Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Вороненко, О количестве метрических функций булева куба, *Дискрет. матем.*, 2001, том 13, выпуск 4, 116–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:11:53

УДК 519.716

О количестве метрических функций булева куба

© 2001 г. А. А. Вороненко

В работе найден предел корня степени 2^n (установлена асимптотика логарифма) количества функций булева куба размерности n , переводящих соседние вершины в соседние или совпадающие вершины произвольного графа. Данный результат обобщен для отображений вершин декартовой степени произвольных графов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 00-01-00351 и 01-01-00266.

Среди задач о подсчете числа функций наиболее интенсивно исследовалась проблема Дедекинда, состоящая в оценке числа монотонных булевых функций. В работах [1, 2] найден порядок логарифма числа монотонных булевых функций. В [3] установлена асимптотика логарифма числа монотонных булевых, а в [4] числа монотонных k -значных функций. Позднее [5] была найдена асимптотика мощности для класса монотонных булевых функций. В работе [6] получена асимптотика логарифма мощности предполных классов в P_k . Также оценивалось число дискретных аналогов гладких функций (см. [7]), функций, для которых из близости точек области определения следует близость значений функции [8], функций, которые удовлетворяют дискретному варианту условия Липшица [9, 10]. Из близких к рассматриваемой следует отметить задачу о числе пороговых функций (см. [11]).

Пусть $B = \{0, 1\}$. Через B^n обозначим множество всех n -мерных векторов с координатами из B . Весом набора x называется сумма его координат. Будем называть наборы x и y соседними тогда и только тогда, когда они отличаются ровно в одной координате.

Пусть $H = (V, E)$ — произвольный граф. Функции $f: B^n \rightarrow V(H)$, переводящие соседние наборы в совпадающие или смежные вершины графа H , будем называть метрическими и обозначать их множество через $F_n(H)$.

Пусть $u \in V(H)$. Тогда положим $\tilde{\partial}u = \{u\} \cup \{v \mid (u, v) \in E(H)\}$. Пусть $A \subseteq V(H)$. Назовем псевдограницей A и обозначим через $\tilde{\partial}A$ множество

$$\tilde{\partial}A = \bigcap_{u \in A} \tilde{\partial}u.$$

Соседними могут быть лишь наборы с весами различной четности. Поэтому, когда функция f определена на наборах четного веса, ее можно независимым образом

доопределять на наборах нечетного веса до метрической. Пусть набор x имеет нечетный вес. Через $A(x)$ (тип набора x) будем обозначать множество вариантов значений на наборе x метрической функции, уже определенной на множестве всех наборов четного веса.

Лемма 1. Пусть для набора x нечетного веса задано множество $A(x)$. Тогда существует не более $|\tilde{\partial}A(x)|^n$ различных вариантов значений метрической функции на соседних с x наборах.

Доказательство. Всего существует n соседних с x наборов, на каждом из которых метрическая функция должна принимать значения из множества $\tilde{\partial}A(x)$. Лемма 1 доказана.

Пусть n — натуральная степень двойки. Тогда существует (см. [12], с. 294–295) разбиение C_1 множества B^n на непересекающиеся сферы радиуса 1, центры которых можно разбить на пары, внутри которых наборы попарно отличаются в первой координате. При этом множество всех сфер с центрами в нечетных наборах образует непересекающееся покрытие множества всех наборов четного веса. Обозначим через C_i разбиение, получаемое из C_1 одновременным изменением всех i -х координат центров всех сфер на противоположные. Назовем разбиения $C_1, \dots, C_n$ параллельными и обозначим через S_i множества центров сфер разбиения C_i . Отметим, что

$$\bigcup_{i=1}^n S_i = B^n.$$

Пусть в графе H существует ровно t различных непустых подмножеств вершин с непустой псевдограницей. Будем обозначать их в дальнейшем $A_1, \dots, A_t$.

Лемма 2. Пусть задано множество S центров разбиения булева куба на непересекающиеся сферы радиуса 1 и для всех наборов x нечетного веса, принадлежащих S , заданы множества $A(x)$. Пусть число наборов x нечетного веса таких, что $x \in S$ и $A(x) = A_j$, равно m_j . Тогда существует не более

$$|\tilde{\partial}A_1|^{nm_1} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{nm_t}$$

вариантов значений метрической функции на множестве наборов четного веса.

Доказательство. На каждой сфере с центром в точке x по предыдущей лемме существует не более $|\tilde{\partial}A(x)|^n$ различных вариантов значения метрической функции. Если мы перемножим количества вариантов по всем сферам, то получим утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть для всех наборов x нечетного веса заданы множества $A(x)$. Пусть $|\{x: A(x) = A_j\}| = M_j$. Пусть $|\{x: (x \in S_i) \& (A(x) = A_j)\}| = m_{i,j}$. Тогда существует номер p такой, что

$$|\tilde{\partial}A_1|^{nm_{p,1}} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{nm_{p,t}} \leq |\tilde{\partial}A_1|^{M_1} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{M_t}.$$

Назовем разбиение C_p особым.

Доказательство. Предположим, что для всех i выполнено неравенство

$$|\tilde{\partial}A_1|^{nm_{i,1}} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{nm_{i,t}} > |\tilde{\partial}A_1|^{M_1} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{M_t}.$$

Тогда

$$|\tilde{\partial}A_1|^{n \sum_{i=1}^n m_{i,1}} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{n \sum_{i=1}^n m_{i,t}} > |\tilde{\partial}A_1|^{nM_1} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{nM_t}.$$

Но последнее неравенство противоречиво, так как $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = M_j$. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(H)|} = \max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A| |\tilde{\partial}A|}.$$

Доказательство. Рассмотрим оценку снизу. Любая функция, принимающая на наборах нечетного веса значения из множества A , а на наборах четного веса значения из $\tilde{\partial}A$ является метрической, поэтому

$$|F_n(H)| \geq \max_{A \subseteq V(H)} (|A| |\tilde{\partial}A|)^{2^{n-1}}.$$

Существование предела следует из того, что множество

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(H)$$

является инвариантным классом по С. В. Яблонскому [13]. Для получения верхней оценки рассмотрим подпоследовательность чисел n , являющихся натуральными степенями двойки. Мы будем строить всевозможные функции из множества $F_n(H)$ следующим образом:

- (1) сначала для всех $j = 1, \dots, t$ выберем числа M_j наборов нечетного веса x , для которых $A(x) = A_j$.
- (2) Рассмотрим n параллельных разбиений булева куба на сферы и выберем среди них особое.
- (3) После этого выберем типы наборов $A(x)$ нечетного веса x центров сфер, принадлежащих особому разбиению.
- (4) Потом определим функцию на наборах четного веса.
- (5) Наконец, доопределим функцию на наборах нечетного веса.

Оценим сверху число вариантов определения функций на каждом шаге.

- (1) Пусть $|V(H)| = h$. Тогда $t < 2^h$. Набор из t целых неотрицательных чисел, сумма которых равна 2^{n-1} , можно выбрать не более, чем $(2^{n-1})^{2^h}$ способами.
- (2) Существует n вариантов выбора особого разбиения.

- (3) Каждый набор может иметь не более $t < 2^h$ типов. Число наборов нечетного веса, центров сфер, принадлежащих особому разбиению, равно $2^{n-1}/n$. Таким образом, на этом этапе число вариантов не больше

$$(2^h)^{2^{n-1}/n}.$$

- (4) Любой набор четного веса лежит на какой-то сфере с центром в точке особого разбиения, тип которой был выбран на третьем этапе. В силу леммы 4 при этих ограничениях на наборах четного веса возможно не более

$$|\tilde{\partial}A_1|^{M_1} \dots |\tilde{\partial}A_t|^{M_t}$$

вариантов значения функций.

- (5) Так как типы всех наборов нечетного веса однозначно определяются значениями функции на наборах четного веса, то на нечетных наборах функция доопределяется $|A_1|^{M_1} \dots |A_t|^{M_t}$ способами.

Перемножая полученные оценки, получим, что

$$|F_n(H)| \leq (2^{n-1})^{2^h} n (2^h)^{2^{n-1}/n} \max_{M_1, \dots, M_t | M_1 + \dots + M_t = 2^{n-1}} \prod_{j=1}^t (|A_j| |\tilde{\partial}A_j|)^{M_j}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$2^n \sqrt{|F_n(H)|} \leq n^{1/2} 2^{(n-1)2^h-n} 2^{h/(2n)} \max_{1 \leq j \leq t} (|A_j| |\tilde{\partial}A_j|)^{1/2}.$$

Первые три сомножителя правой части последнего неравенства стремятся к 1 при $n \rightarrow \infty$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{|F_n(H)|} \leq \max_j (|A_j| |\tilde{\partial}A_j|)^{1/2}.$$

С учетом нижней оценки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{|F_n(H)|} = \max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A| |\tilde{\partial}A|}.$$

Теорема 1 доказана.

Докажем некоторые следствия теоремы 1.

Напомним, что n -й декартовой степенью графа G называется граф с множеством вершин $V(G)^n$, в котором вершины смежны, если они различаются ровно в одной координате так, что соответствующее ребро принадлежит $E(G)$. Пусть графы G, H имеют хотя бы по одному ребру, G^n — декартова n -я степень графа G . Обозначим через $F_n(G, H)$ множество функций $f: V(G^n) \rightarrow V(H)$, переводящих смежные вершины графа G^n в совпадающие или смежные вершины графа H .

Лемма 4. Если G — двудольный граф, имеющий k вершин, то

$$|F_n(G, H)| \geq \max_{A \subseteq V(H)} (|A| |\tilde{\partial}A|)^{k^n/2}.$$

Доказательство. Любая декартова степень произвольного двудольного графа является двудольным графом, поэтому G^n — двудольный граф. Раскрасим его вершины правильным образом в два цвета. Тогда любая функция, принимающая на вершинах первого цвета значения из множества A , а на вершинах второго из $\tilde{\partial}A$, принадлежит $F_n(G, H)$. Лемма 4 доказана.

Приведем еще одну нижнюю оценку числа метрических функций.

Предложение 1 ([8]). Пусть G — граф, имеющий k вершин. Пусть Q — клика (полный подграф) графа H . Тогда

$$|F_n(G, H)| \geq |V(Q)|^{k^n}.$$

Теорема 2. Если граф G имеет k вершин и хотя бы одно ребро, то для любого графа H

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(G, H)|} \leq \max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|},$$

если при этом граф G — двудольный или наибольшая мощность клики графа H равна

$$\max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(G, H)|} = \max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|}.$$

Доказательство. В [8] было доказано (частный случай теоремы 2 о сравнении с булевым кубом [8, с.205–206] для параметров ψ_n — суммы n переменных и $\alpha = 1$), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(G, H)|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(H)|}.$$

В силу теоремы 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(H)|} = \max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|}.$$

Второе утверждение теоремы следует из леммы 4, предложения 1 и теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Задача нахождения величины

$$\max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|}$$

является NP -трудной (к ней полиномиально сводится задача КЛИКА), но для ряда семейств графов ее нетрудно вычислить.

Пример 1. Величина $\max_{A \subseteq V(H)} \sqrt{|A||\tilde{\partial}A|}$ для планарных графов H находится как максимум из четырех нижних оценок

$$\max_{v \in V(H)} \sqrt{\deg(v) + 1}, \quad \max_{u, v \in V(H)} \sqrt{2\tilde{\partial}\{u, v\}}$$

и 4 или 3, если H содержит соответственно полный подграф K_4 или K_3 .

Доказательство является переборным и основывается на теореме Понтрягина–Куратовского.

Список литературы

1. Коробков В. К., Некоторые обобщения задачи расшифровки монотонных функций алгебры логики. *Дискретный анализ* (1965) **5**, 19–25.
2. Ансель Ж., О числе монотонных булевых функций n переменных. *Киберн. сб.* (1968) **5**, 53–57.
3. Kleitman D., On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1969) **21**, №3, 677–682.
4. Алексеев В. Б., О числе k -значных монотонных функций. *Докл. АН СССР* (1973) **208**, №3, 505–508.
5. Коршунов А. Д., Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций. *Докл. АН СССР* (1977) **233**, №4, 543–546.
6. Алексеев В. Б., О числе функций в классах, задаваемых центральными предикатами. *Матем. заметки* (1985) **37**, №6, 880–885.
7. Аманжаев Г. Г., О дискретных аналогах выпуклых функций. *Матем. вопросы киберн.* (1998) **7**, 54–66.
8. Вороненко А. А., О количестве метрических дискретных функций n переменных. *Матем. вопросы киберн.* (1998) **7**, 203–212.
9. Вороненко А. А., О росте количества липшицевых дискретных функций при растущей размерности области определения. *Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика* (2000), №2, 3–7.
10. Сапоженко А. А., О числе трехзначных функций, удовлетворяющих условию Липшица. В сб.: *Труды II Международной конференции Дискретные модели в теории управляющих систем*. Диалог-МГУ, 1997, с. 50–51.
11. Зуев Ю. А., Пороговые функции и пороговые представления булевых функций. *Матем. вопросы киберн.* (1994) **5**, 5–62.
12. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
13. Яблонский С. В., Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. *Пробл. киберн.* (1959) **2**, 75–121.

Статья поступила 04.07.2001.