Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, О числе решений системы случайных линейных уравнений в множестве векторов специального вида, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 40–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:30:59

О числе решений системы случайных линейных уравнений в множестве векторов специального вида

© 2006 г. В. А. Копытцев

Исследуется распределение числа решений системы случайных линейных уравнений над $GF(q)$ в множестве векторов, обладающих заданным числом ненулевых координат, а также в некоторых подмножествах этого множества. Получены достаточные условия сходимости распределений к закону Пуассона, к некоторым другим предельным распределениям, связанным с этим законом, и условия сходимости к стандартному нормальному закону. В работе обобщены результаты, доказанные автором ранее для случая $q = 2$.

1. Введение и формулировки результатов

Пусть компоненты вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ принимают значения в конечном поле $GF(q)$, $q \geq 2$. Положим

$$X_r = \left\{ x: \sum_{i=1}^n I(x_i) = r \right\}, \quad (1)$$

где $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ и

$$I(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i \in GF(q) \setminus \{0\}, \\ 0, & x_i = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что число элементов множества (1)

$$|X_r| = \binom{n}{r} (q-1)^r.$$

Пусть X'_r — произвольное подмножество множества X_r с числом элементов

$$|X'_r| \geq \binom{n}{r}. \quad (2)$$

В частности, можно полагать, что

$$X'_r = \left\{ x: \sum_{i=1}^n I_B(x_i) = r, \sum_{i=1}^n I_0(x_i) = n-r \right\}, \quad (3)$$

где $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ и

$$I_B(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i \in B, \\ 0, & x_i \notin B, \end{cases}$$

$$I_0(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i = 0, \\ 0, & x_i \neq 0, \end{cases}$$

и B — некоторое подмножество множества ненулевых элементов поля $GF(q)$. В этом случае

$$|X'_r| = \binom{n}{r} |B|^r, \quad 1 \leq |B| \leq q-1.$$

Рассмотрим систему случайных линейных уравнений над полем $GF(q)$

$$\varepsilon_{t,1}x_1 + \dots + \varepsilon_{t,n}x_n = a_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

с ограничением

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X'_r, \quad (5)$$

где r — заданное натуральное число, $1 \leq r \leq n-1$. Коэффициенты $\varepsilon_{t,i}$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, предполагаются независимыми в совокупности случайными величинами,

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_{t,i} = v\} = \frac{1}{q}(1 + \Delta_{t,i}^{(v)}),$$

$$\sum_{v \in GF(q)} \Delta_{t,i}^{(v)} = 0. \quad (6)$$

Следуя работе [2], назовем систему уравнений (4) (с ограничением (5)) случайной системой с независимыми частями, если вектор правых частей $a = (a_1, \dots, a_T)$ не зависит от коэффициентов $\varepsilon_{t,i}$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Распределение

$$\mathbf{P}_T\{a = \alpha\}, \quad \alpha \in GF(q)^T,$$

вектора a может быть произвольным, в том числе, сосредоточенным на некотором одном значении $\alpha \in GF(q)^T$.

Систему уравнений (4) назовем случайной заведомо совместной системой, если

$$a_t = \varepsilon_{t,1}x_1^0 \oplus \dots \oplus \varepsilon_{t,n}x_n^0, \quad t = 1, \dots, T,$$

при некотором заданном векторе $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in X'_r$. Вектор x^0 назовем истинным решением.

Обозначим ξ и η , соответственно, число решений случайной системы с независимыми частями и число решений случайной заведомо совместной системы.

Отметим, что число ξ является функцией случайной матрицы коэффициентов $E = \|\varepsilon_{t,i}\|$ и (в общем случае) случайного вектора $a = (a_1, \dots, a_T)$, а число η является функцией случайной матрицы E . Исходя из этого, будем полагать, что

$$\xi = f(E, a \mid r), \quad (7)$$

$$\eta = g(E \mid x^0, r), \quad (8)$$

где r и x^0 — заданные параметры, f и g — заданные функции, E и a , соответственно, — случайная матрица и случайный вектор.

Пусть

$$\Lambda = |X'_r|q^{-T}, \quad (9)$$

$$\Delta = \max_{i,i,v} |\Delta_{i,i}^{(v)}|. \quad (10)$$

Для обозначения предельных соотношений вида

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

будем использовать запись $\xi \rightarrow \Pi(\lambda)$ и запись $\xi \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ для обозначения сходимости функции распределения случайной величины ξ к функции стандартного нормального распределения.

Теорема 1. Пусть $n, T \rightarrow \infty$, $r/n \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $T\Delta^r \rightarrow 0$,

$$\Lambda \rightarrow \lambda < \infty. \quad (11)$$

Тогда

$$\xi \rightarrow \Pi(\lambda) \quad (12)$$

равномерно относительно $a \in GF(q)^T$, $a \neq 0$.

Пусть $a = 0$, $X'_r = X_r$ и выполняются условия первой части теоремы. Тогда

$$\frac{1}{q-1} \xi \rightarrow \Pi(\lambda/(q-1)). \quad (13)$$

Пусть в подмножестве X'_r не содержится пар коллинеарных векторов и выполняются условия первой части теоремы. Тогда выполняется соотношение (12) равномерно относительно $a \in GF(q)^T$.

Замечание 1. Условию третьей части теоремы 1 удовлетворяет, к примеру, подмножество X'_r , содержащее по одному (произвольному) представителю из каждого класса коллинеарных векторов, на которые разбивается множество X_r . При этом

$$|X'_r| = \binom{n}{r} (q-1)^{r-1}.$$

Отметим, что в случае $q = 2$ множество X'_r в силу требования (2) совпадает с X_r и не содержит пар коллинеарных векторов, так как в данном случае такие пары отсутствуют вообще.

Положим

$$\Pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Следствие 1. Пусть $X'_r = X_r$ и выполняются условия первой части теоремы 1. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \mathbf{P}\{a \neq 0\} \Pi(k, \lambda) + \mathbf{P}\{a = 0\} \Pi(k/(q-1), \lambda/(q-1)) + o(1),$$

если $q-1$ делит $k \in \{1, 2, \dots\}$, и

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \mathbf{P}\{a \neq 0\} \Pi(k, \lambda) + o(1),$$

если $q-1$ не делит $k \in \{1, 2, \dots\}$.

Следствие 2. Пусть вектор a распределен равномерно, то есть

$$\mathbf{P}\{a = \alpha\} = q^{-T}, \quad \alpha \in GF(q)^T,$$

и выполняются условия первой части теоремы 1. Тогда

$$\xi \rightarrow \Pi(\lambda). \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, вектор a распределен равномерно, $n, T \rightarrow \infty$, $(n-r)/n \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $T\Delta^{n-r} \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \lambda < \infty$. Тогда имеет место соотношение (14).

Теорема 3. Пусть выполняется одно из условий

(а) $\Delta = 0$, или

(б) X'_r определяется по формуле (3), $|B| = 1$, $\Delta_{t,i}^{(v)} = \Delta_t^{(v)}$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда распределение числа решений $\eta = g(E \mid x^0, r)$ инвариантно относительно $x^0 \in X'_r$.

Теорема 4. Пусть выполняется одно из условий

(в) $\Delta = 0$, $n, T \rightarrow \infty$, $r/n \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \lambda < \infty$,

(г) X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $\Delta_{t,i}^{(v)} = \Delta_t^{(v)}$, $i = 1, \dots, n$, и при этом выполняются условия первой части теоремы 1.

Тогда

$$\eta - 1 \rightarrow \Pi(\lambda). \quad (15)$$

Теорема 5. Пусть выполняется условие (б) теоремы 3, $n, T \rightarrow \infty$, $(n-r)/n \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $T\Delta^{n-r} \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \lambda < \infty$.

Тогда имеет место соотношение (15).

Теорема 6. Пусть $n, T \rightarrow \infty$, $r/n \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $T\Delta^r \rightarrow 0$,

$$\Lambda = |X'_r|q^{-T} \rightarrow \infty, \quad (16)$$

$$\ln \Lambda / r \ln(n/r) \rightarrow 0 \quad (17)$$

и в случае $\Delta > 0$

$$\ln \Lambda / \ln(T\Delta^r) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Тогда

$$(\xi - \Lambda)\Lambda^{-1/2} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (19)$$

равномерно по $a \in GF(q)^T$, $a \neq 0$.

Пусть $a = 0$, $X'_r = X_r$ и выполняются условия первой части теоремы. Тогда

$$(\xi - \Lambda)(\Lambda(q-1))^{-1/2} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (20)$$

Пусть подмножество X'_r не содержит пар коллинеарных векторов и выполняются условия первой части теоремы. Тогда выполняется соотношение (19) равномерно по $a \in GF(q)^T$.

Теорема 7. Пусть X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, вектор a распределен равномерно и выполняются условия, полученные из условий первой части теоремы 6 заменой параметра r параметром $n - r$. Тогда

$$(\xi - \Lambda)\Lambda^{-1/2} \rightarrow N(0, 1). \quad (21)$$

Теорема 8. Пусть выполняется одно из условий

(д) $\Delta = 0$, $n, T \rightarrow \infty$, $r/n \rightarrow 0$, и выполняются условия (16), (17),

(е) X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $\Delta_{t,i}^{(v)} = \Delta_t^{(v)}$, $i = 1, \dots, n$, и выполняются условия первой части теоремы 6.

Тогда

$$(\eta - \Lambda)\Lambda^{-1/2} \rightarrow N(0, 1). \quad (22)$$

Теорема 9. Пусть X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $\Delta_{t,i}^{(v)} = \Delta_t^{(v)}$, $i = 1, \dots, n$, и выполняются условия, полученные из условий первой части теоремы 6 заменой параметра r параметром $n - r$. Тогда имеет место соотношение (22).

Замечание 2. Наряду с ограничением (5) для решения системы уравнений (4) можно рассмотреть ограничения

$$x \in \bigcup_{k=1}^r X'_k, \quad 1 \leq r \leq n-1, \quad (23)$$

$$x \in \bigcup_{k=r}^n X'_k, \quad 1 \leq r \leq n-1, \quad (24)$$

полагая при этом, что множества X'_k определяются формулой (3).

Обозначим $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ числа решений случайной системы (4) с независимыми частями, удовлетворяющих ограничениям (23) и (24), соответственно.

Обозначим $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ числа решений случайной заведомо совместной системы (4), удовлетворяющих ограничениям (23) и (24). При этом полагаем, что как в случае (23), так и в случае (24) истинным решением является $x^0 \in X'_r$.

Покажем, что для введенных величин справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1–9 и отличающиеся только некоторыми дополнительными условиями.

Действительно, пусть выполняются условия первой части теоремы 1. Случай $r = 1$ тривиален, так как влечет равенство $\xi^{(1)} = \xi$. При $r \geq 2$ и условии, что

$$T\Delta = O(1),$$

математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi^{(1)} - \xi) &\leq ((1 + \Delta)/q)^T \sum_{k=1}^{r-1} |X'_k| - ((1 + \Delta)/q)^T \sum_{k=1}^{r-1} \binom{n}{k} |B|^k \\ &\leq (1 + \Delta)^T \Lambda \sum_{l \geq 1} (r/(n-r))^l \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому согласно (12)

$$\xi^{(1)} \rightarrow \Pi(\lambda) \quad (26)$$

равномерно по a , $a \neq 0$.

В случае $a = 0$, $X'_r = X_r$ из (25) и (13) следует, что

$$(1/(q-1))\xi^{(1)} \rightarrow \Pi(\lambda/(q-1)). \quad (27)$$

Если X'_r не содержит коллинеарных векторов, то из (18) и третьей части теоремы 1 следует соотношение (26), выполняемое равномерно по всем значениям $\alpha \in GF(q)^T$ вектора a .

По аналогии с (7) положим

$$\xi^{(i)} = f^{(i)}(E, a | r), \quad i = 1, 2.$$

Утверждение для числа $\xi^{(2)}$, соответствующее теореме 2, вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть подмножества X'_k в ограничениях (23), (24) определяются формулой (3), где $|B| = 1$, и пусть вектор правых частей a распределен равномерно, тогда

$$\mathbf{P}\{f^{(2)}(E, a | r) = l\} = \mathbf{P}\{f^{(1)}(E, a | n-r) = l\}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 12, используемая ниже при доказательстве теоремы 2.

Рассмотрим распределения чисел

$$\eta^{(i)} = g^{(i)}(E | x^0, r), \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

Сначала отметим, что справедливы утверждения, которые получаются из теоремы 3 заменой числа $\eta = g(E | x^0, r)$ на любое из чисел (29). Доказательство этих утверждений дословно повторяет доказательство теоремы 3.

Покажем теперь, как получается утверждение для числа $\eta^{(1)}$, соответствующее теореме 4. Случай $r = 1$ тривиален, так как влечет равенство $\eta^{(1)} = \eta$.

Пусть

$$x^0 \in X'_r, \quad r \geq 2, \quad x^1 \in \bigcup_{k=1}^{r-1} X'_k.$$

Вектор x^1 удовлетворяет заведомо совместной системе (4) с ограничением (23), если и только если скалярные произведения

$$(\varepsilon_t, x^0 - x^1) = 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= (\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n}), \\ x^0 - x^1 &= (x_1^0 - x_1^1, \dots, x_n^0 - x_n^1). \end{aligned}$$

При любом $x^0 \in X'_r$

$$\mathbf{P}\{(\varepsilon_t, x^0 - x^1) = 0, t = 1, \dots, T\} \leq q^{-T}(1 + \Delta)^T.$$

Используя последнее неравенство, получаем, что если

$$T\Delta = O(1), \quad r = o(n), \quad \Lambda \rightarrow \lambda, \quad \lambda < \infty,$$

то выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (25):

$$\mathbf{E}(\eta^{(1)} - \eta) \leq (1 + \Delta)^T \Lambda \sum_{l \geq 1} (r/(n-r))^l \rightarrow 0. \quad (30)$$

Пусть выполняется условие (г) теоремы 4 и

$$T\Delta = O(1).$$

Тогда из (30) и (15) следует, что

$$\eta^{(1)} - 1 \rightarrow \Pi(\lambda). \quad (31)$$

Пусть множество X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $B = \{\beta\}$. Как нетрудно заметить, в этом случае

$$g^{(2)}(E \mid x^0, r) = g^{(1)}(E \mid x^1, n-r), \quad (32)$$

где

$$x^1 = (\beta - x_1^0, \dots, \beta - x_n^0).$$

Из (31), (32) вытекает утверждение для числа $\eta^{(2)}$, соответствующее теореме 5.

Аналогично получаются утверждения, соответствующие теоремам 6–9. При этом используются соотношения (25), (30), имеющие место при

$$T\Delta = O(1), \quad \Lambda r/n \rightarrow 0, \quad \Lambda \rightarrow \infty,$$

и равенства (29), (32).

2. Доказательства теорем

Доказательство первой части теоремы 1. Это доказательство аналогично доказательству первой части теоремы 1 работы [1]. Положим

$$N = |X'_r|.$$

Занумеруем некоторым образом элементы множества X'_r . Пусть

$$X'_r = \{x^s\}_{s=1}^N, \quad x^s = (x_1^s, \dots, x_n^s).$$

Представим ξ в виде суммы индикаторов

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_N,$$

где

$$\xi_s = I\{x^s \text{ является решением системы}\}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Для факториальных моментов $\mathbf{E}(\xi)_l$ величины ξ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi)_l &= \mathbf{E}\xi(\xi - 1) \dots (\xi - l + 1) \\ &= \sum_{(s(1), \dots, s(l))} b_{s(1) \dots s(l)},\end{aligned}$$

где

$$b_{s(1) \dots s(l)} = \mathbf{P}\{\xi_{s(1)} = \xi_{s(2)} = \dots = \xi_{s(l)} = 1\}$$

и суммирование производится по всем упорядоченным наборам $(s(1), \dots, s(l))$ попарно различных индексов, принадлежащих множеству $\{1, \dots, N\}$. Положим

$$\begin{aligned}M(x^s) &= \{i: I(x_i^s) = 1\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ M(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) &= \bigcup_{j=1}^l M(x^{s(j)}), \\ \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) &= |M(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)})|.\end{aligned}$$

Следуя работе [3] (см. также [4, 5]), введем исключительные множества $S_l, l = 2, 3, \dots$. Пусть

$$S_l = \{(s(1), \dots, s(l)): \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \leq rl - r/2\}. \quad (33)$$

Покажем, что в условиях теоремы 1

$$\max_{1 \leq s \leq N} b_s \rightarrow 0, \quad \sum_{s=1}^N b_s \rightarrow \lambda, \quad (34)$$

и при любом $l = 2, 3, \dots$

$$\sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} b_{s(1) \dots s(l)} \rightarrow 0, \quad (35)$$

$$\sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} b_{s(1)} b_{s(2)} \dots b_{s(l)} \rightarrow 0, \quad (36)$$

$$\max_{(s(1), \dots, s(l)) \notin S_l} \left| \frac{b_{s(1) \dots s(l)}}{b_{s(1)} \dots b_{s(l)}} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad (37)$$

равномерно по $a \in GF(q)^T, a \neq 0$. Тогда воспользуемся теоремой 1 работы [3] и получим (12).

Соотношения (34)–(37) докажем с помощью ряда вспомогательных утверждений.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_r$. Положим

$$\mathbf{P}\{(\varepsilon_t, x) = v\} = \frac{1}{q}(1 + \Delta_t^{(v)}(x)), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n}), \\ (\varepsilon_t, x) &= \varepsilon_{t,1}x_1 + \dots + \varepsilon_{t,n}x_n,\end{aligned}$$

при этом

$$\sum_{v \in GF(q)} \Delta_t^{(v)}(x) = 0.$$

Лемма 2. Для модуля $\Delta_t^{(v)}(x)$ справедлива оценка

$$|\Delta_t^{(v)}(x)| \leq \Delta^r, \quad (39)$$

где Δ определяется формулами (6), (10).

Оценка (39) вытекает из формулы

$$\Delta_t^{(v)}(x) = \frac{1}{q^{r-1}} \sum_{\substack{v_1, \dots, v_r \in GF(q): \\ v_1 + \dots + v_r = v}} \prod_{k=1}^r \Delta_{t, i_k}^{v_k x_{i_k}^{-1}}, \quad (40)$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ — ненулевые координаты вектора x . Формула (40) доказывается с помощью индукции по натуральным значениям параметра r .

Используя (38), (39) получаем, что

$$q^{-T}(1 - \Delta^r)^T \leq b_s \leq q^{-T}(1 + \Delta^r)^T, \quad (41)$$

$$\Lambda(1 - \Delta^r)^T \leq \sum_{s=1}^N b_s \leq \Lambda(1 + \Delta^r)^T. \quad (42)$$

Отсюда вытекают соотношения (34).

Осталось доказать соотношения (35), (36), (37).

Следующие вспомогательные утверждения являются близкими аналогами соответствующих лемм из работы [1]. С целью связности изложения доказательства большинства утверждений приводятся полностью.

Лемма 3. Пусть $1 \leq l \leq n$,

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = m \leq l.$$

Тогда при любом фиксированном $a = (a_1, \dots, a_T)$

$$b_{s(1) \dots s(l)} \leq ((1/q)(1 + \Delta))^T m, \quad (43)$$

при этом в случае $m = l$

$$((1/q)(1 - \Delta))^{Tl} \leq b_{s(1) \dots s(l)} \leq ((1/q)(1 + \Delta))^{Tl}. \quad (44)$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} \xi_s^{(t)} &= I\{x^s \text{ является решением уравнения с номером } t\}, \\ b_{s(1) \dots s(l)}^{(t)} &= \mathbf{P}\{\xi_{s(1)}^{(t)} = \dots = \xi_{s(l)}^{(t)} = 1\}. \end{aligned}$$

В силу независимости векторов $\varepsilon_t = (\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n})$, $t = 1, \dots, T$,

$$b_{s(1) \dots s(l)} = \prod_{t=1}^T b_{s(1) \dots s(l)}^{(t)}.$$

Положим

$$x^{s(j)} = (x_1^{s(j)}, \dots, x_n^{s(j)})$$

и рассмотрим систему уравнений

$$x_1^{s(j)} \varepsilon_{t,1} \oplus \dots \oplus x_n^{s(j)} \varepsilon_{t,n} = a_t, \quad j = 1, \dots, l, \quad (45)$$

относительно переменных $\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n}$. Пусть

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = m \leq l < n.$$

Без ограничения общности мы будем считать, что первые m векторов столбцов $(x_1^{s(1)}, \dots, x_1^{s(l)}), \dots, (x_m^{s(1)}, \dots, x_m^{s(l)})$ матрицы коэффициентов системы (45) линейно независимы. Введем индикатор

$$I_t(v_{m+1}, \dots, v_n) = I\{\text{система (45) имеет решение с } \varepsilon_{t,m+1} = v_{m+1}, \dots, \varepsilon_{t,n} = v_n\}.$$

Ясно, что

$$b_{s(1)\dots s(l)}^{(t)} = \sum_{v_{m+1}, \dots, v_n \in GF(q), I_t(v_{m+1}, \dots, v_n)=1} P(v_{m+1}, \dots, v_n), \quad (46)$$

где $P(v_{m+1}, \dots, v_n)$ есть вероятность того, что значение случайного вектора $(\varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n})$ совпадет с решением системы (45), в котором последние $n - m$ координат равны $v_{m+1}, \dots, v_n$. Нетрудно установить, что

$$P(v_{m+1}, \dots, v_n) \leq ((1/q)(1 + \Delta))^m \prod_{i=m+1}^n ((1/q)(1 + \Delta_{t,i}^{(v_i)})), \quad (47)$$

и в случае $m = l$

$$\begin{aligned} ((1/q)(1 - \Delta))^m \prod_{i=l+1}^n ((1/q)(1 + \Delta_{t,i}^{(v_i)})) &\leq P(v_{l+1}, \dots, v_n) \\ &\leq ((1/q)(1 + \Delta))^m \prod_{i=l+1}^n ((1/q)(1 + \Delta_{t,i}^{(v_i)})), \end{aligned} \quad (48)$$

при этом

$$I_t(v_{l+1}, \dots, v_n) = 1, \quad (v_{l+1}, \dots, v_n) \in GF(q)^{n-l}. \quad (49)$$

Из (46), (47) и (48), (49) получаем (43) и (44).

Лемма доказана.

Положим

$$\rho(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = rl - \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}). \quad (50)$$

Обозначим через $A(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)})$ матрицу размера $l \times n$, составленную из строк $x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)} \in X(r) = \{x^s\}_{s=1}^N$.

Лемма 4. Пусть при некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in GF(q)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$ имеет место равенство

$$\alpha_1 x^{s(j_1)} + \dots + \alpha_k x^{s(j_k)} = 0. \quad (51)$$

Тогда

$$\rho(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)}) \geq rk/2. \quad (52)$$

Доказательство. Отметим, что матрица $A(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)})$ содержит rk ненулевых элементов, а число ненулевых столбцов в ней равно $\mu(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)})$. В силу (51) каждый ненулевой столбец содержит не менее двух ненулевых элементов. Поэтому

$$2\mu(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)}) \leq rk.$$

Отсюда и из (50) следует (52).

Лемма 5. Пусть

$$x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)} \in \{x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}\} \subseteq X(r). \quad (53)$$

Тогда

$$\rho(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \geq \rho(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)}). \quad (54)$$

Доказательство. Положим

$$\rho_i(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й столбец матрицы } A(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \\ & \text{содержит не более одного ненулевого элемента,} \\ \nu - 1, & \text{если } i\text{-й столбец матрицы } A(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \\ & \text{содержит не менее двух ненулевых элементов.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$\rho(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = \sum_{i=1}^n \rho_i(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \quad (55)$$

и при условии (45)

$$\rho_i(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \geq \rho_i(x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда и из (55) следует (54).

Лемма 6. Пусть набор $x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}$ не содержит коллинеарных векторов,

$$\mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) > r(l-1) - r/2. \quad (56)$$

Тогда

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = l. \quad (57)$$

Доказательство. При $l = 1$ и $l = 2$ это утверждение очевидно. Пусть $l \geq 3$, выполняется (56) и

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) < l.$$

Тогда найдутся векторы

$$x^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)} \in \{x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}\}, \quad k \geq 3,$$

такие, что

$$\alpha_1 x^{s(j_1)} + \dots + \alpha_k x^{s(j_k)} = 0$$

при некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in GF(q)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$. Поэтому согласно леммам 2 и 3

$$\begin{aligned} \rho(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) &\geq \rho(z^{s(j_1)}, \dots, x^{s(j_k)}) \\ &\geq \frac{rk}{2} \geq \frac{3r}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) &= rl - \rho(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \\ &\leq rl - \frac{3r}{2} = r(l-1) - \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (56). Значит, из (56) следует (57).

Лемма 7. Пусть $l \geq 3$,

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) < l,$$

и при некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ из $GF(q)$ таких, что

$$\sum_{s=1}^{l-1} I(\alpha_s) \geq 2,$$

имеет место равенство

$$x^{s(l)} = \alpha_1 x^{s(1)} + \dots + \alpha_{l-1} x^{s(l-1)}. \quad (58)$$

Тогда

$$\mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l-1)}) = \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}), \quad (59)$$

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l-1)}) = \text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}). \quad (60)$$

Доказательство. Из (58) вытекает, что столбцы матрицы $A(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)})$, соответствующие ненулевым элементам вектора $x^{s(l)}$, содержат не менее двух ненулевых элементов. Поэтому вычеркивание строки $x^{s(l)}$ из матрицы $A(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)})$ не изменяет общего числа ненулевых столбцов. Отсюда следует (59). Равенство (60) очевидно.

Лемма 8. Пусть $l \geq 3$, набор $x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}$ не содержит коллинеарных векторов,

$$\mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) > r(m-1) - r/2, \quad (61)$$

где m — целое число, $2 \leq m \leq l$.

Тогда

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) \geq m. \quad (62)$$

Доказательство. В случае $m = l$ это утверждение вытекает из леммы 6, а в случае $m = 2$ оно тривиально. Пусть

$$2 < m < l, \quad \text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) < m. \quad (63)$$

Применяя $l - m$ раз лемму 5, установим, что найдутся векторы $x^{s(1)}, \dots, x^{s(m)}$ (без ограничения общности будем полагать, что эти векторы первые) такие, что

$$\begin{aligned}\mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(m)}) &= \mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}), \\ \text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(m)}) &= \text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}).\end{aligned}\quad (64)$$

Из (61), (64) и леммы 4 следует, что

$$\text{rank}(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = m.$$

Это равенство противоречит предположению (63). Значит, из (61) следует (62).

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть

$$a = (a_1, \dots, a_T) \neq (0, \dots, 0)$$

и набор $x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}$, $l \geq 2$, содержит коллинеарные векторы. Тогда

$$b_{s(1)} \dots s(l) = 0.$$

Доказательство. Данное утверждение вытекает из очевидного факта, что два коллинеарных вектора не могут оба удовлетворять одному уравнению с правой частью, отличной от нуля.

Лемма доказана.

Пусть

$$a = (a_1, \dots, a_T) \neq (0, \dots, 0).$$

Обозначим $W_l(h)$ число упорядоченных наборов $(s(1), \dots, s(l))$ попарно различных индексов таких, что

$$\mu(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}) = h.$$

Используя леммы 3, 8, 9, получаем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{(s(1), \dots, s(l))} b_{(s(1) \dots s(l)) \in S_l} &\leq ((1/q)(1 + \Delta))^{2T} \sum_{r+1 \leq h \leq 2r-r/2} W_l(h) \\ &+ \sum_{m=3}^l ((1/q)(1 + \Delta))^{mT} \sum_{r(m-1)-r/2 < h \leq rm-r/2} W_l(h),\end{aligned}\quad (65)$$

где $l \geq 2$ и в случае $l = 2$ правая часть неравенства (65) содержит только первое слагаемое. Нетрудно установить, что

$$W_l(h) \leq \binom{n}{h} \binom{h}{r}^l (q-1)^{rl}.\quad (66)$$

Пусть $\omega = \lfloor r/2 \rfloor$ — целая часть числа $r/2$. Из (65), (66) вытекает, что

$$\sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} b_{(s(1) \dots s(l))} \leq R_l,\quad (67)$$

где

$$R_l = (1 + \Delta)^{lT} \sum_{m=2}^l R_l^{(m)}(\omega), \quad (68)$$

$$R_l^{(m)}(\omega) = r q^{-mT} \binom{n}{rm-\omega} \binom{rm-\omega}{r}^l (q-1)^{rl}. \quad (69)$$

При этом в силу (2), (9)

$$R_l^{(m)}(\omega) \leq r \Lambda^m \binom{n}{r}^{-m} \binom{n}{rm-\omega} \binom{rm-\omega}{r}^l (q-1)^{rl}. \quad (70)$$

Лемма 10. *Найдется постоянная $C < \infty$ такая, что*

$$R_l^{(m)}(\omega) \leq \Lambda^m \exp\{-\omega \ln(n/r) + rl(\ln l + C)\} \quad (71)$$

при всех $n, r, l, rl/n \leq 1/2, 2 \leq m \leq l$.

Данное утверждение вытекает из леммы 7 работы [1], где дана оценка вида (71) для правой части неравенства (70) в случае $q = 2$, то есть при отсутствии множителя $(q-1)^{rl}$. Ясно, что появление этого множителя не меняет вида оценки (71) (за счет постоянной C).

С учетом (71) получаем, что

$$\begin{aligned} R_l &= (1 + \Delta)^{lT} \sum_{m=2}^l R_l^{(m)}(\lfloor r/2 \rfloor) \\ &\leq (1 + \Delta)^{lT} \frac{\Lambda^l - 1}{\Lambda - 1} \exp\{-\lfloor r/2 \rfloor \ln(n/r) + rl(\ln l + C)\}, \end{aligned} \quad (72)$$

где при условиях теоремы 1 правая часть неравенства стремится к нулю, так как

$$(1 + \Delta)^{lT} \leq \exp\{lT\Delta\},$$

и в силу неравенств

$$\binom{n}{r} (1-q)^r q^{-T} \geq \Lambda \geq C'' > 0,$$

где C'' — постоянная величина, имеют место оценки

$$\begin{aligned} T &= O(r \ln(n/r)), \\ T\Delta &= o(r \ln(n/r)). \end{aligned} \quad (73)$$

Таким образом, из (67) получаем (35).

Аналогично доказывается (36). Действительно,

$$b_{s(1)} b_{s(2)} \dots b_{s(l)} \leq ((1/q)(1 + \Delta))^{lT},$$

и так же как (65), получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} b_{s(1)} b_{s(2)} \dots b_{s(l)} \\ &\leq ((1/q)(1 + \Delta))^{lT} \left(\sum_{r+1 \leq h \leq 2r-r/2} W_l(h) + \sum_{m=3}^l \sum_{r(m-1)-r/2 < h \leq rm-r/2} W_l(h) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} b_{s(1)} b_{s(2)} \dots b_{s(l)} \leq R_l, \quad (74)$$

аналогичная (67). При этом, как показано выше, $R_l \rightarrow 0$.

Осталось показать, что

$$|b_{s(1) \dots s(l)} / (b_{s(1)} \dots b_{s(l)}) - 1| \rightarrow 0 \quad (75)$$

при условии, что

$$rl - r/2 < \mu(s(1), \dots, s(l)), \quad l \geq 2. \quad (76)$$

Положим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \\ x^{s(j)} &= (x_1^{s(j)}, \dots, x_n^{s(j)}), \\ (\varepsilon, x^{s(j)}) &= \varepsilon_1 x_1^{s(j)} + \dots + \varepsilon_n x_n^{s(j)} \end{aligned}$$

и обозначим $P(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}; \gamma_1, \dots, \gamma_l)$ вероятность события

$$\{(\varepsilon, x^{s(j)}) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, l\} \quad (77)$$

при случайных и независимых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ таких, что

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_i = v\} = (1 + \Delta_i^v)/q, \quad v \in GF(q), \quad |\Delta_i^{(v)}| \leq \Delta < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ — произвольные фиксированные элементы поля $GF(q)$.

Лемма 11. Пусть выполняется условие (76). Тогда при $\Delta \rightarrow 0$

$$P(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}; \gamma_1, \dots, \gamma_l) = q^{-l}(1 + O(\Delta')) \quad (78)$$

равномерно по $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in GF(q)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение множества

$$\begin{aligned} A_j &= \{i: I(x_i^{s(j)}) = 1\}, & j &\in \{1, \dots, l\}, \\ A_{j_1, \dots, j_k} &= \bigcap_{v=1}^k A_{j_v}, & j_1, \dots, j_k &\in \{1, \dots, l\}, \\ B_{j_1, \dots, j_k} &= \bigcup_{j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}} A_j, & B_{1, \dots, l} &= \emptyset, \\ C_{j_1, \dots, j_k} &= A_{j_1, \dots, j_k} \setminus (A_{j_1, \dots, j_k} \cap B_{j_1, \dots, j_k}). \end{aligned}$$

Согласно определению, соответствующие различным наборам $j_1, \dots, j_k$ множества $C_{j_1, \dots, j_k}$ не содержат общих элементов, при этом

$$A_j = C_j \cup D(j), \quad (79)$$

где

$$D(j) = \bigcup_{k=2}^l \bigcup_{(j_1, \dots, j_k) \in M_j^k} C_{j_1, \dots, j_k}, \quad (80)$$

M_j^k — множество упорядоченных наборов индексов из $\{1, \dots, l\}$ объема $k \leq l$, содержащих фиксированный индекс $j \in \{1, \dots, l\}$.

С учетом равенств

$$rl = \sum_{j=1}^l |C_j| + \sum_{k=2}^l k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} |C_{j_1 \dots j_k}|,$$

$$\mu(s(1), \dots, s(l)) = \sum_{j=1}^l |C_j| + \sum_{k=2}^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} |C_{j_1 \dots j_k}|$$

условие (76) принимает вид

$$rl - \mu(s(1), \dots, s(l)) = \sum_{k=2}^l (k-1) \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} |C_{j_1 \dots j_k}| < r/2. \quad (81)$$

Покажем, что при условии (81) ((76))

$$|C_j| > r/2, \quad j = 1, \dots, l. \quad (82)$$

Действительно, пусть существует $j \in \{1, \dots, l\}$ такое, что $|C_j| \leq r/2$. Тогда в силу (79) $|D(j)| \geq r/2$, что противоречит условию (81) ((76)), так как согласно (80) для всех $j \in \{1, \dots, l\}$

$$\sum_{k=2}^l (k-1) \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} |C_{j_1 \dots j_k}| \geq |d(j)|.$$

Следовательно, при условии (81) ((76)) имеет место (82).

Положим

$$x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j),$$

$$x^{j_1, \dots, j_k} = (x_1^{j_1, \dots, j_k}, \dots, x_n^{j_1, \dots, j_k}),$$

$$\Gamma_\alpha(j) = \sum_{k=2}^l \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in M_j^k} (\alpha, x^{s(j)} x^{j_1, \dots, j_k}), \quad (83)$$

где

$$x_i^j = \begin{cases} 1, & i \in C_j, \\ 0, & i \notin C_j, \end{cases}$$

$$x_i^{j_1, \dots, j_k} = \begin{cases} 1, & i \in C_{j_1, \dots, j_k}, \\ 0, & i \notin C_{j_1, \dots, j_k}, \end{cases}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (GF(q))^n,$$

$$x^{s(j)} x^{j_1, \dots, j_k} = (x_1^{s(j)} x_1^{j_1, \dots, j_k}, \dots, x_n^{s(j)} x_n^{j_1, \dots, j_k}) \in (GF(q))^n,$$

$$(j_1, \dots, j_k) \in M_j^k, \quad j \in \{1, \dots, l\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (84)$$

и операции в выражениях (83), (84) производятся в поле $GF(q)$. Пусть

$$D = \bigcup_{k=2}^l \bigcup_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} C_{j_1, \dots, j_k}. \quad (85)$$

Представим событие (77) в виде суммы попарно несовместных событий

$$\bigcap_{i \in D} \{\varepsilon_i = \alpha_i\} \bigcap_{j=1}^l \{(\varepsilon, x^{s(j)} x^j) = \gamma_j - \Gamma_\alpha(j)\}, \quad (86)$$

взятых для значений α_i , $i \in D$ (здесь учитывается, что входящая в выражение (86) величина (83), индексированная вектором $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, зависит только от координат α_i , $i \in D$).

Используя вышеуказанное представление и полагая

$$\mathbf{P}\{(\varepsilon, x^{s(j)} x^j) = \gamma_j - \Gamma_\alpha(j)\} = (1/q)(1 + \Delta^{(\gamma_j - \Gamma_\alpha(j))}(x^{s(j)} x^j)),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} P(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \\ = \sum_{\alpha_i \in GF(q), i \in D} \prod_{i \in D} \frac{1}{q} (1 + \Delta_i^{(\alpha_i)}) \prod_{j=1}^l \frac{1}{q} (1 + \Delta^{(\gamma_j - \Gamma_\alpha(j))}(x^{s(j)} x^j)). \end{aligned} \quad (87)$$

Раскрывая (87), находим, что

$$\begin{aligned} q^l P(x^{s(1)}, \dots, x^{s(l)}; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \\ = \sum_{\alpha_i \in GF(q), i \in D} \prod_{i \in D} \frac{1}{q} (1 + \Delta_i^{(\alpha_i)}) \left(1 + \sum_{j=1}^l \Delta^{(\gamma_j - \Gamma_\alpha(j))}(x^{s(j)} x^j) \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l} \Delta^{(\gamma_{j_1} - \Gamma_\alpha(j_1))}(x^{s(j_1)} x^{j_1}) \dots \Delta^{(\gamma_{j_k} - \Gamma_\alpha(j_k))}(x^{s(j_k)} x^{j_k}) \right) \\ = 1 + \sum_{j=1}^l \Delta^{(\gamma_j)}(x^{s(j)}) + O(m^2), \end{aligned} \quad (88)$$

где

$$m = \max_{j \in \{1, \dots, l\}, \gamma \in GF(q)} |\Delta^{(\gamma)}(x^{s(j)} x^j)|. \quad (89)$$

Согласно оценке (39)

$$|\Delta^{(\gamma_j)}(x^{s(j)})| \leq \Delta^r, \quad j = 1, \dots, l. \quad (90)$$

Вместе с этим

$$m \leq \max_{j \in \{1, \dots, l\}} \Delta^{|C_j|} \leq \Delta^{r/2}. \quad (91)$$

Теперь из (88)–(91) получаем (78).

Лемма 11 доказана.

Из леммы 11 следует, что при условии (76)

$$b_{s(1)\dots s(l)} = (1/q)^{Tl} (1 + O(\Delta^r))^T \quad (92)$$

равномерно по значениям вектора правых частей a . Вместе с этим

$$((1/q)(1 - \Delta^r))^{Tl} \leq b_{s(1)} \dots b_{s(l)} \leq ((1/q)(1 + \Delta^r))^{Tl}. \quad (93)$$

Из (92), (93) следует (75). Первая часть теоремы 1 доказана.

Доказательство второй части теоремы 1. Пусть подмножество $X'_r \subseteq X_r$ состоит из представителей, взятых по одному от каждого класса коллинеарных векторов, на которые разбивается множество X_r . При этом

$$|X'_r| = |X_r|/(q-1) = \binom{n}{r} (q-1)^{r-1}.$$

Если вектор x^* является решением системы $Ex = 0$, $E = \|\varepsilon_{t,i}\|$, с ограничением $x \in X_r$, то решением этой системы является и любой коллинеарный с ним вектор $\beta x^* = (\beta x_1^*, \dots, \beta x_n^*)$, $\beta \in GF(q)$, $\beta \neq 0$. Поэтому число решений ξ системы $Ex = 0$ с ограничением $x \in X_r$ и число решений ξ' системы $Ex = 0$ с ограничением $x \in X'_r$ связаны равенством

$$\xi = \xi'(q-1). \quad (94)$$

Рассмотрим распределение величины ξ' . Полагая $a = 0$ и повторяя за исключением леммы 11 все рассуждения и выкладки, использованные при доказательстве первой части теоремы 1, получаем, что $\xi' \rightarrow \Pi(\lambda/(1-q))$. Следовательно,

$$\xi(1-q)^{-1} \rightarrow \Pi(\lambda/(1-q)).$$

Вторая часть теоремы 1 доказана.

Доказательство третьей части теоремы 1 повторяет доказательство первой части теоремы 1 после исключения леммы 9 и требования $a \neq 0$.

Доказательство теоремы 2. В случае, когда подмножество X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $B = \{\beta\}$, будем полагать

$$\xi = f_\beta(E, a | r). \quad (95)$$

Лемма 12. Пусть подмножество X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $B = \{\beta\}$, β — произвольный элемент $GF(q) \setminus \{0\}$, вектор a распределен равномерно. Тогда

$$\mathbf{P}\{f_\beta(E, a | r) = k\} = \mathbf{P}\{f_\delta(E, a | r) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (96)$$

$$\mathbf{P}\{f_\beta(E, a | r) = k\} = \mathbf{P}\{f_\delta(E, a | n-r) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (97)$$

где δ — произвольный элемент $GF(q) \setminus \{0\}$.

Доказательство. Так как (96) следует из (97), достаточно доказать равенства (97). Пусть некоторая реализация (E', a') системы $Ex = a$ имеет решение

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n), \quad \sum_{i=1}^n I_{\beta}(x'_i) = r, \quad \sum_{i=1}^n I_0(x'_i) = n - r,$$

где

$$I_{\beta} = \begin{cases} 1, & x'_i = \beta, \\ 0, & x'_i \neq \beta. \end{cases}$$

Тогда реализация $(E', \alpha' - \varepsilon')$, где

$$\begin{aligned} \alpha' - \varepsilon' &= (\alpha'_1 - \varepsilon'_1, \dots, \alpha'_T - \varepsilon'_T), \\ \varepsilon'_t &= \beta(\varepsilon'_{t,1} + \dots + \varepsilon'_{t,n}), \end{aligned}$$

имеет решение

$$x'' = (x''_1, \dots, x''_n) = (x'_1 - \beta, \dots, x'_n - \beta), \quad \sum_{i=1}^n I_{-\beta}(x''_i) = n - r, \quad \sum_{i=1}^n I_0(x''_i) = r.$$

Отсюда вытекает, что

$$f_{\beta}(E', \alpha | r) = f_{-\beta}(E', \alpha' - \varepsilon' | n - r). \quad (98)$$

Вместе с этим, при любом $\delta \in GF(q) \setminus \{0\}$

$$f_{\beta}(E', \alpha | r) = f_{\delta}(E', \alpha\beta^{-1}\delta | r), \quad (99)$$

где

$$\alpha'\beta^{-1}\delta = (\alpha'_1\beta^{-1}\delta, \dots, \alpha'_T\beta^{-1}\delta).$$

Из (98), (99) вытекает, что

$$f_{\beta}(E', \alpha' | r) = f_{\delta}(E', (\alpha' - \varepsilon')(-\beta)^{-1}\delta | n - r). \quad (100)$$

При этом в силу равномерности распределения вектора a

$$\mathbf{P}\{(E, a) = (E', \alpha')\} = \mathbf{P}\{(E, a) = (E', \alpha'')\} \quad (101)$$

при любых $\alpha', \alpha'' \in GF(q)^T$.

Используя (100), (101), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{f_{\beta}(E, a | r) = k\} &= \sum_{E', \alpha': f_{\beta}(E', \alpha' | r) = k} \mathbf{P}\{(E, a) = (E', \alpha')\} \\ &= \sum_{E', \alpha': f_{\delta}(E', (\alpha' - \varepsilon')(-\beta)^{-1}\delta | n - r) = k} \mathbf{P}\{(E, a) = (E', (\alpha' - \varepsilon')(-\beta)^{-1}\delta)\} \\ &= \sum_{E', \alpha'': f_{\delta}(E', \alpha'' | n - r) = k} \mathbf{P}\{(E, a) = (E', \alpha'')\} \\ &= \mathbf{P}\{f_{\delta}(E, a | n - r) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Лемма 12 доказана.

Поскольку множество X'_r , заданное формулой (3), где $|B| = 1$, не содержит коллинеарных векторов, теорема 2 является следствием третьей части теоремы 1 и равенств (97), где следует заменить δ символом β . Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть x', x'' — произвольные векторы из множества X'_r . Нетрудно заметить, что существует $n \times n$ матрица π над полем $GF(q)$, содержащая в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу и такая, что

$$\begin{aligned} x'' &= \pi x', \\ g(E \mid x', r) &= g(E\pi^{-1} \mid x'', r). \end{aligned} \quad (102)$$

В силу условий теоремы

$$\mathbf{P}\{E = E'\} = \mathbf{P}\{E = E'\pi^{-1}\}. \quad (103)$$

Действительно, при условии (а) теоремы 3 равенство (103) очевидно, а при (б) оно вытекает из того, что π является подстановочной $(0, 1)$ -матрицей и $E'\pi^{-1}$ получается из матрицы E' перестановкой столбцов.

Используя (102), (103), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{g(E \mid x', r) = k\} &= \sum_{E': g(E' \mid x'', r) = k} \mathbf{P}\{E = E'\} \\ &= \sum_{E': g(E'\pi^{-1} \mid x'', r) = k} \mathbf{P}\{E = E'\pi^{-1}\} \\ &= \sum_{E'': g(E'' \mid x'', r) = k} \mathbf{P}\{E = E''\} = \mathbf{P}\{g(E \mid x'', r) = k\}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Приведем доказанное ранее вспомогательное утверждение (см. лемму 11 в [1] и теорему 4.1 в [2]).

Лемма 13. Пусть распределение числа $\eta = g(E \mid x^0, r)$ инвариантно относительно $x^0 \in X'_r$ и в системе уравнений с независимыми левыми и правыми частями вектор правых частей a распределен равномерно. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{k} \mathbf{E}\xi \mathbf{P}\{\eta = k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Используя теорему 3, лемму 13 и следствие 2, получаем (15). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. В случае, когда подмножество X'_r определяется формулой (3), $|B| = 1$, $B = \{\beta\}$, $\beta \in GF(q) \setminus \{0\}$, будем полагать

$$\begin{aligned} X'_r &= X_r(\beta), \\ \eta &= g_\beta(E \mid x^0, r). \end{aligned}$$

Лемма 14. Справедливы соотношения

$$g_\beta(E \mid x^0, r) = g_\delta(E \mid x', r), \quad (104)$$

$$g_\beta(E \mid x^0, r) = g_\delta(E \mid x'', n - r), \quad (105)$$

где δ — произвольный элемент $GF(q) \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}x^0 &= (x_1^0, \dots, x_1^0), \\x'' &= ((\beta - x_1^0)\beta^{-1}\delta, \dots, (\beta - x_n^0)\beta^{-1}\delta).\end{aligned}$$

Доказательство. Определим n -мерные векторы

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= (\beta, \dots, \beta), \\x\alpha &= (x_1\alpha, \dots, x_n\alpha), \\\bar{\beta} - x &= (\beta - x_1, \dots, \beta - x_n),\end{aligned}$$

где $\beta, \alpha, x_i \in GF(q)$. Очевидно, что равенство

$$Ex = Ex^0, \quad x, x^0 \in X_r(\beta),$$

выполняется, если и только если выполняется равенство

$$Ex\beta^{-1}\delta = Ex', \quad x\beta^{-1}\delta, \quad x' \in X_r(\delta).$$

Отсюда вытекает (104).

Аналогично, равенство

$$Ex = Ex^0, \quad x, x^0 \in X_r(\beta),$$

выполняется, если и только если выполняется равенство

$$E(\bar{\beta} - x)\beta^{-1}\delta = Ex'', \quad (\bar{\beta} - x)\beta^{-1}\delta, \quad x'' \in X_{n-r}(\delta).$$

Отсюда вытекает (105). Лемма доказана.

Теорема 5 вытекает из теоремы 4 и равенства (105).

Доказательство теоремы 6. Доказательство первой части теоремы по сути совпадает с доказательством первой части теоремы 3 из работы [1] и отличается только нумерацией используемых ссылок. Для полноты изложения приведем его.

Пусть некоторая случайная величина ζ представляется суммой индикаторов

$$\zeta = \zeta_1 + \dots + \zeta_N,$$

где $\zeta_k, k = 1, \dots, N$, принимают лишь значения 1, 0. Положим

$$b_{s(1)\dots s(l)} = \mathbf{P}\{\zeta_{s(1)} = \dots = \zeta_{s(l)} = 1\},$$

где $s(1), \dots, s(l) \in \{1, \dots, N\}$.

Лемма 15 ([1]). Пусть при $N \rightarrow \infty$ выполняются условия

$$(1) \quad \hat{\Lambda} = \sum_{s=1}^N b_s \rightarrow \infty,$$

$$(2) \quad \Delta_l = \sum_{(s(1), \dots, s(l))} (b_{s(1)\dots s(l)} - b_{s(1)} \dots b_{s(l)}) = o(\hat{\Lambda}^{-l}), \quad l = 2, 3, \dots, \quad t = 1, 2, \dots,$$

(3) существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{\Lambda}} \sum_{s=1}^N b_s^2 = \gamma.$$

Тогда распределение величины $(\zeta - \hat{\Lambda})/\hat{\Lambda}^{1/2}$ слабо сходится к нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1 - \gamma$.

Проверим условия леммы 15. В силу (41), (42) условия (1), (3), очевидно, выполняются, при этом

$$\frac{1}{\hat{\Lambda}} \sum_{s=1}^N b_s^2 \rightarrow 0.$$

Проверим условие (2). Пусть $a \neq 0$. С учетом (67), (74) находим, что

$$\Sigma_l^{(1)} = \sum_{(s(1), \dots, s(l)) \in S_l} |b_{s(1) \dots s(l)} - b_{s(1)} \dots b_{s(l)}| \leq 2R_l,$$

где R_l — величина, заданная формулами (68), (69). Используя (71), получаем, что при условии (17)

$$\Sigma_l^{(1)} = o(\hat{\Lambda}^{-l}), \quad l = 2, 3, \dots, \quad t = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь суммы

$$\Sigma_l^{(2)} = \sum_{rl-r/2 < \mathbf{Eu}(s(1), \dots, s(l))} |b_{s(1) \dots s(l)} - b_{s(1)} \dots b_{s(l)}|.$$

Согласно оценке (92) (которая выполняется при условии (76)) и согласно неравенствам (93)

$$|b_{s(1) \dots s(l)} / b_{s(1)} \dots b_{s(l)} - 1| = O(T\Delta^r).$$

Отсюда следует, что при условии (18)

$$\Sigma_l^{(2)} = o(\hat{\Lambda}^{-l}), \quad l = 2, 3, \dots, \quad t = 1, 2, \dots$$

Таким образом, все условия леммы 15 выполняются, причем равномерно по $a \neq 0$. Используя лемму 15, оценку

$$\hat{\Lambda} = \Lambda(1 + O(T\Delta^r))$$

и соотношение (18), получаем (12).

Замечание 3. Доказательство леммы 15 в [1] следует дополнить следующим пояснением. Приведенное в доказательстве соотношение

$$\ln \varphi(z) = -z^2 \sigma^2 / 2 + O(1/\hat{\Lambda}),$$

(выполняющееся равномерно в любом конечном интервале $|z| \leq R$) означает, что семинварианты $\chi_r(T)$, $r \geq 3$, величины

$$T = (\zeta' - \hat{\Lambda})\hat{\Lambda}^{-1/2}$$

сходятся к нулю и при этом $\mathbf{E}T \rightarrow 0$, $\mathbf{D}T \rightarrow \sigma^2$. Поэтому, согласно теореме 1 работы [7], моменты величины T сходятся к моментам нормального распределения.

Доказательство второй и третьей части теоремы 6 аналогично доказательству ее первой части. При этом в случае $a = 0$ используется равенство (94).

Доказательство теоремы 7 вытекает из леммы 10 и третьей части теоремы 1.

Доказательство теоремы 8. Пользуясь теоремой 3, леммой 13 и третьей частью теоремы 6, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{z_1 < (\eta - \Lambda)/\sqrt{\Lambda} < z_2\} &= \Lambda^{-1} \sum_{\Lambda+z_1\sqrt{\Lambda} < k < \Lambda+z_2\sqrt{\Lambda}} \mathbf{P}\{\xi = k\}(1 + o(1)) \\ &= \sum_{\Lambda+z_1\sqrt{\Lambda} < k < \Lambda+z_2\sqrt{\Lambda}} \mathbf{P}\{\xi = k\}(1 + o(1)) \\ &= (\Phi(z_2) - \Phi(z_1))(1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\Phi(z)$ — функция стандартного нормального распределения. Отсюда следует (13).

Доказательство теоремы 9 вытекает из равенства (105) и теоремы 8.

Автор признателен В. Г. Михайлову за ряд важных замечаний.

Список литературы

1. Копытцев В. А., О числе решений системы линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 87–109.
2. Балакин Г. В., Введение в теорию случайных систем уравнений. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 1–18.
3. Севастьянов Б. А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **17**, №4, 733–738.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Москва, Наука, 1976.
5. Михайлов В. Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1994) **1**, №4, 580–617.
6. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Москва, Наука, 1978.
7. Janson S., Normal convergence by higher semiinvariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs. *Ann. Probab.* (1988) **16**, №1, 305–312.

Статья поступила 30.12.2004.