Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Буравлев, Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 24–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:23:57

Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник

© 2000 г. С.М. Буравлев

В работе изучаются предельные распределения случайных величин, связанных с повторениями с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний, причем множество перестановок образует латинский прямоугольник. Исследования проводятся в случае последовательности независимых испытаний в схеме серий. Ранее А.М. Зубковым и В.Г. Михайловым изучался случай точных повторений, автором — случай, когда соответствующее перестановкам множество подстановок совпадало с симметрической группой.

1. Постановка задачи. Основные результаты

Пусть $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ — последовательность независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин, принимающих значения из множества $A = \{1, 2, \dots, v\}$ и

$$P(x_i = s) = p_s(N), \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, v, \quad \bar{p} = (p_1(N), \dots, p_v(N))$$

(в дальнейшем для краткости $p_s(N)$ обозначим через p_s), Ω — некоторое подмножество подстановок вида $\begin{pmatrix} 1 & \dots & v \\ \omega_1 & \dots & \omega_v \end{pmatrix}$ симметрической группы S_v , $\Omega \subseteq S_v$.

Определим по $X_i(n) = (x_i, \dots, x_{i+n-1})$ и $X_j(n) = (x_j, \dots, x_{j+n-1})$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N - n + 1$, множество $Z(X_i(n), X_j(n)) \subseteq \Omega$ всех таких подстановок, что $x_{j+t} = Z(x_{i+t})$ при $t = 0, \dots, n - 1$ и любой $Z \in Z(X_i(n), X_j(n))$.

Определим также случайные величины-индикаторы

$$\eta_{ij}(\Omega, n) = 1 \iff Z(X_i(n), X_j(n)) \neq \emptyset.$$

В работе А.М. Зубкова и В.Г. Михайлова [1] исследовались предельные распределения случайных величин, связанных с повторениями в последовательности независимых испытаний. В этом случае $\eta_{ij}(\Omega, n) = 1$, если $x_{j+t} = x_{i+t}$, $t = 0, \dots, n - 1$, т.е. связь знаков отрезков определялась одной тождественной подстановкой $E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & v \\ 1 & \dots & v \end{pmatrix}$. В работе автора [2] исследовался случай $\Omega = S_v$.

В данной работе рассматривается ситуация, когда нижние строки подстановок $\Omega = \{Z_1, \dots, Z_k\}$ образуют латинский прямоугольник, $\Omega = L_{kv} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$, $k \leq v$. (В латинском прямоугольнике в каждой строке и в каждом столбце все элементы различны (см. [3], с. 33)).

Подобный вид множества Ω возникает, например, при анализе траекторий случайных блужданий. Рассмотрим случайное блуждание $x_1, \dots, x_N$ по множеству

$\{0, 1, \dots, v-1\}$ наименьших неотрицательных вычетов по модулю v , т.е. случайный процесс, удовлетворяющий рекуррентным соотношениям

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k \pmod{v}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в $\{0, 1, \dots, v-1\}$.

Тогда, если $\varepsilon_{j+t} = \varepsilon_{i+t}$, $t = 1, \dots, n-1$, то

$$x_{j+t} = Z(X_{i+t}), \quad t = 1, \dots, n,$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} a \\ a + x_j - x_i \pmod{v} \end{pmatrix}, \quad a = 0, \dots, v-1.$$

В этом случае множество Ω определяется различными степенями подстановок сдвига и их нижние строки образуют латинский квадрат.

Если $\Omega = L_{kv}$, то условие $\eta_{ij}(L_{kv}, n) = 1$ однозначно определяет подстановку Z и можно ввести индикаторы

$$\tilde{\eta}_{ij}(\Omega, n) = 1 \iff Z(X_i(n), X_j(n)) \neq \emptyset$$

и либо $\min(i, j) = 1$, либо $x_{j-1} \neq Z(x_{i-1})$ для любой $Z \in Z(X_i(n), X_j(n))$.

В работе исследуются предельные распределения случайных величин:

$$\begin{aligned} \xi(L_{kv}, n, N) &= \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \eta_{ij}(L_{kv}, n), & \tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) &= \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \tilde{\eta}_{ij}(L_{kv}, n), \\ \tau(L_{kv}, n) &= \min\{N: \xi(L_{kv}, n, N) > 0\}, & \mu(L_{kv}, N) &= \max\{n: \xi(L_{kv}, n, N) > 0\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) = \sum_{t=1}^k (\mathbf{P}(Z_t))^n (1 - \mathbf{P}(Z_t)), \\ \psi_1 &= \psi_1(L_{kv}, n, \bar{p}) = \sum_{t=1}^k (\mathbf{P}(Z_t))^n, \quad p^* = \max_{1 \leq s \leq v} p_s, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}(Z_t) = \sum_{s=1}^v p_s p_{Z_t(s)}, \quad t = 1, \dots, k.$$

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, а величины $n, k, v, p_1, \dots, p_v$ и множество подстановок L_{kv} меняются так, что

$$C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) \rightarrow \lambda > 0.$$

Тогда

(а) если

$$(k(p^*)^n)^2 \leq \psi_1(L_{kv}, n, \bar{p}), \quad (1)$$

и $kn^q N(p^*)^n \rightarrow 0$ для любого натурального $q < \infty$, или

(b) если для некоторого ω , $1 \leq \omega \leq v$, такого, что $p_\omega = p^*$,

$$(p^*)^n \leq \sum_{t=1}^k (p_{Z_t(\omega)})^n \quad (2)$$

и выполняется одна из двух совокупностей условий:

(1) $p^* \leq c < 1$ и $(\max(k, n))^q N(p^*)^n \rightarrow 0$ для любого натурального $q < \infty$, или

(2) $p^* \rightarrow 1$ так, что для любого натурального $q < \infty$

$$n^q k (p^*)^n N \rightarrow 0 \text{ при } \frac{k}{n} (1 - p^*)^{-1/2} < 1$$

и

$$n k^{2q-1} (p^*)^n (1 - p^*)^{1-q} N \rightarrow 0, \text{ при } \frac{k}{n} (1 - p^*)^{-1/2} \geq 1,$$

то для любого фиксированного $s = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = s) \rightarrow \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}.$$

Условия (1) и (2) дают необходимые для доказательства теоремы соотношения между вероятностными свойствами латинского прямоугольника и параметрами n , v , k схемы. Заметим, что если $k = 1$, то условие (1) принимает вид

$$(p^*)^2 \leq \mathbf{P}(Z),$$

и оно выполняется, если Z равна тождественной подстановке. Если нижние строки множества L_{kv} образуют латинский квадрат, то условие (2) выполняется всегда. При $k = 1$ оно выполняется, если для некоторого ω , $1 \leq \omega \leq v$, такого, что $p_\omega = p^*$, верно равенство $\omega = Z(\omega)$.

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, а величины $n, k, v, p_1, \dots, p_v$ и множество подстановок L_{kv} меняются так, что

$$\begin{aligned} p^* &\leq c < 1, \\ n^q N (p^*)^n &\rightarrow 0 \text{ для любого натурального } q < \infty, \\ \mathbf{P}(Z_t) &\rightarrow \delta_t \in [0, 1], \quad t = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (3)$$

подстановки в множестве L_{kv} упорядочены так, что

$$\delta = \delta_1 = \dots = \delta_h > \delta_{h+1} \geq \dots \geq \delta_k, \quad 1 \leq h \leq k,$$

и

$$\begin{aligned} C_N^2(\mathbf{P}(Z_t))^n (1 - \mathbf{P}(Z_t)) &\rightarrow \lambda_t > 0, \quad t = 1, \dots, h, \\ (p^*)^2 &\leq \mathbf{P}(Z_t), \quad t = 1, \dots, h. \end{aligned}$$

Тогда для $y < \delta^{-1}$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E} y^{\xi(L_{kv}, n, N)} = \prod_{t=1}^h \exp \left\{ \frac{\lambda_t (y - 1)}{1 - \delta y} \right\} (1 + o(1)).$$

Заметим, что условие $(p^*)^2 < \mathbf{P}(Z_t)$, $t = 1, \dots, h$, выполняется, например, если существуют попарно различные числа $\omega_1, \dots, \omega_h \in \{1, \dots, v\}$ такие, что $p_{\omega_1} = \dots = p_{\omega_h} = p^*$ и $Z_t(\omega_t) = \omega_t$, $t = 1, \dots, h$.

Из теоремы 2 следует, что вклад в $\xi(L_{kv}, n, N)$ вносят только строки, отвечающие подстановкам с максимальными вероятностями $\mathbf{P}(Z)$, соответствующие им случайные величины асимптотически независимы и имеют в пределе сложное распределение Пуассона.

Следствие 1. Пусть величины $n, k, v, p_1, \dots, p_v$ и множество подстановок L_{kv} меняются так, что

$$\psi(L_{kv}, n, \bar{p}) \rightarrow 0$$

и

$$n^q (p^*)^n k (\psi(L_{kv}, n, \bar{p}))^{-1/2} \rightarrow 0$$

для любого натурального $q < \infty$, тогда

$$\mathbf{P}(\tau(L_{kv}, n)(\psi(L_{kv}, n, \bar{p}))^{-1/2} \leq x) \rightarrow 1 - \exp\{-x^2/2\}$$

для любого действительного $x > 0$.

Теорема 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, а величины $k, v, p_1, \dots, p_v$ и множество подстановок L_{kv} меняются так, что

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z_m)}\right) \frac{\ln N}{\ln \ln N} = \gamma(N) \rightarrow -\infty, \quad \frac{k}{\ln N} \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\psi(L_{kv}, 1, \bar{p}) = \mathbf{P}(Z_m)(1 - \mathbf{P}(Z_m))(1 + o(1))$$

для некоторого m , $1 \leq m \leq k$. Тогда

(а) если $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow 1$, то

$$\mathbf{P}((1 - \mathbf{P}(Z_m))\mu(L_{kv}, N) - \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z_m))) < x) \rightarrow \exp\{-e^{-x}\},$$

(б) если $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow \delta \in (0, 1)$ и выполнены условия (1) или (2), то

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) - \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rfloor < d\right) = \exp\left\{-\frac{1-\delta}{2} \delta^{2-\{2 \ln N / |\ln \mathbf{P}(Z_m)|\}}\right\} + o(1),$$

(с) если $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow 0$ и выполнены условия (1) или (2), то

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) = \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rfloor + 1\right) \rightarrow e^{-\lambda},$$

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) = \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rfloor\right) \rightarrow 1 - e^{-\lambda}$$

при

$$\left(\frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} - \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rfloor\right) |\ln \mathbf{P}(Z_m)| \rightarrow \ln(2\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty,$$

и

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) = \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rfloor\right) \rightarrow 1$$

при

$$\left| \left(\frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} - \left\langle \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\rangle \right) \right| |\ln P(Z_m)| \rightarrow \infty$$

и

$$\exp \left\{ \left\{ \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z_m)|} \right\} |\ln P(Z_m)| \right\} = o(\ln^b N), \quad 0 < b < \infty.$$

Положим

$$\lambda(N) = C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}). \quad (5)$$

Теорема 4. Пусть $N \rightarrow \infty$, а величины $n, k, v, p_1, \dots, p_V$ и множество подстановок L_{kv} меняются так, что

$$\lambda(N) \rightarrow \infty, \quad \lambda(N) \ln \lambda(N) = o(\ln N), \quad (6)$$

$$k(p^*)^n = O\left(\frac{1}{N^{1+\delta}}\right) \text{ для некоторого } 0 < \delta < 1. \quad (7)$$

Тогда

(а) если выполнено условие (2) и

$$\lambda(N)n^{-2} \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\lambda(N)k^{-1} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

или

(б) если выполнено условие (1) и

$$\lambda(N)n^{-1} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

то равномерно по $s = 1, \dots, 2[\lambda(N)]$

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = s) = \frac{\lambda^s(N)e^{-\lambda(N)}}{s!}(1 + o(1)).$$

Следствие 2. В условиях теоремы 4

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) - \lambda(N)}{\sqrt{\lambda(N)}} < x \right) = \Phi(x).$$

Рассмотрим случайные величины

$$\xi^{(\neq)}(L_{kv}, n, N) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq N-n+1} \eta_{ij}(L_{kv}, n),$$

$$\tilde{\xi}^{(\neq)}(L_{kv}, n, N) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq N-n+1} \bar{\eta}_{ij}(L_{kv}, n).$$

Представим множество L_{kv} в виде

$$L_{kv} = L_{k'v} \cup L_{k''v}, \quad k' + k'' = k,$$

где $L_{k'v} = \{Z'_1, \dots, Z'_{k'}\}$ — множество всех подстановок $Z \in L_{kv}$, для которых $Z^{-1} \in L_{kv}$, $L_{k''v} = L_{kv} \setminus L_{k'v} = \{Z''_1, \dots, Z''_{k''}\}$.

Нетрудно заметить, что случайная величина $\xi^{(\neq)}(L_{k'v}, n, N)$ имеет такое же распределение, как и случайная величина $2\xi(L_{k'v}, n, N)$. Поэтому из теоремы 2 следует, что случайная величина $\xi^{(\neq)}(L_{kv}, n, N)$ имеет в пределе такое же распределение, как

$$2 \sum_{t=1}^{k'} \xi(Z'_t, n, N) + \sum_{t=1}^{k''} \xi(Z''_t, n, N).$$

Аналогичные рассуждения справедливы для $\tilde{\xi}^{(\neq)}(L_{kv}, n, N)$.

2. Доказательство теоремы 1

При доказательстве будем использовать схему и оценки, изложенные в работах [1] и [2]. Напомним, что для доказательства сходимости распределения случайной величины $\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N)$ к пуассоновскому достаточно показать (см. [4]), что выполнены следующие соотношения (для краткости случайные величины $\tilde{\eta}_{ij}(L_{kv}, n)$ будем обозначать через $\tilde{\eta}_{ij}(n)$):

$$\max_{i,j} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) \rightarrow \lambda, \quad (11)$$

для любого фиксированного целого $r \geq 2$

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad (13)$$

где

$$I_r(n, N) = \{(i_k, j_k), 1 \leq i_k < j_k \leq N - n + 1, k = 1, \dots, r\} : \\ (i_{k_1}, j_{k_1}) \neq (i_{k_2}, j_{k_2}), \text{ если } k_1 \neq k_2 \text{ и хотя бы два из } 2r \text{ отрезков} \\ [i_k, \dots, i_k + n - 1], [j_k, \dots, j_k + n - 1] \text{ пересекаются}\}$$

— множество наборов упорядоченных пар; для каждого $r = 2, 3, \dots$

$$\frac{\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_k j_k}(n) = 1)}{\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_k j_k}(n) = 1)} \rightarrow 1 \quad (14)$$

равномерно по всем наборам попарно различных пар натуральных чисел

$$\alpha_r = \{(i_k, j_k), 1 \leq i_k < j_k \leq N - n + 1, k = 1, \dots, r\} \notin I_r(n, N).$$

В нашем случае, если $\alpha_r \notin I_r(n, N)$, т.е. если $2r$ отрезков попарно не пересекаются, то в силу независимости элементов последовательности X

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_k j_k}(n) = 1) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_k j_k}(n) = 1),$$

и соотношение (14) есть точное равенство.

Для вероятности $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1)$ справедливы следующие оценки.

Если $j - i > n$, то

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) = \psi < (p^*)^n k.$$

Если $j - i \leq n$, то по аналогии с леммой 2 из [2] величины $x_i, \dots, x_{j-1}$ являются свободными (на них не накладывается никаких ограничений), а остальные величины $x_j, \dots, x_{j+n-1}$ однозначно определяются свободными и некоторой подстановкой Z , заменяя вероятности их появления на p^* , получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) &< (p^*)^n \sum_{Z \in L_{kv}} \left(\left(1 - \sum_{x_{i-1} \in A} p_{x_{i-1}} p_Z(x_{i-1}) \right) \sum_{(x_i, \dots, x_{j-1}) \in X^{(j-i)}} p_{x_i} \dots p_{x_{j-1}} \right) \\ &< (p^*)^n k \sum_{(x_i, \dots, x_{j-1}) \in X^{(j-i)}} p_{x_i} \dots p_{x_{j-1}} = (p^*)^n k, \end{aligned} \quad (15)$$

где $X^{(j-i)}$ — множество упорядоченных $(j-i)$ -выборков элементов множества A .

Рассмотрим случай (а) теоремы 1.

Из оценок (15) и условий теоремы следует выполнение условия (11): так как $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) < (p^*)^n k$ и $\psi < (p^*)^n k$, справедлива оценка

$$|\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) - \psi| < (p^*)^n k,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) &= C_N^2 \psi + \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1, j-i \leq n} (\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) - \psi) \\ &= C_N^2 \psi + O(knN(p^*)^n) \rightarrow \lambda. \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что

$$\mathbf{E} \tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) + O(knN(p^*)^n) = \lambda + o(1). \quad (16)$$

Пусть

$$I_r(n, N) = \bigcup_{a=0}^r I_r(a; n, N),$$

где $I_r(a; n, N) = \{\alpha_r \in I_r(n, N) : \text{имеется ровно } a \text{ таких значений } s, 1 \leq s \leq r, \text{ что } i_s < j_s \leq j_s + n\}$; можно показать, что

$$|I_r(a; n, N)| = O(n^a N^{2r-a}), \quad |I_r(0; n, N)| = O(nN^{2r-1})$$

(см. [1]).

Так как $\psi < (p^*)^n k$, то $2\lambda < kN^2(p^*)^n$ при $\lambda > 0$ и достаточно больших N , поэтому

$$n/N < (2\lambda)^{-1} knN(p^*)^n = o(1). \quad (17)$$

Для слагаемых в (13) имеет место оценка

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) \leq ((p^*)^n k)^a \psi^{r-a},$$

поэтому с учетом оценок для мощности множеств $I_r(a; n, N)$ и (17) находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1} = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r} = 1) &\leq \sum_{a=0}^r \sum_{I_r(a; n, N)} ((p^*)^n k)^a \psi^{r-a} \\ &= O(nN^{2r-1} \psi^r) + \sum_{a=1}^r O(n^a N^{2r-a} (p^*)^{an} k^a \psi^{r-a}) \\ &= O\left(\frac{n}{N}\right) + \sum_{a=1}^r O((knN(p^*)^n)^a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Осталось проверить условие (12).

Сопоставим каждому набору $\alpha_r = \{(i_s, j_s), s = 1, \dots, r\}$ из $I_r(n, N)$ множество

$$U(\alpha_r) = \bigcup_{s=1}^r ([i_s, i_s + n - 1] \cup [j_s, j_s + n - 1]),$$

где $[l, t] = \{l, l + 1, \dots, t\}$. Обозначим через $A(\alpha_r)$ число связных компонент (отрезков) множества $U(\alpha_r)$. Очевидно, что $1 \leq A(\alpha_r) \leq 2r - 1$, если $\alpha_r \in I_r(n, N)$.

Определим множества

$$I_r^{(a)}(n, N) = \{\alpha_r \in I_r(n, N) : A(\alpha_r) = a\}, \quad 1 \leq a \leq 2r - 1,$$

тогда (см. [1])

$$I_r(n, N) = \bigcup_{a=1}^{2r-1} I_r^{(a)}(n, N), \quad |I_r^{(a)}(n, N)| = O(n^{2r-a} N^a).$$

Лемма 1. Если $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$, $r \geq 2$, $1 \leq a \leq 2r - 1$, то

$$\mathbf{P}(\alpha_r) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) < (\psi_1(L_{kv}, n, \bar{p}))^{(a-1)/2} (p^*)^n k.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу r . Пусть $r = 2$ и $\alpha_2 = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \in I_r^{(a)}(n, N)$, $1 \leq a \leq 3$.

Если $a = 1$, то

$$\mathbf{P}(\alpha_2) < \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) < \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1),$$

поэтому из оценок (15) следует, что $\mathbf{P}(\alpha_2) < (p^*)^n k$.

Необходимым условием для выполнения события $\{\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \tilde{\eta}_{i_2 j_2}(n) = 1\}$ является выполнение события $\{\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1\}$, которое, в свою очередь, равносильно выполнению равенств

$$x_{i_s+t} = Z_s(x_{j_s+t}), \quad Z_s \in L_{kv}, \quad s = 1, 2, \quad t = 0, \dots, n-1. \quad (18)$$

Пусть w — число различных неизвестных в системе (18). Пусть число свободных неизвестных в (18) равно w' , обозначим их через $x_{t(1)}, \dots, x_{t(w')}$. Тогда остальные однозначно определяются ими и некоторой парой подстановок Z_1 и Z_2 , и таких пар существует не более k^2 . Аналогично лемме 3 из [2] показывается, что при $a = 2$ и $a = 3$ в случае (b) (в обозначениях леммы 3 из [2]) число не свободных неизвестных

равно $w - w' = 2n$. Заменяя вероятности их появления на p^* , учитывая независимость элементов последовательности X и неравенство (1), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_2) &< \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) \\ &< (p^*)^{2n} \sum_{Z_1 \in L_{kv}} \sum_{Z_2 \in L_{kv}} \sum_{(x_{t(1)}, \dots, x_{t(w')}) \in X(w')} \mathbf{P}_{x_{t(1)}} \dots \mathbf{P}_{x_{t(w')}} \\ &= (p^*)^{2n} k^2 \leq \psi_1^{1/2} (p^*)^n k. \end{aligned}$$

Появление симметричного случая расположения индексов ($i_2 - i_1 = j_2 - j_1$) невозможно в силу определения случайной величины $\tilde{\eta}_{ij}(n)$.

При $a = 3$ помимо рассмотренного выше случая (b) возможны еще два случая.

Если одной из трех связанных компонент $U(\alpha_2)$ является $[i_1, j_1 + n - 1]$ или $[i_2, j_2 + n - 1]$, то в силу неравенства $\psi < \psi_1$ и оценок (15)

$$\mathbf{P}(\alpha_2) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_2 j_2}(n) = 1) < \psi_1 (p^*)^n k.$$

Во втором случае, когда какие-нибудь два начала отрезков из пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) совпадают, например, $i_1 = i_2$, $j_1 \neq j_2$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_2) &< \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) \\ &< \sum_{Z_1 \in L_{kv}} \sum_{Z_2 \in L_{kv}} \sum_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_1+n-1}) \in X^{(n)}} \prod_{t=0}^{n-1} p_{x_{i_1+t}} p_{Z_1(x_{i_1+t})} p_{Z_2(x_{i_1+t})} \\ &< (p^*)^n k \sum_{Z_1 \in L_{kv}} \sum_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_1+n-1}) \in X^{(n)}} \prod_{t=0}^{n-1} p_{x_{i_1+t}} p_{Z_1(x_{i_1+t})} = (p^*)^n k \psi_1. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r = 2$ оценки для вероятности $\mathbf{P}(\alpha_2)$ получены. Предположим, что они выполняются для всех $\alpha_r \in I_r(n, N)$, и рассмотрим наборы индексов

$$\alpha_{r+1} = \{(i_s, j_s), s = 1, \dots, r+1\} \in I_{r+1}(n, N).$$

Возможны следующие случаи:

- (a) $a' = A(\alpha_{r+1}) \leq A(\alpha_r) = a$;
- (b) $a' = a + 2$;
- (c) $a' = a + 1$.

В случаях (a) и (b) очевидно, что соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_{r+1}) &\leq \mathbf{P}(\alpha_r) < \psi_1^{(a-1)/2} (p^*)^n k \leq \psi_1^{(a'-1)/2} (p^*)^n k, \\ \mathbf{P}(\alpha_{r+1}) &= \mathbf{P}(\alpha_r) \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_{r+1} j_{r+1}}(n) = 1) < \psi_1^{(a-1)/2} \psi_1 (p^*)^n k = \psi_1^{(a'-1)/2} (p^*)^n k. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай (c). Если

$$[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1] \cap [j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1] \neq \emptyset,$$

то с учетом (1) находим, что

$$\mathbf{P}(\alpha_{r+1}) = \mathbf{P}(\alpha_r) \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_{r+1}j_{r+1}}(n) = 1) < \mathbf{P}(\alpha_r)(p^*)^n k \leq \mathbf{P}(\alpha_r) \psi_1^{1/2} < \psi_1^{(a'-1)/2} (p^*)^n k.$$

Пусть

$$[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1] \cap [j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1] = \emptyset, \quad s = |U(\alpha_r) \cap [i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]|.$$

Предположим также, что пересечение $U(\alpha_r)$ с отрезком $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]$ будет по точкам $i_{r+1}, \dots, i_{r+1} + s - 1$, $0 < s \leq n$ ($i_r = i_{r+1}$ при $s = n$).

Величины $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{r+1}+s-1}$ определяются величинами $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_{r+1}+s-1}$ и некоторой подстановкой, величины $x_{i_{r+1}+s}, \dots, x_{i_{r+1}+n-1}$ являются свободными. Заменяя вероятности появления величин $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_{r+1}+s-1}$ на p^* , получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha_{r+1}) &= \mathbf{P}(\alpha_r, \tilde{\eta}_{i_{r+1}j_{r+1}}(n) = 1) \\ &\leq \mathbf{P}(\alpha_r)(p^*)^s \sum_{Z \in L_{kv} (x_{i_{r+1}+s}, \dots, x_{i_{r+1}+n-1}) \in X^{(n)}} \sum \prod_{t=s}^{n-1} p_{x_{i_{r+1}+t}} p_{Z(x_{i_{r+1}+t})} \\ &< \mathbf{P}(\alpha_r)(p^*)^s \sum_{Z \in L_{kv}} (P(Z))^{n-s} < \mathbf{P}(\alpha_r)(p^*)^n k \leq \mathbf{P}(\alpha_r) \psi_1^{1/2} < \psi_1^{(a'-1)/2} (p^*)^n k. \end{aligned}$$

Случаи пересечения множества $U(\alpha_r)$ с $[j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1]$ и хвостом отрезка $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]$ рассматриваются аналогично.

Заметим, что в условиях теоремы $\psi^{-1/2} = O(N)$ и

$$\frac{1}{1 - \mathbf{P}(Z_t)} < \frac{1}{1 - p^*} = \sum_{j=0}^{\infty} (p^*)^j = \sum_{j=0}^{n-1} (p^*)^j + \sum_{j=n}^{\infty} (p^*)^j < n + \frac{(p^*)^n}{1 - p^*}.$$

Так как $\psi_1 < \psi/(1 - p^*)$ и $(p^*)^n \rightarrow 0$, из неравенства

$$\frac{1}{1 - p^*} (1 - (p^*)^n) < n$$

следует, что

$$\frac{1}{1 - p^*} = O(n), \quad \psi_1 = O(n\psi).$$

Из этих оценок и леммы 1 вытекает, что

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\alpha_r) = O \left(\sum_{a=1}^{2r-1} n^{2r-a} N^a \psi_1^{(a-1)/2} (p^*)^n k \right) = O(n^{2r-1} k N (p^*)^n) \rightarrow 0. \quad (19)$$

Случай (а) теоремы 1 рассмотрен.

Рассмотрим случай (b).

Поскольку для вероятности $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1)$ верны оценки (15) и в условиях теоремы $O(knN(p^*)^n) \rightarrow 0$, проверка соотношений (11), (13) и (14) проводится так же, как в случае (а).

Лемма 2. Если $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$, $r \geq 2$, $1 \leq a \leq 2r - 1$, то

$$\mathbf{P}(\alpha_r) < \left(\frac{\psi(L_{kv}, n, \bar{p})}{1 - p^*} \right)^{(a-1)/2} (p^*)^n k^a.$$

Доказательство. С учетом (2), справедливы оценки

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{t=1}^k \left(\left(\sum_{s=1}^v p_s p_{Z_t(s)} \right)^n \left(1 - \sum_{s=1}^v p_s p_{Z_t(s)} \right) \right) > (1 - p^*) \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^v p_s p_{Z_t(s)} \right)^n \\ &> (1 - p^*) \sum_{t=1}^k (p^* p_{Z_t(\omega)})^n = (1 - p^*) (p^*)^n \sum_{t=1}^k (p_{Z_t(\omega)})^n \geq (1 - p^*) (p^*)^{2n}, \end{aligned}$$

поэтому

$$(p^*)^n < \left(\frac{\psi}{1 - p^*} \right)^{1/2}.$$

Далее доказательство леммы 2 проводится индукцией по r аналогично доказательству леммы 1 с учетом соотношения (15) и последнего неравенства.

Из леммы 2 следует, что в условиях (b) теоремы

$$\begin{aligned} \sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) &= O \left(\sum_{a=1}^{2r-1} n^{2r-a} N^a \left(\frac{\psi}{1 - p^*} \right)^{(a-1)/2} (p^*)^n k^a \right) \\ &= O \left(n^{2r} \left(\frac{\psi}{1 - p^*} \right)^{-1/2} (p^*)^n \sum_{a=1}^{2r-1} \left(\frac{k}{n(1 - p^*)^{1/2}} \right)^a \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Случай (b) рассмотрен, и теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим сначала случай $k = 1$, т.е. $\Omega = \{Z\}$. В этом случае проходит доказательство, изложенное в работе [1] для случая $\Omega = \{E\}$. Таким образом, при $k = 1$ и $d = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(\xi(Z, n, N) = d) = \sum_{s=1}^d C_{d-1}^{s-1} (1 - \delta)^s \delta^{d-s} \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(Z, n, N) = 0\} = e^{-\lambda} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E} y^{\xi(Z, n, N)} \rightarrow \exp \left\{ \frac{\lambda(y-1)}{1 - \delta y} \right\},$$

где $\mathbf{P}(Z) \rightarrow \delta \in [0, 1)$, $C_N^2(\mathbf{P}(Z))^n (1 - \mathbf{P}(Z)) \rightarrow \lambda$.

Из этих выражений и теоремы 1 вытекает, что предельные распределения случайных величин $\tilde{\xi}(Z, n, N)$ и $\xi(Z, n, N)$ совпадают, если $\delta = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\delta \neq 0$. Тогда для выполнения условия (3) теоремы 2 необходимо, чтобы $n \rightarrow \infty$. В этом случае

$$C_N^2(\mathbf{P}(Z_t))^n (1 - \mathbf{P}(Z_t)) = o(\lambda), \quad t = h + 1, \dots, k$$

и

$$\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n, N) = d) = \mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n, N) = d)(1 + o(1)), \quad d = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем асимптотическую независимость случайных величин $\xi(Z_1, n, N), \dots, \xi(Z_h(n, N))$, когда подстановки $Z_1, \dots, Z_h$ принадлежат одному латинскому прямоугольнику.

Рассмотрим совместное распределение случайных величин $\xi(Z_1, n, N), \dots, \xi(Z_h(n, N))$. Для упрощения записи введем обозначения

$$\{\gamma_{icjc}(Z_t, n) = d_c^{(t)}, c = 1, \dots, r_t\} = \{\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})\},$$

$$\sum_{c=1}^{r_t} d_c^{(t)} = d^{(t)}, \quad t = 1, \dots, h, \quad \sum_{t=1}^h d^{(t)} = d.$$

Тогда, для $d = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi(Z_t, n, N) = d^{(t)}, t = 1, \dots, h) \\ = \sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \sum_{\substack{d_1^{(1)} + \dots + d_{r_1}^{(1)} = d^{(1)} \\ d_1^{(1)}, \dots, d_{r_1}^{(1)} > 0}} \sum_{\alpha_{r_1}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \sum_{\substack{d_1^{(h)} + \dots + d_{r_h}^{(h)} = d^{(h)} \\ d_1^{(h)}, \dots, d_{r_h}^{(h)} > 0}} \sum_{\alpha_{r_h}} \mathbf{P}(\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) \\ = \sum_{r_1, \alpha_{r_1}} \dots \sum_{r_h, \alpha_{r_h}} \mathbf{P}(\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h). \end{aligned} \quad (20)$$

(Условное обозначение в последнем равенстве также применено для упрощения записи.)

В суммах (20) возможны следующие случаи взаимного расположения индексов в множествах α_{r_t} , $t = 1, \dots, h$:

- (1) $\exists r', r'' \in \{r_1, \dots, r_h\}, r' \neq r'': \alpha_{r'} \cap \alpha_{r''} \neq \emptyset$,
- (2) $\forall r', r'' \in \{r_1, \dots, r_h\}, r' \neq r'': \alpha_{r'} \cap \alpha_{r''} = \emptyset$.

Первый случай означает, что существуют общие пары индексов, принадлежащие разным множествам пар индексов $\alpha_{r'}$ и $\alpha_{r''}$. В этом случае вероятность, стоящая внутри сумм в (20), равна нулю, так как подстановки $Z_1, \dots, Z_h$ принадлежат одному латинскому прямоугольнику и знаки двух отрезков не могут быть связаны разными подстановками.

Рассмотрим второй случай. Введем следующие обозначения:

$$U_d(\alpha_r) = \bigcup_{s=1}^h ([i_s, i_s + n + d - 1] \cup [j_s, j_s + n + d - 1]),$$

$$J(h, d) = \{\alpha_{r_t}, t = 1, \dots, h: \forall r', r'' \in \{r_1, \dots, r_h\}, r' \neq r'': \alpha_{r'} \cap \alpha_{r''} = \emptyset$$

$$\text{и } U_d(\alpha_{r'}) \cap U_d(\alpha_{r''}) = \emptyset\},$$

$$J^*(h, d) = \{\alpha_{r_t}, t = 1, \dots, h: \forall r', r'' \in \{r_1, \dots, r_h\}, r' \neq r'': \alpha_{r'} \cap \alpha_{r''} = \emptyset$$

$$\text{и } \exists b', b'' \in \{r_1, \dots, r_h\}, b' \neq b'': U_d(\alpha_{b'}) \cap U_d(\alpha_{b''}) = \emptyset\}.$$

Учитывая, что при $\{\alpha_{r_t}, t = 1, \dots, h\} = J(h, d)$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) = \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}),$$

представим выражение (20) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1, \alpha_{r_1}} \dots \sum_{r_h, \alpha_{r_h}} \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) \\ &= \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})) + \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})) \\ & \quad + \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) - \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})) \\ &= \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\xi(Z_t, n, N) = d^{(t)}) + \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) \\ & \quad - \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})). \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что последние две суммы есть $o(1)$. Рассмотрим первую из них. Верно следующее неравенство (смысл введенного условного обозначения аналогичен предыдущему):

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) \\ & \leq \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(Z_1, n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_{r_1} j_{r_1}}(Z_1, n) = 1, \dots, \tilde{\eta}_{q_1 s_1}(Z_h, n) = \dots = \tilde{\eta}_{q_{r_h} s_{r_h}}(Z_h, n) = 1) \\ & = \mathbf{P}(\tilde{\eta}(Z_t, r_t), t = 1, \dots, h). \end{aligned}$$

Поскольку в $J^*(h, d)$ множества α_{r_t} , $t = 1, \dots, h$, попарно не пересекаются,

$$J^*(h, d) \subseteq I_{r_1 + \dots + r_h}(n + d, N). \quad (22)$$

Поэтому, учитывая предыдущее неравенство, соотношения (22) и (19), получаем (для краткости полагаем $r_1 + \dots + r_h = r$), что

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}), t = 1, \dots, h) \\ &= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} \sum_{I_r(n+d, N)} \mathbf{P}(\tilde{\gamma}(Z_t, r_t), t = 1, \dots, h) \right) \\ &= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{I_r(n+d, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(L_{hv}, n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(L_{hv}, n) = 1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} (n+d)^{2r-1} N(p^*)^{n+d} \right) \\
&= O((n+d)^{2d} N(p^*)^{n+d}) = o(1).
\end{aligned}$$

Рассмотрим последнюю сумму в (21). Так как

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)}) \leq \mathbf{P}(\bar{\eta}_{i_1 j_1}(Z_1, n) = \dots = \bar{\eta}_{i_{r_t} j_{r_t}}(Z_t, n) = 1) \\
= \mathbf{P}(\bar{\eta}(Z_t, r_t)), \quad t = 1, \dots, h,
\end{aligned}$$

и

$$J^*(h, d) \subseteq \bigcup_{t=1}^h \bigcup_{a_t=1}^{2r_t} I_{r_t}^{(a_t)}(n+d, N), \quad a_1 + \dots + a_h < 2r,$$

то с учетом соотношений $|I_r^{(a)}(n+d, N)| = O((n+d)^{2r-a} N^a)$ для $1 \leq a \leq 2r-1$, (19) и (17) получаем, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})) \\
&= O \left(\sum_{r_1} \dots \sum_{r_h} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\bar{\gamma}(Z_t, r_t, d^{(t)})) \right) \\
&= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} \sum_{\{\alpha_{r_t}, t=1, \dots, h\} = J^*(h, d)} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\bar{\eta}(Z_t, r_t)) \right) \\
&= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} \right. \\
&\quad \times \sum_{a_1=1}^{2r_1} \dots \sum_{a_h=1}^{2r_h} \sum_{\alpha_{r_1} \in I_{r_1}^{(a_1)}(n+d, N)} \dots \sum_{\alpha_{r_h} \in I_{r_h}^{(a_h)}(n+d, N)} \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\bar{\eta}(Z_t, r_t)) \left. \right) \\
&= O \left(\sum_{r_1=1}^{d^{(1)}} \dots \sum_{r_h=1}^{d^{(h)}} \binom{d^{(1)}-1}{r_1-1} \dots \binom{d^{(h)}-1}{r_h-1} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{a_1=1}^{2r_1} \dots \sum_{a_h=1}^{2r_h} \prod_{t=1}^h |I_{r_t}^{(a_t)}(n+d, N)| \mathbf{P}(\bar{\eta}(Z_t, r_t)) \right) \right) \\
&= O((n+d)^{2d} N(p^*)^{n+d}) + O\left(\frac{n}{N}\right) = o(1).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\xi(Z_t, n, N) = d^{(t)}, t = 1, \dots, h) = \prod_{t=1}^h \mathbf{P}(\xi(Z_t, n, N) = d^{(t)}) + o(1),$$

т. е. случайные величины $\xi(Z_t, n, N)$, $t = 1, \dots, h$, асимптотически независимы.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что аналогично показывается асимптотическая независимость случайных величин $\tilde{\xi}(Z_t, n, N)$, $t = 1, \dots, k$.

4. Доказательство следствия 1

При любых $x \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\tau(L_{kv}, n)\sqrt{\psi} > x) = \mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n, N(x)) = 0),$$

где $N(x) = [x\psi^{-1/2}]$. Поскольку

$$\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n, N) = 0) = \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = 0), \quad (23)$$

достаточно доказать, что для случайной величины $\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N(x))$ справедлива теорема 1 с параметром $\lambda = x^2/2$.

Так как $\psi \rightarrow 0$, то $N(x) \rightarrow \infty$,

$$C_{N(x)}^2 \psi = \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) = \lambda(1 + o(1)) > 0.$$

Далее из соотношения

$$n^q N(x)(p^*)^n k = O(n^q (p^*)^n k \psi^{-1/2}) \rightarrow 0, \quad q < \infty,$$

следует, что $(p^*)^n k < \psi^{1/2} < \psi_1^{1/2}$, т. е. неравенство (1) выполнено.

5. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим случай (а). Если $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow 1$, то из неравенства $P(Z_m) \leq p^*$ следует, что $p^* \rightarrow 1$, $p_{Z_m(\omega)} \rightarrow 1$, где $p_\omega = p_{Z_m(\omega)} = p^*$ и условие (2) выполнено. Таким образом, подстановка Z_m переводит элемент ω , имеющий максимальную вероятность p^* , в себя: $\omega = Z_m(\omega)$. Так как множество L_{kv} есть латинский прямоугольник, подстановка Z_m со свойством $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow 1$ единственна. Не ограничивая общности, положим $m = 1$ и для краткости обозначим $Z_1 = Z$.

Из (4) следует, что так как

$$\psi(L_{kv}, 1, \bar{p}) = \mathbf{P}(Z)(1 - \mathbf{P}(Z)) \left(1 + \sum_{t=2}^k \frac{\mathbf{P}(Z_t)(1 - \mathbf{P}(Z_t))}{\mathbf{P}(Z)(1 - \mathbf{P}(Z))} \right),$$

то

$$\sum_{t=2}^k \frac{\mathbf{P}(Z_t)(1 - \mathbf{P}(Z_t))}{\mathbf{P}(Z)(1 - \mathbf{P}(Z))} = o(1)$$

и

$$\begin{aligned} \psi(L_{kv}, 1, \bar{p}) &= (\mathbf{P}(Z))^n (1 - \mathbf{P}(Z)) \left(1 + \sum_{t=2}^k \left(\frac{\mathbf{P}(Z_t)}{\mathbf{P}(Z)} \right)^n \frac{1 - \mathbf{P}(Z_t)}{1 - \mathbf{P}(Z)} \right) \\ &= (\mathbf{P}(Z))^n (1 - \mathbf{P}(Z)) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

для любого целого $n \geq 1$.

Положим

$$n(x) = \left\lfloor \frac{x + \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))}{1 - \mathbf{P}(Z)} \right\rfloor$$

и проверим, что величины $n(x), k, v, p_1, \dots, p_v$ удовлетворяют условиям теоремы 1 случаю (b2) с параметром $\lambda = e^{-x}$.

Так как $\mathbf{P}(Z) \rightarrow 1$, то $1 - \mathbf{P}(Z) \sim -\ln \mathbf{P}(Z)$ и

$$n(x) \sim -(\ln \mathbf{P}(Z))^{-1}(x + \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))) ,$$

поэтому

$$\begin{aligned} C_N^2 \psi(L_{kv}, n(x), \bar{p}) &\sim C_N^2 (P(Z))^{n(x)} (1 - \mathbf{P}(Z)) \\ &\sim C_N^2 (1 - \mathbf{P}(Z)) \exp\{-(x + \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z))))\} = e^{-x}. \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\mathbf{P}(Z) = (p^*)^2 + \sum_{i=1}^v p_i p_{Z(i)}$$

и

$$\sum_{i=1}^v p_i = \sum_{i=1}^v p_{Z(i)} = 1 - p^*,$$

то

$$\sum_{i=1}^v p_i p_{Z(i)} < \left(\sum_{i=1}^v p_i \right)^2 = (1 - p^*)^2 \leq (1 - \mathbf{P}(Z))^2.$$

Таким образом, из неравенств

$$(p^*)^2 \leq \mathbf{P}(Z) < (p^*)^2 + (1 - \mathbf{P}(Z))^2$$

следует, что

$$p^* = (\mathbf{P}(Z))^{1/2} + O((1 - \mathbf{P}(Z))^2)$$

при $\mathbf{P}(Z) \rightarrow 1$ и

$$(|\ln \mathbf{P}(Z)|)^{-1} \ln((\mathbf{P}(Z))^{1/2} (p^*)^{-1}) = O(1 - \mathbf{P}(Z)) \rightarrow 0,$$

т. е.

$$\gamma(N) = O\left((1 - \mathbf{P}(Z)) \frac{\ln N}{\ln \ln N}\right).$$

Из определения величины $n(x)$ следует, что

$$n(x) = O\left(\frac{\ln C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z))}{1 - \mathbf{P}(Z)}\right) = O\left(\frac{\ln N}{1 - \mathbf{P}(Z)} + \frac{\ln(1 - \mathbf{P}(Z))}{1 - \mathbf{P}(Z)}\right) = O\left(\frac{\ln N}{1 - \mathbf{P}(Z)}\right)$$

и

$$\frac{k}{n(x)\sqrt{1 - p^*}} = O\left(\frac{k(1 - \mathbf{P}(Z))}{\sqrt{1 - p^*} \ln N}\right) = O\left(\frac{k(1 - (p^*)^2)}{\sqrt{1 - p^*} \ln N}\right) = O\left(\frac{k}{\ln N}\right) \rightarrow 0,$$

т. е. выполняется условие $k/n(1 - p^*)^{-1/2} < 1$ из п. (b2) теоремы 1.

Справедливы тождества

$$\begin{aligned} -\frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln \left(\frac{\sqrt{\mathbf{P}(Z)}}{p^*} \right), \\ -2 \ln N \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} &= -\ln N + 2\gamma(N)(\ln \ln N). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) и условий теоремы вытекают оценки

$$\begin{aligned} (p^*)^{n(x)} &= \exp \left\{ -\frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} (x + \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln \left(\frac{\sqrt{\mathbf{P}(Z)}}{p^*} \right) (x + \ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))) \right\} \\ &= O \left((C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))^{-1/2} \exp \left\{ \frac{\ln(C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{P}(Z)}}{p^*} \right\} \right) \\ &= O \left((C_N^2(1 - \mathbf{P}(Z)))^{-1/2} \exp \left\{ \frac{\ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{P}(Z)}}{p^*} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \right) \ln(1 - \mathbf{P}(Z)) \right\} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{\ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{P}(Z)}}{p^*} \right\} &= \exp \left\{ \ln N \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \right) \right\} \\ &= \exp \{ \gamma(N)(\ln \ln N) \} = (\ln N)^{-\gamma(N)}, \\ \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \right) \ln(1 - \mathbf{P}(Z)) \right\} &= (1 - \mathbf{P}(Z))^{1/2-c}, \end{aligned}$$

где

$$1/2 < c = \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \leq 1.$$

Таким образом,

$$(p^*)^{n(x)} = O(N^{-1}(1 - \mathbf{P}(Z))^{-c}(\ln N)^{-\gamma(N)})$$

и

$$n^q(x) N k(p^*)^{n(x)} = O \left(\frac{k}{(1 - \mathbf{P}(Z))^{q+c}} (\ln N)^{q-\gamma(N)} \right) \rightarrow 0$$

для любого $q > 0$ (так как $\gamma(N) = O((1 - \mathbf{P}(Z)) \ln N / (\ln \ln N)) \rightarrow \infty$).

Таким образом, для случайной величины $\xi(L_{kv}, n(x), N)$ верна теорема 1, т.е. $\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n(x), N) = 0) \rightarrow e^{-\lambda}$.

Для любого положительного числа a справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, [a] + 1, N) = 0) \geq \mathbf{P}(\mu(L_{kv}, N) < a) \geq \mathbf{P}(\xi(L_{kv}, [a], N) = 0).$$

Из (23) и теоремы 1 следует, что для целого $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, n, N) = 0) = \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = 0) \rightarrow e^{-\lambda},$$

где $C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) \rightarrow \lambda$.

Так как $\psi(L_{kv}, n, \bar{p}) \sim \psi(L_{kv}, n+1, \bar{p})$ при $\mathbf{P}(Z_m) \rightarrow 1$, то

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n+1, N) = 0) \sim \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = 0)$$

и

$$\mathbf{P}(\mu(L_{kv}, N) < n) \sim \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) = 0).$$

В условиях теоремы это означает, что

$$\mathbf{P}(\mu(L_{kv}, N) < n(x)) \sim \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n(x), N) = 0) \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}.$$

Рассмотрим случай (б). Достаточно показать (см. [1]), что при дополнительном условии $\{2 \ln N / |\ln \mathbf{P}(Z)|\} \rightarrow \lambda_0 \in [0, 1]$

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) - \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} \right\rfloor < d\right) \rightarrow \exp\left\{-\frac{1-\delta}{2} \delta^{d-\lambda_0}\right\}, \quad d = 0, \pm 1, \dots$$

Действительно, так как

$$\mathbf{P}\left(\mu(L_{kv}, N) - \left\lfloor \frac{2 \ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} \right\rfloor < d\right) = \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, n(d), N) = 0),$$

где

$$n(d) = \lfloor 2 \ln N / |\ln \mathbf{P}(Z)| \rfloor + d,$$

то достаточно показать, что величины $n(d), k, v, p_1, \dots, p_v$ и подстановки множества L_{kv} удовлетворяют условиям теоремы 1 с параметром $\lambda = (1-\delta)\delta^{d-\lambda_0}/2$.

Учитывая выражение для $n(d)$, получаем, что

$$\begin{aligned} C_N^2 \psi(L_{kv}, n(d), \bar{p}) &= C_N^2 (\mathbf{P}(Z))^{n(d)} (1 - \mathbf{P}(Z)) \\ &= C_N^2 (1 - \mathbf{P}(Z)) \exp\left\{\left(-\frac{2 \ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)} + 2 - \left\{-\frac{2 \ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)}\right\}\right) \ln \mathbf{P}(Z)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \delta^d (1 - \delta) (\mathbf{P}(Z))^{-\{2 \ln N / |\ln \mathbf{P}(Z)|\}} \rightarrow \frac{1-\delta}{2} \delta^{d-\lambda_0}. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{P}(Z) < p^*$ и $\mathbf{P}(Z) \rightarrow \delta \in (0, 1)$, то $\liminf p^* > 0$. Поэтому, учитывая это неравенство, тождества (24) и условия теоремы, получаем, что

$$\begin{aligned} n^q(d) &= O\left(\left(-\frac{2 \ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)}\right)^q\right) = O(\ln^q N), \\ (p^*)^{n(d)} &= \exp\{n(d) \ln p^*\} = \exp\left\{\left(d - \left\{-\frac{2 \ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)}\right\}\right) \ln p^*\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{2 \ln N}{\ln \mathbf{P}(Z)} \ln p^*\right\} = O(N^{-1} (\ln N)^{2\gamma(N)}), \\ n^q(d) n k (p^*)^{n(d)} &= O((\ln^q N) k (\ln N)^{2\gamma(N)}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для любого $q > 0$.

Учитывая, что $k/\ln N \rightarrow 0$, аналогично проверяем условие

$$k^q N(p^*)^{n(d)} \rightarrow 0.$$

Наконец, рассмотрим случай (с). Для целых значений числа d с учетом (23) имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\mu(L_{kv}, N) = d) = \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, d+1, N) = 0) - \mathbf{P}(\tilde{\xi}(L_{kv}, d, N) = 0).$$

Пусть $a = 2 \ln N / |\ln \mathbf{P}(Z)|$, тогда из доказательства теоремы 1 (см. (16)) следует, что

$$\mathbf{E} \tilde{\xi}(L_{kv}, \langle a \rangle \pm 1, N) = C_N^2 \psi(L_{kv}, \langle a \rangle \pm 1, \bar{p}) + O(k(\langle a \rangle \pm 1)N(p^*)^{\langle a \rangle \pm 1}).$$

С учетом этого соотношения, аналогично теореме 2 из [2], показывается, что

$$\mathbf{P}(\xi(L_{kv}, \langle a \rangle - 1, N) = 0) \rightarrow 0, \quad \mathbf{P}(\xi(L_{kv}, \langle a \rangle + 1, N) = 0) \rightarrow 1.$$

Покажем, что для случайной величины $\xi(L_{kv}, \langle a \rangle, N)$ справедлива теорема 1. Действительно,

$$C_N^2 \psi(L_{kv}, \langle a \rangle, N) \sim C_N^2 (\mathbf{P}(Z))^{\langle a \rangle} \sim C_N^2 \exp\{a \ln \mathbf{P}(Z)\} \exp\{(a - \langle a \rangle) |\ln P(Z)|\} \rightarrow \lambda.$$

Далее, с учетом (24) находим, что

$$(p^*)^a = \exp \left\{ -2 \ln N \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \right\} = O(N^{-1} (\ln N)^{2\gamma(N)}).$$

Так как $a - \langle a \rangle \sim \ln(2\lambda) / |\ln \mathbf{P}(Z)|$ и $|\ln p^*| < |\ln \mathbf{P}(Z)|$, то

$$(p^*)^{\langle a \rangle - a} = \exp \left\{ \ln(2\lambda) \frac{\ln p^*}{\ln \mathbf{P}(Z)} \right\} = O(1)$$

и

$$\langle a \rangle^q k n(p^*)^{\langle a \rangle} = O \left(\left(\frac{\ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} \right)^q k (\ln N)^{2\gamma(N)} \right) \rightarrow 0$$

для любого $q > 0$.

Аналогично показывается, что

$$\langle a \rangle k^q N(p^*)^{\langle a \rangle} = O \left(\frac{\ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} k^q (\ln N)^{2\gamma(N)} \right) \rightarrow 0$$

для любого $q > 0$.

Для второго случая условия (с) соотношения $\lambda([a] + 1) = o(1)$ и $\lambda([a]) \rightarrow \infty$ проверяются аналогично. Далее,

$$\begin{aligned} [a]^q k N(p^*)^{[a]} &= o \left(\left(\frac{\ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} \right)^q k (\ln N)^{2\gamma(N)} (\mathbf{P}(Z))^{-\{a\}} \right) \\ &= o \left(\left(\frac{\ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} \right)^q k^q (\ln N)^{2\gamma(N)} \ln^b N \right) = o(1) \end{aligned}$$

и

$$[a] k^q N(p^*)^{[a]} = o \left(\frac{\ln N}{|\ln \mathbf{P}(Z)|} k^q (\ln N)^{2\gamma(N)} \ln^b N \right) = o(1).$$

6. Доказательство теоремы 4

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что (см. [5])

$$\exp\{2\lambda(N)\} \max_{i,j} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{b!} \sum_{I_{m+b}(n,N)} \mathbf{P}(\alpha_{m+b}) = o(\lambda^{m-1}(N)e^{-\lambda(N)}), \quad (26)$$

$$\frac{1}{b!} \sum_{I_{m+b}(n,N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_{m+b} j_{m+b}}(n) = 1) = o(\lambda^{m-1}(N)e^{-\lambda(N)}) \quad (27)$$

равномерно по $m = 1, \dots, 2[\lambda(N)]$ и по $b = 0, \dots, [9\lambda(N)] - m$, и что

$$\frac{\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1)}{\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1)} = 1 + o(e^{-2\lambda(N)}) \quad (28)$$

равномерно по $\alpha_r \notin I_r(n, N)$ и по $r = 1, \dots, [9\lambda(N)]$.

В нашем случае при $\alpha_r \notin I_r(n, N)$ в силу независимости элементов последовательности X

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = \dots = \tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1)$$

и соотношение (28) выполнено.

Рассмотрим случай (а).

Из условий (7) и (8) вытекает, что

$$\frac{kn(p^*)^n}{N\psi(L_{kv}, n, \bar{p})} = O\left(\frac{n}{\lambda(N)N^\delta}\right) \rightarrow 0. \quad (29)$$

Поэтому с учетом (5), (6), (29) и доказательства теоремы 1 находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tilde{\xi}(L_{kv}, n, N) &= \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) = C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) + O(knN(p^*)^n) \\ &= C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p}) \left(1 + O\left(\frac{kn(p^*)^n}{N\psi(L_{kv}, n, \bar{p})}\right)\right) \\ &= C_N^2 \psi(L_{kv}, n, \bar{p})(1 + o(1)) = \lambda(N)(1 + o(1)) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку из (6) следует, что

$$\exp\{\lambda(N)\} = N^{\varepsilon/(\ln \lambda(N))},$$

где $\varepsilon = \varepsilon(N) \rightarrow 0$, а

$$\max_{i,j} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{ij}(n) = 1) < k(p^*)^n,$$

в силу (7) выполняется соотношение (25).

Нетрудно заметить, что с учетом возможных равенств $i_s = j_t$ или $j_s = j_t$ для некоторых пар индексов $(i_s, j_s), (i_t, j_t)$ из $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$ справедливы оценки (здесь

$(2r - t)$ — число различных индексов набора α_r)

$$\begin{aligned}
 |I_r^{(a)}(n, N)| &< N^a \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_a = 2r-t \\ s_1, \dots, s_a > 0}} s_1! \dots s_a! n^{2r-a-t} \\
 &< n^{2r-a} N^a \sum_{t=0}^{r-1} \binom{2r-t-1}{a-1} (2r-t)! < n^{2r-a} N^a \binom{2r-1}{a-1} \sum_{t=0}^{r-1} (2r-t)! \\
 &< n^{2r-a} N^a \binom{2r-1}{a-1} (2r)! \sum_{t=0}^{r-1} (r+2)^{-t} < c_1 n^{2r-a} N^a \binom{2r-1}{a-1} (2r)! \quad (30)
 \end{aligned}$$

(здесь и далее c_i , $i = 1, 2, \dots$, — некоторые константы; напомним также, что $I_r^{(a)}(n, N) = \{\alpha_r \in I_r : A(\alpha_r) = a\}$).

Пусть

$$q = \left(\frac{\psi}{1-p^*} \right)^{1/2} \frac{kN}{n} = O \left(\frac{\lambda(N)^{1/2}}{(1-p^*)^{1/2}} \frac{k}{n} \right),$$

из (8) следует, что $q \rightarrow \infty$.

Условие (2) обеспечивает справедливость леммы 2, поэтому для $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$

$$P(\alpha_r) < \left(\frac{\psi}{1-p^*} \right)^{(a-1)/2} k^a (p^*)^n.$$

Далее, с учетом (30), неравенства $p^* < N^{-1-\delta}$ и соотношения $q \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{I_r(n, N)} P(\alpha_r) &= \sum_{a=1}^{2r-1} \sum_{\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)} P(\alpha_r) \\
 &< c_1 \sum_{a=1}^{2r-1} n^{2r-a} N^a \left(\frac{\psi}{1-p^*} \right)^{(a-1)/2} (p^*)^n k^a (2r)! \binom{2r-1}{a-1} \\
 &= c_1 n^{2r-1} (2r)! (p^*)^n N k \sum_{a=0}^{2r-2} q^a \binom{2r-1}{a} \\
 &< c_1 n^{2r-1} (2r)! (p^*)^n N k q^{2r-1} \left(1 + \frac{1}{q} \right)^{2r-1} \\
 &< c_2 \lambda^{r-1/2}(N) N^{-\delta} \left(\frac{2r^2 k^2}{(1-p^*)} \left(1 + \frac{1}{q} \right)^2 \right)^r, \quad r = 2, \dots, [9\lambda(N)].
 \end{aligned}$$

Так как $(p^*)^n \rightarrow 0$, то $1/(1-p^*) < c_3 n$. Используя эти оценки, условие (6), которое можно переписать в виде $N = \lambda(N)^{\lambda(N)/\varepsilon}$ ($\varepsilon = \varepsilon(N) \rightarrow 0$), и условия (8) и (9), легко проверить справедливость (26):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b!} \sum_{I_{m+b}(n, N)} P(\alpha_{m+b}) &< \lambda^{m-1}(N) e^{-\lambda(N)} c_4 (c_5(\lambda(N)))^{c_6-\delta/\varepsilon} k^{c_7} n^{c_8})^{\lambda(N)} \\
 &= o(\lambda^{m-1}(N) e^{-\lambda(N)}).
 \end{aligned}$$

Пусть

$$I_r(n, N) = \bigcup_{a=0}^r I_r(a; n, N),$$

где $I_r(a; n, N) = \{\alpha_r \in I_r(n, N) : \text{имеется ровно } a \text{ таких значений } s, 1 \leq s \leq r, \text{ что } i_s < j_s \leq i_s + n\}$.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} |I_r(a; n, N)| &= O\left(n^a N^{2r-a} (2r)! \binom{r}{a}\right), \quad a = 1, \dots, r, \\ |I_r(0; n, N)| &= O(n N^{2r-a} (2r)!). \end{aligned}$$

Далее, из оценок (15) следует, что для $\alpha_r \in I_r(a; n, N)$

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) \leq ((p^*)^n k)^a \psi^{r-a}.$$

Учитывая (29), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{b!} \sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\tilde{\eta}_{i_r j_r}(n) = 1) \\ < c_9 \left(\lambda^r(N) (2r^2)^r \frac{n}{N} + \lambda^r(N) (4r^2)^r \frac{nk(p^*)^n}{N\psi} \right) < c_{10} \lambda^r(N) (4r^2)^r \binom{n}{N^\delta} \end{aligned}$$

для всех $r = 2, \dots, [9\lambda(N)]$. Из этих оценок с учетом соотношения $N = \lambda(N)^{\lambda(N)/\varepsilon}$ вытекает справедливость (27).

Рассмотрим случай (b).

Условие (1) обеспечивает справедливость леммы 1. Учитывая, что (здесь и далее $c_i, i = 1, 2, \dots$, — некоторые константы)

$$\psi_1 < \frac{1}{1-p^*} \psi < c_1 n \psi,$$

для $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$, $r \geq 2$, $1 \leq a \leq 2r-1$, получаем оценку

$$\mathbf{P}(\alpha_r) < (c_2 n \psi)^{(a-1)/2} k (p^*)^n.$$

Пусть $q_1 = (c_3 \lambda(N)/n)^{1/2}$, из (10) следует, что $q_1 \rightarrow \infty$. Поэтому соотношение (26) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\alpha_r) &= \sum_{a=1}^{2r-1} \sum_{\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)} \mathbf{P}(\alpha_r) < n^{2r-1} (2r)! (p^*)^n N k \sum_{a=0}^{2r-2} q_1^a \binom{2r-1}{a} \\ &< n^{2r-1} (2r)! (p^*)^n N k q_1^{2r-1} \left(1 + \frac{1}{q_1}\right)^{2r-1} \\ &< c_4 \lambda^{r-1/2}(N) N^{-\delta} \left(n r^2 \left(1 + \frac{1}{q_1}\right)^2 \right)^r, \quad r = 2, \dots, [9\lambda(N)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{b!} \sum_{I_{m+b}(n, N)} P(\alpha_{m+b}) < \lambda^{m-1}(N) e^{-\lambda(N)} c_5(c_6(\lambda(N))^{c_7-\delta/\varepsilon} n^{c_8})^{\lambda(N)} = o(\lambda^{m-1}(N) e^{-\lambda(N)}).$$

Условия (25), (27) и (28) проверяются аналогично.

Автор благодарен А.М. Зубкову за обсуждение результатов данной работы и ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Зубков А.М., Михайлов В.Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №1, 173–181.
2. Буравлев С.М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 53–75.
3. Сачков В.Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
4. Севастьянов Б.А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **17**, №4, 333–338.
5. Амбросимов А.С., Нормальный закон в схеме сумм зависимых случайных величин, рассмотренных Б.А. Севастьяновым. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №1, 184–189.

Статья поступила 24.06.1999.