если в G_s существует ориентированный путь $P_s(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f , то двигаясь по дугам этого пути из v_0 в v_f , мы сможем пронумеровать дуги числами $0, 1, 2, \dots, k_s$. Эти числа характеризуют моменты времени $t_e(s)$ перехода системы из одного состояния в другое при использовании стратегии s .

Для заданной стратегии

$$s: v \rightarrow u \in V^+(v), \quad v \in V \setminus \{v_f\},$$

определим величину

$$F_{v_0 v_f}(s) = \sum_{e \in E(P_s(v_0, v_f))} c_e(t(s)),$$

если в G_s существует путь $P_s(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f . Если в G_s такого пути нет, то полагаем $F_{v_0 v_f}(s) = \infty$.

Таким образом, задачу дискретного оптимального управления на динамической сети можно рассматривать как задачу отыскания стратегии s^* , для которой

$$F_{v_0 v_f}(s^*) = \min_{s \in S} F_{v_0 v_f}(s),$$

где S — множество допустимых стратегий, определяемое структурой графа G .

3. Сетевая динамическая модель игры с p игроками и задача выбора оптимальных стратегий игроков в смысле Нэша

Пусть задана динамическая система L с конечным множеством состояний V , $|V| = n$, которая в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ находится в состоянии $v(t) \in V$. Так же,

как и в разделе 2, будем предполагать, что динамика системы описывается ориентированным графом переходов $G = (V, E)$, в котором выделены вершины v_0 и v_f , соответствующие начальным и конечным состояниям системы L .

Будем считать, что множество V разбито на p непересекающихся подмножеств

$$V_1, V_2, \dots, V_p, \quad V = \bigcup_{i=1}^p V_i, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

и вершины $v \in V_i$ будем рассматривать как позиции игрока i , $i = 1, \dots, p$. Кроме того, предположим, что каждой дуге $e = (u, v) \in E$ поставлено в соответствие p функций

$$c_e^1(t), c_e^2(t), \dots, c_e^p(t),$$

где $c_e^i(t)$ представляет собой стоимость перехода системы L из состояния $u = u(t)$ в состояние $v = v(t+1)$ на отрезке времени $[t, t+1]$ для игрока i , $i = 1, 2, \dots, p$.

Определим стратегии игроков $1, 2, \dots, p$ как отображения $s_1, s_2, \dots, s_p$ на подмножествах $V_1, V_2, \dots, V_p$, соответственно,

$$\begin{aligned} s_1: v &\rightarrow u \in V_G(v), \quad v \in V_1 \setminus \{v_f\}, \\ s_2: v &\rightarrow u \in V_G(v), \quad v \in V_2 \setminus \{v_f\}, \\ &\dots \\ s_p: v &\rightarrow u \in V_G(v), \quad v \in V_p \setminus \{v_f\}, \end{aligned}$$

где $V_G(v)$ является множеством концов всех дуг, исходящих из v , то есть

$$V_G(v) = \{u \in V \mid e = (v, u) \in E\}.$$

Для заданного набора стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ обозначим через $H_s = (V, E_s)$ подграф, порожденный множеством дуг вида

$$e = (v, s_i(v)), \quad v \in V \setminus \{v_f\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Очевидно, что для фиксированных стратегий $s_1, s_2, \dots, s_p$ либо в H_s существует единственный ориентированный путь $P_s(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f , либо такого пути в нем нет. В последнем случае, если мы двигаемся по исходящим дугам из v_0 , то однозначным образом попадем на некоторый ориентированный цикл C_s .

Для заданного набора стратегий игроков $s_1, s_2, \dots, s_p$ и заданными начальным и конечным состояниями v_0 и v_f определим величины

$$F_{v_0 v_f}^1(s_1, s_2, \dots, s_p), F_{v_0 v_f}^2(s_1, s_2, \dots, s_p), \dots, F_{v_0 v_f}^p(s_1, s_2, \dots, s_p)$$

следующим образом. Пусть в подграфе H_s существует путь $P_s(v_0, v_f)$ с множеством дуг $E(P_s(v_0, v_f))$, тогда этот путь является единственным и мы сможем пронумеровать дуги числами $0, 1, 2, \dots, k_s$ по мере движения из начальной вершины v_0 в конечную вершину v_f . Эти числа характеризуют моменты времени $t_e(s_1, s_2, \dots, s_p)$ перехода системы L по дугам $e \in E(P_s(v_0, v_f))$ из одного состояния в другое, если игроки зафиксировали свои стратегии $s_1, s_2, \dots, s_p$ переходов по дугам динамической сети. В этом случае мы полагаем

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1, s_2, \dots, s_p) = \sum_{e \in E(P_s(v_0, v_f))} c_e^i(t_e(s_1, s_2, \dots, s_p)), \quad i = 1, \dots, p.$$

Если в H_s не существует ориентированного пути $P_s(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f , то полагаем

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1, s_2, \dots, s_p) = \infty.$$

Рассмотрим задачу поиска стратегий $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$, для которых

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, s_p^*) \leq F_{v_0 v_f}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, s_p^*) \quad (2)$$

для всех

$$s_i \in S_i, \quad S_i = \{s_i: v \rightarrow u \in V_G(v), v \in V_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Таким образом, мы сформулировали задачу нахождения оптимальных стратегий в смысле Нэша [8, 9] для игры в нормальной форме, определенной множествами стратегий $S_1, S_2, \dots, S_p$ игроков $1, 2, \dots, p$ и платежными функциями

$$F_{v_0 v_f}^1(s_1, s_2, \dots, s_p), F_{v_0 v_f}^2(s_1, s_2, \dots, s_p), \dots, F_{v_0 v_f}^p(s_1, s_2, \dots, s_p).$$

В позиционной форме эта игра определяется графом G , разбиением $V_1, V_2, \dots, V_p$, векторами функций

$$c^i(t) = (c_{e_1}^i(t), c_{e_2}^i(t), \dots, c_{e_m}^i(t)), \quad i = 1, \dots, p,$$

начальной и конечной позициями v_0, v_f . Назовем эту игру c -игрой p игроков на динамической игровой сети

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1(t), c^2(t), \dots, c^p(t), v_0, v_f).$$

Если $V = V_1$, то мы получаем задачу дискретного оптимального управления с фиксированными концами [2, 10]. В случае, когда функции $c_e^i(t)$, $e \in E$, $i = 1, \dots, p$, являются постоянными и $V = V_1$, задача превращается в задачу о кратчайшем пути во взвешенном ориентированном графе [4]. Если же $V = V_1 \cup V_2$ и $c^2 = -c^1$, то при постоянных функциях стоимости дуг мы получаем задачу о минимаксном пути из [4, 6]. Случай, когда

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$$

и все функции $c_e^i(t)$, $e \in E$, $i = 1, \dots, p$, являются постоянными, исследовался в [11]. Общая модель с произвольными $c_e^i(t)$ рассматривалась в [10].

Сформулированная модель может быть интерпретирована как динамическая игра p игроков с интегральным по времени платежом для каждого из игроков, где v_0 и v_f представляют собой соответственно начальную и конечную позицию игры, а $V_1, V_2, \dots, V_p$ — соответствующие множества позиций игроков. Если система L имеет начальное состояние $v_0 = v(0)$ и $v_0 \in V_i$, то в момент времени $t = 0$ выбор перехода из состояния $v_0 = v(0)$ принадлежит игроку i . В общем случае, в момент времени t ход осуществляет игрок i , если система L находится в позиции $v(t) = v \in V_i$. Переход из состояния $v = v(t)$ (позиции v) в состояние $u = u(t+1)$ осуществляется по дугам $(v, u) \in E$ и называется ходом игрока i . Игра может быть конечной или бесконечной. Если состояние v_f достигается в момент времени t , ($v_f = v(t)$), то игра заканчивается, то есть игра является конечной. Если же состояние v_f не достигается за конечное время, то игра является бесконечной. Каждый игрок, осуществляя свои ходы в этой игре, старается минимизировать суммарные стоимости переходов по траектории.

4. Условие регулярности для динамических сетей и алгоритм решения задачи в случае $p = 1$

Сформулированная в разделе 3 модель в случае $p = 1$ превращается в обычную задачу дискретного оптимального управления на сети G с заданными функциями стоимости переходов $c_e(t)$, $e \in E$, начальным состоянием v_0 и конечным состоянием v_f . Если функции $c_e(t)$, $e \in E$, являются положительными и неубывающими, то оптимальная траектория переходов системы из v_0 в v_f порождает в G путь $P^*(v_0, v_f)$, который содержит не более $n - 1$ дуг. Поэтому, если в G вершина v_f достижима из v_0 , то оптимальный путь $P^*(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f может быть найден методом динамического программирования так, как указано в разделе 2. Ниже покажем, что для поиска оптимальных путей в динамической сети может быть использован более эффективный алгоритм, если динамическая сеть удовлетворяет следующему условию. Пусть в G произвольный оптимальный путь $P^*(v_0, v)$ из v_0 в v , $v \in V$, обладает тем свойством, что если он представим в виде

$$P^*(v_0, v) = P_1^*(v_0, w) \cup P_2^*(w, v)$$

где $(P_1^*(v_0, w)$ и $P_2^*(w, v)$ не имеют общих дуг, то лидирующая часть $P_1^*(v_0, w)$ представляет собой оптимальный путь из v_0 в w . Если это условие выполняется в G , то будем говорить, что динамическая сеть удовлетворяет условию регулярности.

Пусть динамическая сеть G удовлетворяет условию регулярности, тогда следующий алгоритм находит оптимальные пути $P^*(v_0, v)$ из v_0 до $v \in V$.

Шаг 0. Полагаем $U = \{v_0\}$, $E^* = \emptyset$. Каждой вершине $v \in V$ ставим в соответствие величины $F(v)$ и $t(v)$, где

$$\begin{aligned} F(v_0) &= 0, & F(v) &= \infty, & v &\in V \setminus \{v_0\}, \\ t(v_0) &= 0, & t(v) &= \infty, & v &\in V \setminus \{v_0\}. \end{aligned}$$

Шаг k . Находим множество

$$\begin{aligned} E' &= \{(u', v') \in E(U) \mid F(u') + c_{(u', v')}(t(u')) \\ &= \min_{u \in U} \min_{v \in \bar{V}(u)} \{F(u) + c_{(u, v)}(t(u))\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(U) &= \{(u, v) \in E \mid u \in U, v \in V \setminus U\}, \\ \bar{V}(u) &= \{v \in V \setminus U \mid (u, v) \in E(U)\}. \end{aligned}$$

Выделяем множество вершин

$$V' = \{v' \in V \setminus U \mid (u', v') \in E'\}.$$

Для каждого $v' \in V'$ выбираем одну дугу $(u', v') \in E'$ и находим объединение $\bar{E}'$ таких дуг. После этого меняем величины $F(v')$ и $t(v')$ для каждой вершины $v' \in V'$ следующим образом:

$$F(v') = F(u') + c_{(u', v')}(t(u')), \quad t(v') = t(u') + 1, \quad (u', v') \in \bar{E}'.$$

Заменяем множество U на $U \cup V'$ и E^* на $E^* \cup \bar{E}'$. Полагаем $V^k = U$, $E^k = E^*$. Если $V^k \neq V$, то фиксируем дерево $H^k = (V^k, E^k)$, затем переходим к шагу $k+1$, в противном случае фиксируем дерево $H^* = (V, E^*)$ и заканчиваем работу.

Замечание 1. В G дерево $H^* = (V, E^*)$ представляет собой дерево оптимальных путей от вершины v_0 до каждой вершины $v \in V$, а дерево $H^k = (V^k, E^k)$ представляет собой часть дерева H^* , полученную после k итераций алгоритма. Если в G необходимо найти оптимальный путь от вершины v_0 до вершины v_f , то алгоритм может прекратить свою работу после k -й итерации, как только будет выполнено условие $v_f \in V^k$. Иными словами, в этом случае условие $V^k \neq V$ в алгоритме может быть заменено условием $v_f \notin V^k$. Величины $F(v)$, $v \in V$, после работы алгоритма равны суммарной стоимости дуг оптимальных путей от v_0 до $v \in V$, а $t(v)$ равно числу дуг этих путей.

Теорема 1. Пусть в G функции $c_e(t)$, $e \in E$, положительны. Если динамическая сеть удовлетворяет условию регулярности, то дерево $H^k = (V^k, E^k)$, полученное после k итераций алгоритма, представляет собой дерево оптимальных путей от вершины v_0 до вершины $v \in V^k$ для динамической сети.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по числу итераций алгоритма. Очевидно, что если $k = 1$, то теорема справедлива.

Предположим, что теорема справедлива для $k \leq r$. Покажем, что утверждение теоремы справедливо для $k = r + 1$. Если $H^r = (V^r, E^r)$ — дерево, полученное после r шагов алгоритма, а $H^{r+1} = (V^{r+1}, E^{r+1})$ — дерево, полученное после $r + 1$ шага алгоритма, то $V^o = V^{r+1} \setminus V^r$ и $E^o = E^{r+1} \setminus E^r$ представляют собой множество вершин и множество дуг, полученных непосредственно на $r + 1$ шаге алгоритма. Покажем, что если v' — произвольная вершина из V^o для H^{r+1} , то единственный в H^{r+1} путь $P_{H^{r+1}}^*(v_0, v')$ из v_0 в v' является оптимальным в динамической сети $(G, c(t), v_0, v_f)$. Действительно, если это не так, то существует оптимальный путь $Q(v_0, v')$ из v_0 в v' , который не содержит дугу $e = (w', v') \in E^o$. Путь $Q(v_0, v')$ может быть представлен в виде

$$Q(v_0, v') = Q^1(v_0, u') \cup \{(u', v)\} \cup Q^2(v, v'),$$

где u' является последней вершиной, принадлежащей множеству V^r при движении от v_0 к v' по дугам $Q(v_0, v')$. Покажем, что

$$\text{cost}(Q(v_0, v')) > \text{cost}(P^*(v_0, v')),$$

где

$$\text{cost}(Q(v_0, v')) = \sum_{t=0}^{m_Q} c_{e_t}(t),$$

$e_0, e_1, \dots, e_{m_Q}$ представляют собой дуги пути $Q(v_0, v')$, когда движение осуществляется от v_0 к v' ,

$$\text{cost}(P^*(v_0, v')) = \sum_{t=0}^{m_p} c_{e'_t}(t),$$

$e'_0, e'_1, \dots, e'_{m_p}$ представляют собой дуги пути $P^*(v_0, v')$, когда движение осуществляется от v_0 к v' .

Поскольку условие регулярности на динамической сети $(G, c(t), v_0, v_f)$ выполняется, согласно предположению индукции

$$F(u') = \text{cost}(Q(v_0, u')).$$

Кроме того, согласно описанию алгоритма

$$F(u') + c_{(u',v')}(t(u')) > F(w') + c_{(w',v')}(t(w')) = F(v'),$$

где $e' = (w', v')$ — последняя дуга пути $P^*(v_0, v')$. Тогда

$$\text{cost}(Q^1(v_0, u') \cup \{(u', v)\}) > \text{cost}(P^*(v_0, v')),$$

поскольку

$$F(u') + c_{(u',v')}(t(u')) = \text{cost}(Q^1(v_0, u') \cup \{(u', v)\})$$

и $F(v') = \text{cost}(P^*(v_0, v'))$.

Функции $c_e(t)$, $e \in E$, являются положительными, поэтому

$$\begin{aligned} \text{cost}(Q(v_0, v')) &= \text{cost}(Q^1(v_0, u') \cup \{(u', v)\} \cup Q^2(v, v')) \\ &\geq \text{cost}(Q^1(v_0, v') \cup \{(u', v)\}) > \text{cost}(P^*(v_0, v')). \end{aligned}$$

Это противоречит предположению, что путь $(Q(v_0, v'))$ не является оптимальным. Следовательно, дерево $H^{r+1} = (V^{r+1}, E^{r+1})$ находит оптимальные пути $P^*(v_0, v)$ из v_0 в v для всех $v \in V^{r+1}$. Теорема доказана.

Предложенный алгоритм нахождения оптимальных путей в динамической сети является расширением алгоритма Дейкстры [4]. Далее мы покажем, что подобный алгоритм может быть использован для нахождения оптимальных путей в динамических сетях с p игроками, если условие регулярности в динамической сети удовлетворяется по отношению к каждому игроку i , $i = 1, \dots, p$. Условие регулярности для динамической сети с p игроками

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1(t), c^2(t), \dots, c^p(t), v_0, v_f)$$

по отношению к игроку i мы определим следующим образом.

Пусть

$$s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_p$$

— некоторый набор стратегий для игроков $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, p$. Обозначим через $G_{S \setminus s_i} = (V, E_{S \setminus s_i})$ подграф графа G , где

$$E_{S \setminus s_i} = E_{s_1} \cup E_{s_2} \cup \dots \cup E_{s_{i-1}} \cup E^i \cup E_{s_{i+1}} \cup \dots \cup E_p,$$

$$E^i = \{(u, v) \in E \mid u \in V_i\},$$

$$E_{s_k} = \{(u, v) \in E \mid u \in V_k, v = s_k(u)\}, \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq i.$$

На $G_{S \setminus s_i}$ рассмотрим задачу дискретного оптимального управления с заданными функциями стоимости переходов $c_e^i(t)$ для $e \in E_{S \setminus s_i}$, начальным состоянием v_0 и конечным состоянием v . Если для любого набора стратегий $s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_p$ функции стоимости $c_e^i(t)$ в $G_{S \setminus s_i}$ обладают свойством, что любой оптимальный путь $P^*(v_0, w)$, который представим в виде

$$P^*(v_0, w) = P_1^*(v_0, w) \cup P_2^*(w, v),$$

где $P_1^*(v_0, w)$ и $P_2^*(w, v)$ не имеют общих дуг, лидирующая его часть $P_1^*(v_0, w)$ представляет собой оптимальный путь из v_0 в w , то будем говорить, что для динамической сети

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1(t), c^2(t), \dots, c^p(t), v_0, v_f)$$

с p игроками выполняется условие регулярности относительно игрока i .

Нетрудно убедиться, что если функции

$$c_e^i(t), \quad i = 1, \dots, p, \quad e \in E,$$

являются постоянными положительными функциями, то условие регулярности для динамической сети с p игроками выполняется относительно каждого игрока i , $i = 1, \dots, p$. Легко также проверить, что условие регулярности соблюдается относительно каждого игрока для динамической сети, если

$$c_e^i(t) = f^i(t), \quad i = 1, \dots, p, \quad e \in E, \quad (3)$$

где $f^1(t), f^2(t), \dots, f^p(t)$ — произвольный набор положительных и неубывающих функций. Если динамическая сеть имеет структуру графа без ориентированных циклов, то $f^1(t), f^2(t), \dots, f^p(t)$ в (3) могут быть произвольными неубывающими функциями. Если же G имеет структуру k -дольного графа без ориентированных циклов, то функции стоимости переходов могут быть произвольными положительными функциями.

Нетрудно проверить, что число элементарных операций, необходимых для реализации алгоритма, предложенного в данном разделе, есть $O(n^2)$ (без учета вычислений значений функции $c_e(t)$ при заданном t), а число используемых ячеек памяти есть $O(m)$. Заметим также, что проверка выполнения условия регулярности произвольной динамической сети может быть осуществлена за $O(n^3)$ операций следующим образом: находим дерево $H^* = (V, E^*)$ согласно предложенному алгоритму и определяем значения $F(v)$ и $t(v)$ для каждой вершины $v \in V$, затем в найденном дереве H^* проверяем с помощью метода динамического программирования, соответствует ли путь $P_{H^*}(v_0, v)$ от v_0 до v в дереве H^* оптимальной траектории с $T = t(v)$.

5. Основные результаты

Основные результаты работы связаны с рассмотрением вопроса существования оптимальных по Нэшу стратегий игроков в динамической s -игре и исследованием свойств решений задачи.

Теорема 2. Пусть

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1, c^2, \dots, c^p, v_0, v_f)$$

— динамическая сеть с p игроками, для которой в G вершина v_f достижима из вершины v_0 и вектор-функция

$$c^i(t) = (c_{e_1}^i(t), c_{e_2}^i(t), \dots, c_{e_m}^i(t))$$

содержит положительные и неубывающие компоненты. Кроме того, пусть условие регулярности в динамической сети выполняется по отношению к каждому игроку. Тогда в динамической s -игре на сети

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1, c^2, \dots, c^p, v_0, v_f)$$

существуют оптимальные по Нэшу стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ игроков $1, 2, \dots, p$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по числу игроков p в динамической c -игре. Задача нахождения оптимальной стратегии в случае $p = 1$ превращается в обычную задачу дискретного оптимального управления на G . Как было показано в разделе 1, оптимальный путь $P^*(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f при положительных и неубывающих функциях стоимости переходов по дугам сети содержит не более $n - 1$ дуг. Поэтому этот путь может быть найден за конечное число шагов с помощью метода динамического программирования. Если оптимальный путь $P^*(v_0, v_f)$ найден, то оптимальная стратегия s_1^* может быть найдена следующим образом:

$$s_1^*(u) = \begin{cases} v, & v \in V_G(u), v \text{ произвольна, если } u \notin P^*(v_0, v_f), \\ v, & v \in V_G(u), v \text{ произвольна, если } u = v_f, \\ v, & (u, v) \in E(P^*(u, v)), \text{ если } u \in P^*(u, v_f), u \neq v_f. \end{cases}$$

Таким образом, при $p = 1$ существует оптимальная стратегия s_1^* .

Предположим, что теорема верна для любого $p \leq k$, $k \geq 1$, и покажем, что тогда она справедлива и для $p = k + 1$. Пусть имеется динамическая сеть с $p = k + 1$ игроками. Будем рассматривать задачу нахождения оптимальных стратегий игроков в смысле Нэша для игроков $2, 3, \dots, p$, фиксируя возможные допустимые стратегии $s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^q$ для первого игрока. Заметим, что если первый игрок фиксирует свою первую стратегию $s_1 = s_1^1$ и если мы рассмотрим задачу нахождения оптимальных стратегий по Нэшу для остальных игроков $2, 3, \dots, p$, то в позиционной форме полученная игра будет представлять собой динамическую c -игру с $p - 1$ игроками, поскольку позиции первого игрока могут считаться позициями любого другого игрока; для определенности эти позиции будем считать позициями второго игрока.

Таким образом, при $s_1 = s_1^1$ мы получаем новую динамическую c -игру с $p - 1$ игроками на динамической сети

$$(G^1, V_2^1, V_3, \dots, V_p, c^{12}, c^{13}, \dots, c^{1p}, v_0, v_f),$$

где $V_2^1 = V_1 \cup V_2$, а $G^1 = (V, E^1)$ является графом, полученным из G удалением дуг $e = (u, v) \in E$, для которых $u \in V_1$ и $v \neq s_1^1(u)$. При этом $c^{1i}(t)$ являются вектор-функциями стоимостей дуг, полученными в результате сужения множества E на E^1 , то есть

$$c^{1i}(t) = (c_{e_1}^i(t), c_{e_2}^i(t), \dots, c_{e_{m_1}}^i(t)), \quad e_i \in E^1, \quad m_1 = |E^1|, \quad i = 2, \dots, p.$$

Если мы рассмотрим игру с $p - 1$ игроками в нормальной форме, то она определяется $p - 1$ платежными функциями

$$F_{v_0 v_f}^2(s_1^1, s_2, s_3, \dots, s_p), \quad F_{v_0 v_f}^3(s_1^1, s_2, s_3, \dots, s_p), \dots, \quad F_{v_0 v_f}^p(s_1^1, s_2, s_3, \dots, s_p),$$

где

$$s_2 \in S_2, s_3 \in S_3, \dots, s_p \in S_p.$$

Если в G^1 вершина v_f не является достижимой из v_0 , то

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1^1, s_2, s_3, \dots, s_p) = \infty, \quad (s_2, s_3, \dots, s_p) \in S_2 \times S_3 \times \dots \times S_p, \quad i = 2, \dots, p.$$

Если в G^1 вершина v_f достижима из v_0 , то согласно предположению индукции для динамической c -игры с $p - 1$ игроками существуют оптимальные стратегии игроков $s_2^{1*}, s_3^{1*}, \dots, s_p^{1*}$.

Аналогичным образом мы можем рассмотреть случай, когда первый игрок фиксирует свою вторую стратегию $s_1 = s_1^2$. Если в полученном графе G^2 вершина v_f не является достижимой из v_0 , то

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1^2, s_2, s_3, \dots, s_p) = \infty, \quad (s_2, s_3, \dots, s_p) \in S_2 \times S_3 \times \dots \times S_p, \quad i = 1, \dots, p.$$

Если же в G^2 вершина v_f достижима из v_0 , то для полученной динамической с-игры с $p-1$ игроками на G^2 существуют оптимальные стратегии игроков $s_2^{2*}, s_3^{2*}, \dots, s_p^{2*}$.

Далее рассмотрим случай, когда первый игрок фиксирует свою третью стратегию s_1^3 , тем самым найдем оптимальные стратегии $s_2^{3*}, s_3^{3*}, \dots, s_p^{3*}$ для игроков $2, \dots, p$. Продолжая процесс, мы находим множество стратегий игроков $1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} & (s_1^1, s_2^1, s_3^1, \dots, s_p^1), \\ & (s_1^2, s_2^2, s_3^2, \dots, s_p^2), \\ & \dots \\ & (s_1^q, s_2^q, s_3^q, \dots, s_p^q). \end{aligned}$$

Среди множества этих стратегий мы выбираем множество стратегий

$$(s_1^{j*}, s_2^{j*}, s_3^{j*}, \dots, s_p^{j*}),$$

для которых

$$F_{v_0 v_f}^1(s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}) = \min_{1 \leq i \leq q} F_{v_0 v_f}^1(s_1^i, s_2^i, \dots, s_p^i). \quad (4)$$

Тогда

$$F_{v_0 v_f}^i(s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_{i-1}^{j*}, s_i^{j*}, s_{i+1}^{j*}, \dots, s_p^{j*}) \leq F_{v_0 v_f}^i(s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_{i-1}^{j*}, s_i, s_{i+1}^{j*}, \dots, s_p^{j*}),$$

для всех $s_i \in S_i$, $2 \leq i \leq p$.

Покажем, что если условие регулярности на динамической игровой сети выполняется, то

$$F_{v_0 v_f}^1(s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}) \leq F_{v_0 v_f}^1(s_1, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}),$$

для всех $s_1 \in S_1$, $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^q\}$.

Обозначим через $G_{s^*}^{\circ} = (V, E_{s^*}^{\circ})$ подграф графа G , где

$$E_{s^*}^{\circ} = E^1 \cup E_{s^*}^2 \cup E_{s^*}^3 \cup \dots \cup E_{s^*}^p,$$

$$E^1 = \{(u, v) \in E \mid u \in V_1\},$$

$$E_{s^*}^i = \{(u, v) \in E \mid u \in V_i, \quad v = s_i^{j*}(v)\}.$$

На $G_{s^*}^{\circ}$ рассмотрим задачу дискретного оптимального управления с функциями стоимости на дугах $c_e^1(t)$ для всех $e \in E_{s^*}^{\circ}$. Для нахождения оптимального пути $P_1^*(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f , соответствующего оптимальной траектории задачи, мы сможем использовать предложенный в разделе 4 алгоритм, поскольку условие регулярности по отношению к первому игроку выполняется на динамической игровой сети. Этот алгоритм, как легко заметить, находит путь из v_0 в v_f , порожденный стратегиями $s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}$, поскольку $s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}$ были выбраны согласно (4). Таким образом,

$$F_{v_0 v_f}^1(s_1^{j*}, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*}) \leq F_{v_0 v_f}^1(s_1, s_2^{j*}, \dots, s_p^{j*})$$

для всех $s_1 \in S_1$. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 2 справедлива и в случае, когда условие регулярности на динамической сети выполняется для всех игроков за исключением лишь одного из них. Это имеет место, поскольку в доказательстве теоремы условие регулярности было использовано только на общем шаге метода математической индукции.

Замечание 3. Если G не содержит ориентированных циклов, то в теореме 2 условия, что функции $c_e^i(t)$, $i = 1, \dots, p$, $e \in E$, являются неубывающими, могут быть отброшены, то есть теорема 2 имеет место для произвольных положительных функций стоимости дуг динамической сети, в которой условие регулярности выполняется.

Заметим также, что если функции стоимости дуг $c_e^i(t)$ для всех $e \in E$, $i = 1, \dots, p$, являются положительными постоянными функциями, то оптимальные стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ игроков $1, 2, \dots, p$ в динамической c -игре не зависят от начального состояния v_0 (см. [11]). В общем случае, если $c_e^i(t)$, для всех $e \in E$, $i = 1, \dots, p$, зависят от времени, то оптимальные стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ зависят от состояния v_0 .

Теорема 3. Пусть динамическая игровая сеть

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1, c^2, \dots, c^p, v_0, v_f)$$

обладает тем свойством, что в G любая вершина $v \in V$ является достижимой из вершины v_0 и вектор-функции

$$c^i(t) = (c_{e_1}^i(t), c_{e_2}^i(t), \dots, c_{e_m}^i(t)), \quad i = 1, \dots, p,$$

содержат положительные и неубывающие компоненты. Кроме того, пусть условие регулярности для динамической игровой сети выполняется относительно каждого игрока. Тогда в G существует дерево $H^* = (V, E^*)$, в котором каждая вершина $v \in V$ достижима из v_0 и единственный в H ориентированный путь $P_{H^*}(v_0, v_f)$ из v_0 в v_f определяет оптимальные стратегии игроков $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ в динамической игровой сети

$$(G, V_1, V_2, \dots, V_p, c^1, c^2, \dots, c^p, v_0, v_f),$$

где для $i = 1, \dots, p$

$$s_i^*(u) = \begin{cases} v, & v \in V_G(u), \text{ } v \text{ произвольна, если } u \notin P_{H^*}(v_0, v_f), \text{ } u \in V_i, \\ v, & v \in V_G(u), \text{ } v \text{ произвольна, если } u = v_f, \text{ } u \in V_i, \\ v, & (u, v) \in P_{H^*}(v_0, v_f), \text{ если } u \in P_{H^*}(v_0, v_f), \text{ } u \neq v_f, \text{ } u \in V_i. \end{cases}$$

Для произвольной вершины $w \in V \setminus \{v_0\}$ в дереве H^* путь $P_{H^*}(v_0, w)$ из v_0 в w определяет оптимальные стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ в динамической c -игре с начальной позицией игры v_0 и конечной позицией игры w , где для $i = 1, \dots, p$

$$s_i^*(u) = \begin{cases} v, & v \in V_G(u), \text{ } v \text{ произвольна, если } u \notin P_{H^*}(v_0, w), \text{ } u \in V_i, \\ v, & v \in V_G(u), \text{ } v \text{ произвольна, если } u = w, \text{ } u \in V_i, \\ v, & (u, v) \in P_{H^*}(v_0, w), \text{ если } u \in P_{H^*}(v_0, w), \text{ } u \neq w, \text{ } u \in V_i. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ являются оптимальными стратегиями игроков в динамической s -игре с динамической игровой сетью, удовлетворяющей условиям теоремы 3. Пусть $P_{H^*}(v_0, v_f)$ — ориентированный путь из v_0 в v_f в подграфе $H_{s^*} = (V, E_{s^*})$ графа G , порожденного дугами

$$(v, s_i^*(v)), \quad v \in V_i \setminus \{v_f\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Тогда для любой вершины $w \in E(P_{s^*}(v_0, v_f))$ стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ являются оптимальными стратегиями игроков в динамической s -игре с начальной позицией игры v_0 и конечной позицией игрока w , то есть единственный в орграфе H_{s^*} ориентированный путь $P_{s^*}'(v_0, w)$ из v_0 в w представляет собой часть пути $P_{s^*}(v_0, v_f)$ и также является оптимальным.

Доказательство. Поскольку стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ являются оптимальными для игроков $1, 2, \dots, p$ в динамической s -игре, условие (2) имеет место. Это условие означает, что при заданных

$$s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_p^*$$

путь $P_{s^*}'(v_0, w)$ является оптимальным для задачи дискретного оптимального управления (по отношению к игроку i) на графе $G^0 = (V, E^0)$, порожденном дугами

$$(v, s_j^*(v)), \quad v \in V \setminus V_i, \quad j = 1, \dots, p, \quad j \neq i,$$

и дугами

$$(u, v) \in E^i, \quad E^i = \{(u, v) \in E \mid u \in V_i\}.$$

Условие регулярности по отношению к игроку i выполняется на $G_{s^*}^0$, поэтому для всех $s_i, i = 1, \dots, p$,

$$F_{v_0 w}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_p^*) \leq F_{v_0 w}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_p^*).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Поскольку $c_e^i(t)$, для всех $e \in E, i = 1, \dots, p$, являются положительными и неубывающими функциями и условие регулярности для динамической игровой сети выполняется по отношению к каждому игроку, на основании теоремы 2 для произвольной вершины $v \in V$ существует оптимальный путь $P_{s^*}(v_0, v)$ из v_0 в v , который соответствует оптимальным стратегиям $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ игроков для динамической s -игры с начальной позицией v_0 и конечной позицией v . Выбираем вершины $v \in V$, для которых оптимальные пути $P_{s^*}(v_0, v)$ содержат не более одной дуги. Очевидно, что граф

$$T^1 = (U^1, E^1),$$

порожденный дугами таких путей имеет структуру ориентированного дерева с корнем v_0 . Если $U^1 = V$, то теорема доказана. Если же $U^1 \neq V$, то в $V \setminus V^1$ существуют вершины $v \in V \setminus V^1$, для которых оптимальные пути $P_{s^*}(v_0, v)$ содержат две дуги. Согласно лемме 1 лидирующая часть $P_{s^*}^1(v_0, u)$ этих путей также является оптимальным путем из v_0 в u , и следовательно, все пути $P_{s^*}(v_0, v)$ с двумя дугами содержат дуги из T^1 . таким образом, если к T^1 добавим последние дуги оптимальных путей $P_{s^*}(v_0, v)$, то мы получим новое дерево

$$T^2 = (U^2, E^2)$$

с корнем v_0 . В этом дереве произвольный путь $P_{T^2}(v_0, v)$ из v_0 в $v \in U_2$ является оптимальным. Если $U^2 = V$, то теорема доказана. Если $U^2 \neq V$, то находим вершины $V \setminus U^2$, для которых оптимальные пути $P_{s^*}(v_0, v)$ из v_0 в v содержат три дуги. Присоединив концевые дуги и вершины v этих путей к дереву T^2 , получим дерево

$$T^3 = (U^3, E^3)$$

с корневой вершиной v_0 . В этом дереве любой путь $P_{T^3}(v_0, v)$ из v_0 в $v \in V^3$ является оптимальным. Если же $U^3 = V$, то теорема доказана, если нет, то находим дерево

$$T^4 = (U^4, E^4),$$

и так далее. Через конечное число шагов мы найдем дерево

$$T^q = (U^q, E^q),$$

для которого $U^q = V$ и каждый единственный в T^q путь $P_{T^q}(v_0, v)$ из v_0 в v является оптимальным, то есть $T^q = T^*$. Теорема доказана.

Далее дерево $T^* = (V, E^*)$ назовем деревом оптимальных путей для динамической s -игры.

Теорема 4. Пусть динамическая игровая сеть обладает тем свойством, что в G любая вершина $v \in V$ является достижимой из v_0 и функции $c_e^i(t)$, $e \in E$, $i = 1, \dots, p$, являются положительными и неубывающими. Кроме того, пусть в динамической игровой сети выполняется условие регулярности по отношению к каждому игроку. Тогда существуют $p + 1$ положительных функции на V

$$F^1: V \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad F^2: V \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad \dots, \quad F^p: V \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad t: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

которые удовлетворяют условиям

- (1) $F^i(v_0) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad t(v_0) = 0,$
- (2) для любого подмножества V^0 множества V , $V^0 \subset V$, содержащего вершину v_0 , по крайней мере одно из следующих множеств $E^1, E^2, \dots, E^p$, не является пустым, где при $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} E^i &= \{(\bar{u}, \bar{v}) \in E(V^0) \mid F^i(\bar{u}) + c_{(\bar{u}, \bar{v})}^i(t(\bar{u})) \\ &= \min_{u \in V^0 \cap V_i} \min_{v \in V^0(u)} \{F^i(u) + c_{(u, v)}^i(t(u))\}\}, \end{aligned}$$

$$E(V^0) = \{(u, v) \in E \mid u \in V^0, v \in V \setminus V^0\},$$

$$V^0(u) = \{v \in V \setminus V^0 \mid (u, v) \in E(V^0)\},$$

- (3) существует вершина $v' \in V \setminus V^0$ и дуга $(u', v') \in E^0$, $E^0 = E^1 \cup \dots \cup E^p$, для которых

$$F^i(u') + c_{(u', v')}^i(t(u')) \leq F^i(u) + c_{(u, v')}^i(t(u))$$

для всех $(u, v') \in E^0$, $i = 1, \dots, p$, и

$$F^i(v') = F^i(u') + c_{(u', v')}^i(t(u')), \quad t(v') = t(u') + 1.$$

Для заданной вершины $v \in V$ значения $F^i(v)$, $i = 1, \dots, p$, равны соответствующим значениям платежных функций игроков при оптимальных стратегиях $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$, для динамической игры с начальной позицией v_0 и конечной позицией v , то есть

$$F^i(v) = F_{v_0, v}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*), \quad i = 1, \dots, p.$$

Дерево $T^* = (V, E^*)$ оптимальных путей для динамической s -игры в G находится следующим образом: в G выбираем подграф $G^\circ = (V, E^\circ)$, порожденный дугами, которые удовлетворяют условию (3), и в G° фиксируем произвольное дерево с корневой вершиной v_0 .

Доказательство. Согласно теореме 3 в G существует дерево оптимальных путей $H^* = (V, E^*)$ с корневой вершиной v_0 . Это дерево определяет оптимальную стратегию $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$, порожденную переходами по дугам дерева H^* . Покажем, что если для каждой вершины $v \in V$ определить величины

$$F^i(v) = F_{v_0, v}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*),$$

а $t(v)$ определить как число дуг пути $P_{H^*}(v_0, v)$ из v_0 в v , то условия (1), (2) и (3) выполняются. Докажем выполнение условия (3), поскольку выполнение условий (1) и (2) очевидно.

Пусть V° — произвольное подмножество из V , $V^\circ \subset V$, где $v_0 \in V^\circ$. Если множество V° в H^* порождает поддереву $H_1^* = (V^\circ, E_1^*)$ с корневой вершиной v_0 , то по крайней мере для одной дуги

$$(u', v') \in E^*, \quad u' \in V^\circ, \quad v' \in V \setminus V^\circ,$$

имеет место условие (3). Рассмотрим случай, когда V° не порождает в H^* поддерево с корнем в v_0 . Обозначим через $\bar{V}^\circ$ подмножество множества V° с наибольшим числом вершин, которое в H^* порождает дерево $\bar{H}^* = (\bar{V}^\circ, \bar{E}^*)$ с корнем $v_0 \in V$ (в частности, $\bar{H}^*$ может состоять только из вершины v_0). Тогда в $\bar{V}^\circ$ существует дуга $(u', v') \in E^*$, $u' \in \bar{V}^\circ$, $v' \in V \setminus \bar{V}^\circ$, для которой выполняется условие (3). Ясно, что $v' \notin V^\circ \setminus \bar{V}^\circ$ потому, что $\bar{V}^\circ$ является наибольшим множеством в V° , содержащим v_0 , которое в H^* порождает поддерево $\bar{H}^* = (\bar{V}^\circ, \bar{E}^*)$ с корневой вершиной v_0 . Таким образом, существуют функции $F^1, F^2, \dots, F^p$ и t на множестве V , которые удовлетворяют условиям (1), (2) и (3).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Предположим, что существуют функции $F^1, F^2, \dots, F^p$ и t на множестве V , которые обладают свойствами (1), (2) и (3). Покажем, что тогда в G величины $F^i(v)$, $i = 1, \dots, p$, равны значениями платежных функций

$$F_{v_0, v}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*), \quad i = 1, \dots, p,$$

при оптимальных стратегиях $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ для динамической s -игры с начальной позицией v_0 и конечной позицией v . Доказательство проведем индукцией по числу вершин для динамической игровой сети. В случае $n \leq 2$ утверждение имеет место. Предположим, что утверждение справедливо для $n = k + 1$. В G выбираем вершину v^* с наибольшим $t(v^*)$ и удаляем эту вершину из G . Полученный в результате этого граф обозначим через $G_1 = (V \setminus \{v^*\}, E_1)$. Ясно, что в G_1 каждая вершина $v \in V \setminus \{v^*\}$ достижима из v_0 . Легко также заметить, что для G_1 функции $F^1, F^2, \dots, F^p$ и t удовлетворяют условиям (1), (2) и (3), поскольку в противном случае эти функции не удовлетворяют нашим условиям в G . Согласно предположению

индукции, существует дерево оптимальных путей $T_1^* = (V \setminus \{v^*\}, E_1^*)$ по отношению к G_1 . При этом $F^1(v), F^2(v), \dots, F^p(v)$ представляют собой значения платежных функций игроков в динамической s -игре с начальной позицией v_0 и конечной позицией v , при оптимальных стратегиях $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$, то есть

$$F^i(v) = F_{v_0 v}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*)$$

для всех $v \in V \setminus \{v^*\}$, $i = 1, \dots, p$. Среди множества вершин $V \setminus \{v^*\}$ существует вершина u^* и дуга (u^*, v^*) , которые удовлетворяют условию

$$F_{v_0 v^*}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*) = F_{v_0 u^*}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*) + c_{(u^*, v^*)}^i(t(u^*)),$$

где $t(u^*)$ есть число дуг в пути $P_{H^*}(v_0, u^*)$ из v_0 в u^* . Таким образом,

$$F_{v_0 v^*}^i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*) = F^i(v^*).$$

Теорема доказана.

6. Алгоритм нахождения оптимальных стратегий в динамических s -играх

Пусть задана динамическая s -игра, в которой граф G обладает тем свойством, что любая вершина $v \in V$ достижима из v_0 . Кроме того, будем считать, что в динамической игровой сети выполняется условие регулярности по отношению к каждому игроку. Тогда следующий алгоритм, который основывается на теореме 4, находит дерево $H^* = (V, E^*)$ оптимальных путей в динамической игровой сети с p игроками с заданной начальной позицией v_0 и с заданными функциями стоимостей дуг $c_e^i(t)$, $e \in E$, $i = 1, \dots, p$. Если дерево H^* известно, то оптимальные стратегии $s_1^*, s_2^*, \dots, s_p^*$ игроков $1, 2, \dots, p$ могут быть найдены на основании леммы 1.

Шаг 0. Полагаем $V^* = \{v_0\}$, $E^* = \emptyset$. Каждой вершине $v \in V$ ставим в соответствие набор меток

$$F^1(v), F^2(v), \dots, F^p(v), t(v),$$

где

$$\begin{aligned} F^i(v_0) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ F^i(v) &= \infty, \quad \forall v \in V \setminus \{v_0\}, \quad i = 1, \dots, p, \\ t(v_0) &= 0, \\ t(v) &= \infty, \quad \forall v \in V \setminus \{v_0\}. \end{aligned}$$

Шаг k . Находим множества

$$\begin{aligned} E^i &= \{(\bar{u}, \bar{v}) \in E(V^*) \mid F^i(\bar{u}) + c_{(\bar{u}, \bar{v})}^i(t(\bar{u})) \\ &= \min_{u \in V^* \cap V_i} \min_{v \in \bar{V}(u)} \{F^i(u) + c_{(u, v)}^i(t(u))\}\}, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(V^*) &= \{(u, v) \in E \mid u \in V^*, v \in V \setminus V^*\}, \\ \bar{V}(u) &= \{v \in V \setminus V^* \mid (u, v) \in E(V^*)\}. \end{aligned}$$

Вводим обозначение

$$E^\circ = \bigcup_{i=1}^p E^i$$

и находим множество вершин

$$V^\circ = \{\bar{v} \in V \setminus V^* \mid (\bar{u}, \bar{v}) \in E^\circ\}.$$

Затем в V° выбираем подмножество V' , где $v' \in V'$, если в E° существует дуга (u', v') , для которой выполняется условие

$$F^i(u') + c_{(u', v')}^i(t(u')) = \min_{(u, v') \in E^\circ} \{F^i(u) + c_{(u, v')}^i(t(u))\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Для каждой вершины $v' \in V'$ выбираем одну дугу $(u', v') \in E^\circ$, которая удовлетворяет этому условию, и образуем множество E' из таких дуг. После этого находим метки $F^i(v')$, $i = 1, \dots, p$, для вершин $v' \in V'$ по формуле

$$F^i(v') = F^i(u') + c_{(u', v')}^i(t(u')), \quad (u', v') \in E'.$$

Значение $t(v')$ находим по формуле

$$t(v') = t(u') + 1, \quad (u', v') \in E'. \quad (5)$$

Заменяем множество V^* на $V^* \cup V'$, а E^* на $E^* \cup E'$. Если $V^* \neq V$, то переходим к шагу $k + 1$, в противном случае работа алгоритма заканчивается.

Заметим, что если для заданных $e \in E$, $t \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ и $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ значения $c_e^i(t)$ могут быть вычислены за время k , то алгоритм находит дерево оптимальных путей $T^* = (V, E^*)$ за время $O(pn^2k)$. Действительно, каждый шаг алгоритма требует $O(pnk)$ операций и наибольшее количество шагов алгоритма равняется $n - 1$. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма в элементарных операциях есть $O(pn^2k)$.

7. Обобщения

В рассмотренной задаче мы предполагали, что время перехода $\tau_{u,v}$ системы L из состояния $u \in V$ в $v \in V$ для всех $(u, v) \in E$ равняется единице. Легко заметить, что все результаты работы могут быть перенесены на случай, когда различным дугам (u, v) и (u', v') соответствуют различные длительности времени переходов $\tau_{u,v}$, $\tau_{u',v'}$ и каждая из них может быть отлична от единицы. Теоремы 1–4 для задачи в таком общем случае также имеют место и доказываются аналогично. Поэтому, если в алгоритме заменим соотношение (5) на соотношение

$$t(v') = t(u') + \tau_{u',v'},$$

то получим алгоритм решения задачи в общем случае. Вычислительная сложность алгоритма при этом не меняется.

Более общая математическая модель динамической s -игры получается, если позиции игроков меняются во времени, то есть в каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ задано разбиение

$$V = V_1(t) \cup V_2(t) \cup \dots \cup V_p(t),$$

где $V_i(t) \cap V_j(t) = \emptyset$, $i \neq j$. Используя динамическую декомпозицию игровой сети из [5, 7], эту задачу можно свести к задаче из раздела 3.

Список литературы

1. Романовский И. В., Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом. *Кибернетика* (1967), №2, 66–78.
2. Беллман Р., Калаба Р., *Динамическое программирование и современная теория управления*. ИЛ, Москва, 1966.
3. Гурвич В.А., Карзанов А.В., Хачиян Л.Г., Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1988) **28**, №9, 1407–1417.
4. Кристофидес Н., *Теория графов: алгоритмический подход*. Мир, Москва, 1978.
5. Лозовану Д. Д., Алгоритмы решения некоторых классов сетевых минимаксных задач и их приложения. *Кибернетика* (1991), №1, 70–75.
6. Лозовану Д. Д., Трубин В. А., Задача о минимаксном пути в сети и алгоритм ее решения. *Дискретная математика* (1994) **6**, №2, 138–144.
7. Лозовану Д. Д., Сильнополиномиальные алгоритмы поиска минимаксных путей в сетях и решение циклических игр. *Кибернетика и системный анализ* (1993), №5, 145–151.
8. Nash J. F., Non cooperative games. *Ann. Math.* (1951) **2**, 286–295.
9. Мулен Э., *Теория игр с примерами из математической экономики*. Мир, Москва, 1985.
10. Lozovanu D., Dynamic games with p players on networks. *Изв. АН Республики Молдова, Математика* (2000) **32**, №1, 41–54.
11. Boliac R., Lozovanu D., Solomon D., Optimal paths in network games with p players. *Discrete Appl. Math.* (2000) **99**, №1–3, 339–348.

Статья поступила 01.02.2001.