Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 60–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:28:16

О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов

© 2001 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается множество всех подстановок степени n , имеющих N циклов. В предположении, что на этом множестве задано равномерное распределение и $n, N \rightarrow \infty$, получены асимптотики математического ожидания и дисперсии и доказаны пуассоновские и локальная нормальные теоремы для случайной величины, равной числу циклов заданной длины в случайно выбранной подстановке. Найдены асимптотические разложения для числа подстановок степени n с N циклами, имеющих ровно $k = k(n, N)$ циклов фиксированной длины.

Рассмотрим множество всех подстановок степени n , имеющих N циклов. Число таких подстановок равно $|s(n, N)|$, где $s(n, N)$ — числа Стирлинга первого рода, $N = 1, \dots, n$ (см. [1], с. 86). Пусть k — целое неотрицательное число и r — натуральное число. Далее, если не оговорено противное, r считается фиксированным. Предполагая, что на указанном множестве подстановок задано равномерное распределение, на соответствующем вероятностном пространстве определим случайную величину $\eta_r(n, N)$, равную числу циклов длины r в случайно выбранной подстановке. Тогда, аналогично [2], можно утверждать, что при $0 < x < 1$ и $k = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = k\} = \binom{N}{k} (l_r(x))^k (1 - l_r(x))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}, \quad (1)$$

где

$$l_r(x) = -\frac{x^r}{r \ln(1-x)}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N,$$

$\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение логарифмического ряда с параметром x , то есть такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = m\} = l_m(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

сумма

$$S_{N-k}^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}$$

есть сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_i^{(r)}$, $i = 1, 2, \dots$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = m\} = \mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = m\} = \mathbf{P}\{\xi_i = m/\xi_i \neq r\} = \frac{l_m(x)}{1 - l_r(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad m \neq r.$$

При $m = r$

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = m\} = 0, \quad i = 1, \dots, N - k.$$

Из этих условий следует, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{N!x^n}{(-\ln(1-x))^N n!} |s(n, N)|, \quad (3)$$

поскольку (см. [2], с. 297)

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{N!} \sum_{k_1 + \dots + k_N = n} \frac{1}{k_1 \dots k_N}.$$

где суммирование проводится по всем положительным целым числам $k_1, \dots, k_N$ таким, что $k_1 + \dots + k_N = n$. Нетрудно подсчитать, что с учетом (2)

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \frac{x^r - x(1-x)^{-1}}{\ln(1-x) + x^r/r}.$$

Выберем параметр $x = x_0 \in (0, 1)$ так, чтобы

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = (N - k)\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = n - kr.$$

В этом случае

$$\frac{x_0^r - x_0(1-x_0)^{-1}}{\ln(1-x_0) + x_0^r/r} = \frac{n - kr}{N - k}.$$

Положим $\alpha = (n - kr)/(N - k)$, тогда параметр $x_0 \in (0, 1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x_0^r - x_0(1-x_0)^{-1}}{\ln(1-x_0) + x_0^r/r} = \alpha. \quad (4)$$

Легко проверить, что при $\alpha > 1$ и $r \geq 2$ уравнение (4) имеет единственный корень x_0 , принадлежащий интервалу $(0, 1)$ (при $r = 1$ это верно, если $\alpha > 2$).

Далее будем считать, что при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что

$$N - k \rightarrow \infty, \quad 1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n - kr}{N - k} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (5)$$

где α_0, α_1 — некоторые постоянные.

Заметим, что при условиях (5) параметры n, N меняются в центральной области [2]. Кроме того, из (5) следует, что $N < n$.

Пусть $M_{kr}(n, N)$ — число подстановок степени n , имеющих N циклов в том числе ровно k циклов длины r . Тогда

$$M_{kr}(n, N) = |s(n, N)| \mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = k\}. \quad (6)$$

Чтобы оценить числа $M_{kr}(n, N)$ и вероятности $\mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = k\}$ при $n, N \rightarrow \infty$ и выполнении условий (5), используем (1) и (6), полагая $x = x_0$. Согласно (1), (3), (6),

$$M_{kr}(n, N) = \binom{N}{k} (l_r(x_0))^k (1 - l_r(x_0))^{N-k} \times \frac{(-\ln(1 - x_0))^N n!}{N! x_0^n} \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Для подсчета вероятности $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ вычислим дисперсию $\mathbf{D}\xi_1^{(r)}$. Введем обозначение $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(r)}$. Нетрудно показать, что при $x = x_0$, согласно (2),

$$\sigma_r^2 = \frac{rx_0^r - x_0(1 - x_0)^{-2}}{\ln(1 - x_0) + x_0^r/r} - \alpha^2. \quad (8)$$

Если $r \geq 2$ и $\alpha > 1$ или $r = 1$ и $\alpha > 2$, то в обоих случаях $\sigma_r^2 > 0$, поскольку при наших условиях распределение случайной величины $\xi_1^{(r)}$ невырожденное. Справедливы равенства

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = n - kr, \quad \mathbf{D}S_{N-k}^{(r)} = (N - k)\sigma_r^2.$$

Далее будем считать, что $\sigma_r > 0$. Применяя при $n, N \rightarrow \infty$ и условиях (5) локальную нормальную теорему к сумме $S_{N-k}^{(r)}$, получаем, что при $r \geq 2$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N - k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N - k}\right)\right). \quad (9)$$

При $r = 1$ равенство (9) верно, если $\alpha_0 > 2$.

Оценки (7) и (9) дают возможность утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (5), причем $\alpha_0 > 2$ при $r = 1$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$M_{kr}(n, N) = \binom{N}{k} (l_r(x_0))^k (1 - l_r(x_0))^{N-k} \times \frac{n!(-\ln(1 - x_0))^N}{N! x_0^n \sigma_r \sqrt{2\pi(N - k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N - k}\right)\right), \quad (10)$$

где x_0 — единственный корень уравнения (4), принадлежащий интервалу $(0, 1)$, и величины $l_r(x_0)$ и $\sigma_r > 0$ определены в (2) и (8).

Формула (10) позволяет при условиях теоремы 1 оценить число подстановок с k циклами длины r в классе подстановок степени n , имеющих N циклов. В случае, когда рассматривается симметрическая группа степени n , эта задача была решена В. Л. Гончаровым в [3]. В [4] отмечалось, что при попытках анализа асимптотического поведения характеристик цикловой структуры случайных подстановок с распределением, отличным от равномерного на симметрической группе степени n , возникают существенные трудности. В этом направлении отметим работы [5–7] и [10], где, в частности, изучался вопрос о распределении числа циклов длины r

в случайных подстановках с равномерным распределением на некоторых подмножествах симметрической группы. Однако, рассматриваемый в работе случай, когда в случайной подстановке степени n задано число циклов N и при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия (5), в этих работах не изучался.

Чтобы уточнить формулы (9) и (10), оценим коэффициенты ряда Крамера–Эссеена, дающего асимптотическое разложение остаточного члена вида $O(1/(N-k))$ в этих формулах. Поскольку при $x = x_0$

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = n - kr,$$

такие коэффициенты могут быть отличны от нуля только при целых отрицательных степенях вида $(N-k)^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$. Известно [8], что эти коэффициенты выражаются через кумулянты $\chi_s^{(r)}$ порядка s случайной величины $\xi_1^{(r)}$, $s = 3, 4, \dots$. При условиях теоремы 1 указанное асимптотическое разложение имеет вид

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} \sim \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (N-k)^{-m} \right) \quad (11)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. В частности, при $m = 1$

$$A_1 = \frac{\chi_4^{(r)}}{8\sigma_r^4} - \frac{5(\chi_3^{(r)})^2}{24\sigma_r^6}.$$

Вычисляя значения $\chi_3^{(r)}$ и $\chi_4^{(r)}$ и подставляя их в эту формулу (мы опускаем промежуточные выкладки), получим, что

$$A_1 = -\frac{5}{24\sigma_r^6} (f(x_0, r) - \alpha(\alpha-1)(\alpha-2))^2 + \frac{1}{8\sigma_r^4} (g(x_0, r) + (6\alpha-4)f(x_0, r) - 7\alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2)) - \frac{(3\alpha-2)(3\alpha-4)}{8\sigma_r^2} - \frac{3}{8}, \quad (12)$$

где

$$f(x_0, r) = \frac{(r-1)(r-2)x_0^r - 2x_0^3(1-x_0)^{-3}}{\ln(1-x_0) + x_0^r/r}, \quad (13)$$

$$g(x_0, r) = \frac{(r-1)(r-2)(r-3)x_0^r - 6x_0^4(1-x_0)^{-4}}{\ln(1-x_0) + x_0^r/r}. \quad (14)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 остаточный член вида $O(1/(N-k))$ в (10) можно заменить на

$$A_1(N-k)^{-1} + O((N-k)^{-2})$$

с равномерным относителем $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ остаточным членом $O((N-k)^{-2})$ и значением A_1 , определяемым равенствами (8), (12)–(14).

Приведенная в следствии 1 оценка дает высокую точность приближения даже при небольших значениях n и N . Так, например, при $n = 9$, $N = 3$, $k = 0$, $r = 1$

имеем $\alpha = 3$ и $x_0 = 0,645007 \dots$ с точностью до 10^{-6} , поэтому первое приближение, вычисленное согласно (10) путем отбрасывания слагаемых порядка $O(1/(N-k))$, дает оценку 27,453 (с точностью до целых). Второе приближение, вычисленное согласно следствию 1 путем отбрасывания слагаемых порядка $O((N-k)^{-2})$, дает оценку 26,372 вместо точного значения $M_{01}(9, 3) = 26,432$ с относительной погрешностью порядка 0,002. Заметим, что при $k = 0$ и $r = 1$ числа $M_{01}(n, N)$ — это так называемые присоединенные числа Стирлинга первого рода [1].

Аналогичные (12), но более сложные формулы для коэффициентов A_m в (11) можно выписать и при $m \geq 2$.

Другой способ определения коэффициентов A_m основан на применении метода перевала и исходит из равенства

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(P(z))^{N-k}}{z^{n-kr+1}} dz, \quad (15)$$

где

$$P(z) = \frac{\ln(1 - x_0 z) + x_0^r z^r / r}{\ln(1 - x_0) + x_0^r / r}. \quad (16)$$

Интегрирование в (15) осуществляется по окружности с центром в нуле радиуса, меньшего x_0^{-1} (пробегаемой в положительном направлении). Для логарифма, как обычно, выбирается та непрерывная ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси.

Уравнение точки перевала

$$\frac{z(z)P'(z)}{P(z)} = \alpha$$

с учетом (4) и (16) дает единственное значение корня $z = 1$, лежащее на вещественной положительной полуоси. При этом

$$P(1) = 1, \quad P'(1) = \alpha, \quad P''(1) = \sigma_r^2 + \alpha(\alpha - 1).$$

Учитывая эти равенства и используя стандартную технику метода перевала [9], нетрудно из (15) и (16) получить, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 остаточный член вида $O((N-k)^{-1})$ в (10) можно заменить на ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m (N-k)^{-m},$$

если знак равенства заменить символом асимптотического разложения, справедливого равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Коэффициенты A_m этого разложения определяются из соотношений

$$A_m = -\frac{i\sigma_r(2m)!}{m! 2^{2m+1/2}} a_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s u^s = \frac{\theta'(u)}{\theta(u)}$$

при всех достаточно малых $|u|$,

$$a_0 = \frac{i\sqrt{2}}{\sigma_r}$$

и функция $\theta(u)$ является аналитическим в окрестности нуля решением дифференциального уравнения

$$\theta'(u) \left(\frac{P'(\theta(u))}{P(\theta(u))} - \frac{\alpha}{\theta(u)} \right) + 2u = 0,$$

удовлетворяющим начальному условию $\theta(0) = 1$, значение функции P определяется равенством (16).

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений $k = Nl_r(x_0) + x\sqrt{N}$, для которых величина x заключена в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{E}\eta_r(n, N) = Nl_r(x_0)(1 + O(1/\sqrt{N})),$$

$$\mathbf{D}\eta_r(n, N) = N(\sigma^{(r)})^2(1 + O(1/\sqrt{N})),$$

где

$$(\sigma^{(r)})^2 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma^2}(1 - l_r(x_0))^2 l_r(x_0) > 0, \quad (17)$$

$$\sigma^2 = -\frac{x_0(\ln(1 - x_0) + x_0)}{(1 - x_0)^2 \ln^2(1 - x_0)} > 0, \quad (18)$$

величина σ_r^2 определена в (8).

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что в обозначениях (1), (2) и (18) $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$. Применяя к сумме $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ при условиях теоремы 3 локальную нормальную теорему и учитывая равенства

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{rl_r(x_0)}{(1 - x_0)x_0^{r-1}} \quad (19)$$

и

$$\frac{n - mN}{\sqrt{N}} = (r - \alpha)x$$

(это следует из (2), (4), (5) и (19)), получаем, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{(r - \alpha)^2 x^2}{2\sigma^2}\right) (1 + O(1/\sqrt{N})). \quad (20)$$

Следовательно, согласно (3)

$$|s(n, N)| = \frac{n!(-\ln(1 - x_0))^N}{N!x^n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left(\frac{(r - \alpha)^2 x^2}{2\sigma^2}\right) (1 + O(1/\sqrt{N})),$$

и поэтому согласно (5) и условиям теоремы 3

$$\left| \frac{s(n - r, N - 1)}{s(n, N)} \right| = \frac{Nx_0^r}{r! \binom{n}{r} (-\ln(1 - x_0))} (1 + O(1/\sqrt{N})).$$

Из (2) следует, что

$$\mathbf{E}\eta_r(n, N) = \binom{n}{r} (r-1)! \left| \frac{s(n-r, N-1)}{s(n, N)} \right| = Nl_r(x_0)(1 + O(1/\sqrt{N})).$$

Аналогично устанавливается асимптотическая формула для дисперсии $\mathbf{D}\eta_r(n, N)$, соответствующие (существенно более громоздкие) выкладки мы опускаем. Теорема доказана.

Теорема 4. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений $k = Nl_r(x_0) + x\sqrt{N}$, для которых величина x заключена в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = k\} = \frac{1}{\sigma^r \sqrt{2\pi N}} \times \exp \left(-\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{l_r(x_0)(1-l_r(x_0))} - \frac{(r-\alpha)^2}{\sigma^2} \right) (1 + O(1/\sqrt{N})) \right), \quad (21)$$

где положительные значения σ^2 и $\sigma^{(r)}$ определены в (8), (17) и (18).

Доказательство. Оценка (21) следует из (1), (9) и (20), если учесть, что при условиях теоремы 4 по локальной теореме Муавра–Лапласа

$$\begin{aligned} & \binom{N}{k} (l_r(x_0))^k (1-l_r(x_0))^{N-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N l_r(x_0)(1-l_r(x_0))}} \exp \left(-\frac{x^2}{2l_r(x_0)(1-l_r(x_0))} \right) (1 + O(1/\sqrt{N})), \end{aligned}$$

и согласно (9)

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi N(1-l_r(x_0))}} (1 + O(1/\sqrt{N}))$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Теорема доказана.

Заметим, что метод доказательства теорем 1 и 4 по своей идее восходит к работам [11] и, особенно, [12].

Предположим теперь, что условие (5) изменено следующим образом:

$$1 < \beta_0 \leq \beta = \frac{n}{N} \leq \beta_1 < \infty \quad (22)$$

где β_0, β_1 — постоянные.

При выполнении условия (22) параметры n, N по-прежнему меняются в центральной области.

Если отказаться от ограничения, состоящего в том, что r фиксировано, то справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (22) и $Nl_r(x_1) \rightarrow \lambda$, где $\lambda > 0$ и $x = x_1$ — единственный корень уравнения

$$\frac{x}{(x-1)\ln(1-x)} = \beta, \quad (23)$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Нетрудно проверить, что уравнение (23) имеет для любого значения $\beta > 1$ единственный корень $x = x_1 \in (0, 1)$ (см. [13] или работу автора [14]). Нужно доказать, что при условиях теоремы 5

$$\mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Для обоснования оценки (24) используем (1), полагая $x = x_1$. Применяя пуассоновское приближение для биномиального распределения, находим, что

$$\binom{N}{k} (l_r(x_1))^k (1 - l_r(x_1))^{N-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, нам достаточно установить, что при $x = x_1$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^r = n - kr\} = \mathbf{P}\{S_N = n\} (1 + o(1)). \quad (25)$$

Легко подсчитать, что в использованных выше обозначениях

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_1 &= \frac{x_1}{(x_1 - 1)\ln(1 - x_1)} = \beta = \frac{n}{N}, \\ \mathbf{D}\xi_1 &= \frac{\beta(\beta x_1 - \beta + 1)}{1 - x_1} > 0. \end{aligned}$$

Применяя для оценки вероятности $\mathbf{P}\{S_N = n\}$ локальную нормальную теорему, получаем, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} (1 + O(1/N)). \quad (26)$$

Далее,

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \frac{x_1^r - x_1(1 - x_1)^{-1}}{\ln(1 - x_1) + x_1^r/r}.$$

При наших условиях согласно (2) и (23) равенство $Nl_r(x_1) = \lambda + o(1)$ означает, что

$$\frac{x_1^r}{r} = \frac{\lambda x_1}{\beta N(1 - x_1)} (1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \beta + \frac{(\beta - r)\lambda}{N} + o(1/N),$$

и поэтому

$$(\mathbf{E}\xi_1^{(r)})^2 = \beta^2 (1 + O(\ln N/N)),$$

поскольку $r = O(\ln N)$ (точнее, $r = (\ln N - \ln \ln N)/\ln x_1^{-1} + O(1)$). Аналогично получаем, что

$$\mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^2 = \frac{\beta}{1 - x_1}(1 + O(\ln^2 N/N)).$$

Из этих оценок следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\xi_1^{(r)} &= \frac{\beta(\beta x_1 - \beta + 1)}{1 - x_1}(1 + O(\ln^2 N/N)) \\ &= \mathbf{D}\xi_1(1 + O(\ln^2 N/N)). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{n - kr}{N - k} = \beta(1 + O(\ln N/N)).$$

По локальной нормальной теореме получаем, что согласно (26)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(N-k)\mathbf{D}\xi_1^{(r)}}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(n - kr - (N-k)\mathbf{E}\xi_1^{(r)})^2}{2(N-k)\mathbf{D}\xi_1^{(r)}}\right)(1 + O(1/\sqrt{N})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\xi_1}}(1 + O(1/\sqrt{N})) = \mathbf{P}\{S_N = n\}(1 + O(1/\sqrt{N})), \end{aligned}$$

что доказывает (25). Теорема доказана.

Заметим, что теорему 5 можно также обосновать методом моментов. С помощью несложных комбинаторных рассуждений легко проверить, что факториальные моменты случайной величины $\eta_r(n, N)$ определяются из соотношений

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = \frac{n!}{(n - rj)! r^j} \left| \frac{s(n - rj, N - j)}{s(n, N)} \right|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Для величины $|s(n, N)|$ справедливо интегральное представление ([13, см. также [14])

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{2\pi N!} \oint \frac{(-\ln(1 - z))^N}{z^{n+1}} dz. \quad (28)$$

Интегрирование в (28) осуществляется по окружности радиуса, меньшего 1, с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении. Если этот радиус выбрать равным x_1 и использовать метод перевала для оценки интеграла в (28), то согласно [13] получим, что при условии (22)

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{N!} \sqrt{\frac{1 - x_1}{2\pi n(\beta x_1 - \beta + 1)}} \frac{(-\ln(1 - x_1))^N}{x_1^n} (1 + O(1/N)) \quad (29)$$

равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$. Для величины $|s(n - rj, N - j)|$ справедливо аналогичное интегральное представление, получаемое из (28) с помощью замены n на $n - rj$ и N на $N - j$. Применяя метод перевала к получившемуся после указанной

замены интегралу и учитывая, что $r = O(\ln N)$, нетрудно проверить, что оценка (29) остается верной и в этом случае, если вместо n взять $n - rj$, вместо N взять $N - j$ и остаточный член вида $O(1/N)$ заменить на $o(1)$. Поэтому

$$\left| \frac{s(n - rj, N - j)}{s(n, N)} \right| = \frac{(n - rj)! N!}{n! (N - j)!} \frac{x_1}{(-\ln(1 - x_1))^j} (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Согласно (27), это означает, что

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = N(N - 1) \dots (N - j + 1) \frac{x_1^{rj}}{r^j (-\ln(1 - x_1))^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при условиях теоремы 5

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Этим доказательство теоремы 5 методом моментов завершается.

Теорема 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{N}{\ln n} \rightarrow r\lambda, \quad \lambda > 0. \quad (30)$$

Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $r = 1, 2, \dots$

Доказательство. Используем метод моментов, исходя из формул (27). Известно [15], что, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n - N \geq Cn^a$, где C и a — положительные постоянные и $0 < a < 1$, то справедлива первая формула Мозера-Вимана

$$|s(n, N)| = \frac{\Gamma(n + R)}{R^N \Gamma(R) \sqrt{2\pi H}} (1 + o(1)), \quad (31)$$

где R — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R}{R + k} = N,$$

Γ — гамма-функция Эйлера и

$$H = N - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^2}{R + k^2}.$$

Если предположить, что R_j — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n-rj-1} \frac{R_j}{R_j + k} = N - j$$

и

$$H_j = N - j - \sum_{k=0}^{n-rj-1} \frac{R_j^2}{(R_j + k)^2}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

то из (30) легко вывести, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R+k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + O(1) = \ln n + O(1), \\ R &= \frac{N}{\ln n} (1 + O(1/\ln n)) = r\lambda(1 + o(1)), \\ R_j &= \frac{N}{\ln n} (1 + O(1/\ln n)) = R(1 + O(1/\ln n)), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В частности, $R_j - R = o(1)$, и поскольку

$$\sum_{k=n-rj}^{n-1} \frac{R_j}{R_j+k} = O(1/n),$$

мы видим, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R_j+k} &= \ln n + O(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R+k} + O(R_j - R) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R+k} + o(1), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R_j+k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{R+k} \right) (1 + o(1/\ln n)),$$

и поэтому, согласно (30),

$$\begin{aligned}\frac{R_j}{R} &= \left(1 - \frac{j}{N} + O\left(\frac{1}{nN}\right) \right) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{j}{r\lambda \ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{R_j}{R} \right)^N &= e^{-j} (1 + o(1)), \\ \frac{(n - rj + R_j)^{n-rj+R_j}}{(n+R)^{n+R}} &= n^{-rj} e^{-rj} n^{R_j-R} (1 + o(1)),\end{aligned}$$

где

$$R_j - R = -\frac{j}{\ln n} + o(1/\ln n),$$

так что

$$n^{R_j-R} = e^{-j} (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$\frac{(n - rj + R_j)^{n-rj+R_j}}{(n+R)^{n+R}} = n^{-rj} \exp(-(r+1)j) (1 + o(1)),$$

и из соотношений

$$\begin{aligned} H &= N + O(1), \\ H_j &= N + O(1), \\ \frac{H_j}{H} &= (1 + O(1/N)), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

и формулы Стирлинга для гамма-функции с учетом (31) получаем, что

$$\left| \frac{s(n - rj, N - j)}{s(n, N)} \right| = \frac{(n - rj + R_j)^{n - rj + R_j}}{(n + R)^{n + R}} \times R_j^j \exp((r + 1)j - (R_j - R))(1 + o(1)) = (r\lambda)^j n^{-rj} (1 + o(1)).$$

Согласно (27), отсюда следует, что при условиях теоремы 6

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 1. Известно [3], что число циклов N подстановки, выбранной случайно равновероятно из всей симметрической группы степени n , при больших значениях n имеет порядок $\ln n$ (точнее, случайная величина N асимптотически нормальна с параметрами $(\ln n, \ln n)$). В этом случае отношение $N/\ln n$ при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к 1, и случайная величина, равная числу циклов длины r в такой подстановке, имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1/r$, $r = 1, 2, \dots$ (см. [3]). Это обстоятельство соответствует условиям теоремы 6, поскольку $\max_{1 \leq N \leq n} |s(n, N)|$ достигается при значениях N порядка $\ln n$ (см. [16], с. 290).

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N(n/N - 1)^{r-1} \rightarrow \frac{r\lambda}{2^{r-1}}, \quad \lambda > 0. \quad (32)$$

Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $r = 3, 4, \dots$

С использованием соотношений (27) и (31), теорема 7 может быть доказана аналогичными методами (соответствующие выкладки достаточно громоздки, поэтому мы их опускаем).

Замечание 2. При $r = 2$ условие (32) означает, что $n - N = \lambda \in N$ при всех достаточно больших значениях n и N . Используя вторую формулу Мозера–Вимана [15] и равенства (27), нетрудно проверить, что в этом случае

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = (\lambda)_j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при $r = 2$ из (32) следует, что распределение случайной величины $\eta_r(n, N)$ асимптотически вырождено в точку λ .

Список литературы

1. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1962.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, (1944) 8, №1, 3–48.
4. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
5. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. *Матем. сб.* (1976) 99, №1, 121–133.
6. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., О некоторых классах случайных величин на циклах подстановок. *Матем. сб.* (1979) 108, №1, 91–104.
7. Тараканов В. Е., Чистяков В. П., О цикловой структуре случайных подстановок. *Матем. сб.* (1975) 96, №4, 594–600.
8. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
9. Евграфов М. А., *Асимптотические оценки и целые функции*. Физматлит, Москва, 1962.
10. Павлов А. И., О числе и цикловой структуре подстановок некоторых классов. *Матем. сб.* (1984) 124, №4, 536–556.
11. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., О цикловой структуре случайных подстановок. *Матем. заметки* (1975) 18, №6, 929–938.
12. Колчин В. Ф., Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок. *Теория вероятн. и ее применения* (1971) 16, №1, 67–82.
13. Good I. J., An asymptotic formula for the differences of the powers at zero. *Ann. Math. Statist.* (1961) 32, 249–256.
14. Тимашёв А. Н., Об асимптотических разложениях для чисел Стирлинга первого и второго рода. *Дискретная математика* (1998) 10, №3, 148–159.
15. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
16. Риекстыньш Э., *Оценки остатков в асимптотических разложениях*. Рига, Зинатне, 1986.

Статья поступила 25.05.2000.