Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Кравцов, Контрпример к гипотезе о максимальном числе целочисленных вершин многоиндексного аксиального транспортного многогранника, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 107–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 08:58:05

УДК 519.10

Контрпример к гипотезе о максимальном числе целочисленных вершин многоиндексного аксиального транспортного многогранника

© 2000 г. М.К. Кравцов

Показано, что гипотеза о максимальном числе целочисленных вершин многоиндексного аксиального транспортного многогранника, заданного целочисленными векторами, неверна.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, проект Ф97-266.

1. Введение

Будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1, 2]. Напомним лишь, что p -индексным аксиальным транспортным многогранником p -АТМ порядка

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p, \quad n_s > 1, \quad s \in N_p, \quad p \geq 2,$$

называется область определения p -индексной транспортной задачи с аксиальными суммами, то есть множество $M(a^1, a^2, \dots, a^p)$ матриц $x = \|x_{i_1 \dots i_p}\|_{n_1 \times \dots \times n_p}$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &\geq 0, & i_s &\in N_{n_s}, \quad s \in N_p, \\ \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= a_{i_s}^s, & i_s &\in N_{n_s}, \quad s \in N_p, \end{aligned}$$

где $a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_{n_s}^s)$, $s \in N_p$, — вектор с действительными положительными компонентами,

$$\sum_{i_s=1}^{n_s} a_{i_s}^s = k, \quad s \in N_p, \quad N_t = \{1, 2, \dots, t\}.$$

Заметим, что при $p = 2$ этот многогранник является классическим транспортным многогранником (КТМ), и для него получены наиболее полные результаты (см., например, [1-7]).

В этой заметке построен контрпример к гипотезе 31, приведенной в [1], а позднее, и в [2], согласно которой p -АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка $n_1 \times \dots \times n_p$, $n_1 =$

$\max\{n_s : s \in N_p\}$, $p \geq 3$, определенный целочисленными векторами $a^1, \dots, a^p$, имеет максимальное число целочисленных вершин (ЦВ) тогда и только тогда, когда всякий КТМ $M(a^1, a^s)$ порядка $n_1 \times n_s$, $s = 2, 3, \dots, p$, обладает максимальным числом $\varphi(n_1, n_s)$ вершин.

Заметим, что эту гипотезу долгое время не удавалось ни доказать, ни опровергнуть, то есть доказать ее отрицание.

Прежде, чем приступить к опровержению этой гипотезы, то есть к доказательству ее отрицания, приведем некоторые вспомогательные утверждения, на которых базируется это опровержение.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $p \geq 3, l \in N_p$. Рассмотрим $(p-1)$ -индексную матрицу

$$y = \|y_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_p}\|_{n_1 \times \dots \times n_{l-1} \times n_{l+1} \times \dots \times n_p},$$

принадлежащую многограннику $M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p)$ порядка $n_1 \times \dots \times n_{l-1} \times n_{l+1} \times \dots \times n_p$. Запишем эту матрицу в виде $(n_1 \dots n_{l-1} n_{l+1} \dots n_p)$ -мерного вектора

$$z(y) = (y_{11 \dots 1 * 11 \dots 11}, y_{11 \dots 1 * 11 \dots 12}, \dots, y_{n_1 \dots n_{l-1} * n_{l+1} \dots n_p}),$$

где $*$ обозначает отсутствие l -го индекса. Удалив в векторе $z(y)$ нулевые компоненты, получим вектор $z^+(y)$, число компонент которого равно числу $t(y)$ положительных элементов матрицы y . Отметим, что компоненты вектора $z^+(y)$ занумерованы тем же способом, что и компоненты вектора $z(y)$.

Поскольку сумма компонент вектора $z^+(y)$ равна k , пара векторов a^l и $z^+(y)$ определяет КТМ $M(a^l, z^+(y))$ порядка $n_l \times t(y)$.

Пусть

$$g(y) = \|g_{i_l j}^y\|_{n_l \times t(y)}$$

— некоторая матрица многогранника $M(a^l, z^+(y))$, где индекс j представляет собой совокупность индексов $(i_1, \dots, i_{l-1}, *, i_{l+1}, \dots, i_p)$, задаваемую номерами компонент вектора $z^+(y)$. Тогда по этой матрице определим матрицу

$$x(g(y)) = \|x_{i_1 \dots i_p}^{g(y)}\|_{n_1 \times \dots \times n_p}$$

согласно правилу

$$x_{i_1 \dots i_{l-1} i_l i_{l+1} \dots i_p}^{g(y)} = \begin{cases} g_{i_l j}^y, & \text{если } (i_1, \dots, i_{l-1}, *, i_{l+1}, \dots, i_p) = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что построенная таким образом матрица $x(g(y)) \in M(a^1, \dots, a^p)$. Тем самым справедлива следующая лемма, которая явилась отправной точкой при исследовании p -АТМ.

Лемма 1. Пусть $p \geq 3, l \in N_p$. Тогда

$$M(a^1, \dots, a^p) = \{x(g(y)) : y \in M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p), g(y) \in M(a^l, z^+(y))\}.$$

С помощью этой леммы легко доказать следующие два утверждения.

Предложение 1. Пусть $p \geq 3$, $l \in N_p$. Тогда число $z(a^1, \dots, a^p)$ целочисленных точек p -АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка $n_1 \times \dots \times n_p$, определенного целочисленными векторами $a^1, \dots, a^p$, выражается формулой

$$z(a^1, \dots, a^p) = \sum_{y \in M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p)} z(a^l, z^+(y)),$$

где суммирование проводится по всем целочисленным точкам $(p-1)$ -АТМ

$$M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p).$$

Предложение 2. Пусть $p \geq 3$, $l \in N_p$. Тогда для числа $f_0(M(a^1, \dots, a^p))$ вершин p -АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка $n_1 \times \dots \times n_p$ справедливо неравенство

$$f_0(M(a^1, \dots, a^p)) \geq \sum_{y \in VM(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p)} f_0(M(a^l, z^+(y))),$$

где VM — множество вершин многогранника M .

Так как матрица ограничений двухиндексной транспортной задачи является унимодулярной (см. [1]), то есть любой ее минор равен 0 или ± 1 , при любых целочисленных векторах a и b всякая вершина КТМ $M(a, b)$ будет целочисленной. Поэтому в силу предложения 2 для любых натуральных чисел $p \geq 3$ и $l \in N_p$ и любой ЦВ y $(p-1)$ -АТМ $M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p)$ справедливо утверждение: всякая вершина многогранника $M(a^l, z^+(y))$, заданного целочисленными векторами a^l и $z^+(y)$, является целочисленной и справедливо включение

$$\{x(g(y)): g(y) \in VM(a^l, z^+(y))\} \subset VM(a^1, \dots, a^p).$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть $p \geq 3$, $l \in N_p$. Тогда для числа $f_0^z(M(a^1, \dots, a^p))$ ЦВ p -АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$, определенного целочисленными векторами $a^1, \dots, a^p$, справедливо неравенство

$$f_0^z(M(a^1, \dots, a^p)) \geq \sum_y f_0(M(a^l, z^+(y))),$$

где суммирование проводится по всем ЦВ y $(p-1)$ -АТМ $M(a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^p)$.

3. Контрпример

Рассмотрим 3-АТМ $M(a^1, a^2, a^3)$ порядка $3 \times 2 \times 2$, заданный векторами $a^1 = (2, 2, 2)$, $a^2 = (3, 3)$, $a^3 = (3, 3)$.

На основании теоремы 7.1 в [1] получаем равенства

$$f_0(M(a^1, a^2)) = f_0(M(a^1, a^3)) = \varphi(3, 2) = 6.$$

Тем не менее, как мы покажем ниже, многогранник $M(a^1, a^2, a^3)$ имеет не максимальное число ЦВ.

Сначала, используя критерий максимальности числа вершин КТМ (см. [1]), подсчитаем значение функции $f_0^z(M(a^1, a^2, a^3))$, а затем установим существование 3-АТМ $M(b^1, b^2, b^3)$ порядка $3 \times 2 \times 2$, для которого справедливо неравенство

$$f_0^z(M(b^1, b^2, b^3)) > f_0^z(M(a^1, a^2, a^3)). \quad (1)$$

Очевидно, что матрица $y^0 = \|y_{i_1 i_2}^0\|_{3 \times 2}$ с элементами

$$y_{i_1 i_2}^0 \begin{cases} 2, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(1, 1), (2, 2)\}, \\ 1, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(3, 1), (3, 2)\}, \\ 0, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}, \end{cases}$$

является вершиной многогранника $M(a^1, a^2)$. Пусть

$$z^+(y^0) = (2_{(1,1)}, 2_{(2,2)}, 1_{(3,1)}, 1_{(3,2)}).$$

Тогда непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$VM(a^3, z^+(y^0)) = \{x^i : i \in N_8\}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} x^1 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & x^2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ x^3 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & x^4 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ x^5 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & x^6 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ x^7 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, & x^8 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Любая другая вершина y многогранника $M(a^1, a^2)$ порядка 3×2 может быть получена из матрицы y^0 путем перестановки ее строк, поэтому на основании (2) справедливы равенства

$$f_0(M(a^3, z^+(y))) = 8, \quad y \in VM(a^1, a^2).$$

Поэтому, применяя предложение 3, находим, что

$$\begin{aligned} f_0^z(M(a^1, a^2, a^3)) &\geq \sum_{y \in VM(a^1, a^2)} f_0(M(a^3, z^+(y))) \\ &= 6 \cdot 8 = 48. \end{aligned} \quad (3)$$

Легко видеть, что множество целочисленных точек многогранника $M(a^1, a^2)$ совпадает с множеством $VM(a^1, a^2) \cup \{y^*\}$, где

$$y^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Известно (см. [1, 2]), что вершина 3-АТМ порядка $3 \times 2 \times 2$ содержит не более, чем 5, положительных компонент. Поэтому любая матрица $x(g(y))$, где $g(y) \in M(a^3, z^+(y^*))$, не является вершиной многогранника $M(a^1, a^2, a^3)$, поскольку она содержит по крайней мере 6 положительных компонент.

Пусть y — некоторая вершина многогранника $M(a^1, a^2)$ порядка 3×2 и пусть $g(y)$ — целочисленная матрица многогранника $M(a^3, z^+(y))$, не являющаяся его вершиной. Тогда матрица $x(g(y))$ не является и вершиной многогранника $M(a^1, a^2, a^3)$ порядка $3 \times 2 \times 2$, так как число положительных компонент этой матрицы равно 6.

Поэтому с учетом предложения 1 и неравенства (3) получаем равенство

$$f_0^z(M(a^1, a^2, a^3)) = 48. \quad (4)$$

Теперь убедимся в справедливости неравенства

$$f_0^z(M(b^1, b^2, b^3)) \geq 72,$$

где

$$b^1 = (10, 10, 10), \quad b^2 = (15, 15), \quad b^3 = (16, 14).$$

Прежде всего напомним [1, 8], что спектром двух КТМ $M(a, b)$ и $M(a', b')$ одного и того же порядка называется множество $S(a, b, a', b')$ всех чисел $\lambda \in (0, 1)$, для каждого из которых $M(\lambda a' + (1 - \lambda)a, \lambda b' + (1 - \lambda)b)$ — вырожденный многогранник.

Рассмотрим вершину $u^0 = \|u_{i_1 i_2}^0\|_{3 \times 2}$ многогранника $M(b^1, b^2)$ с компонентами

$$u_{i_1 i_2}^0 = \begin{cases} 10, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(1, 1), (2, 2)\}, \\ 5, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(3, 1), (3, 2)\}, \\ 0, & \text{если } (i_1, i_2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}. \end{cases}$$

Спектр

$$S(b^3, z^+(u^0), a^*, b^*) = \emptyset,$$

где

$$z^+(u^0) = (10_{(1,1)}, 10_{(2,2)}, 5_{(3,1)}, 5_{(3,2)}), \quad a^* = (4, 4), \quad b^* = (2, 2, 2, 2),$$

поэтому по теореме 7.1 в [1]

$$f_0(M(b^3, z^+(u^0))) = \varphi(2, 4).$$

Поэтому в силу следствия 8.6 из гл. 6 в [1] справедливо равенство

$$f_0(M(b^3, z^+(u^0))) = 12. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что всякая другая вершина u многогранника $M(b^1, b^2)$ порядка 3×2 может быть получена из матрицы u^0 путем перестановки ее строк. Поэтому согласно (5) справедливы равенства

$$f_0(M(b^3, z^+(u))) = 12, \quad u \in VM(b^1, b^2).$$

Теперь, воспользовавшись предложением 3 и принимая во внимание равенство

$$f_0(M(b^1, b^2)) = 6,$$

справедливое на основании теоремы 7.1 в [1], находим, что

$$\begin{aligned} f_0^z(M(b^1, b^2, b^3)) &\geq \sum_{u \in V M(b^1, b^2)} f_0(M(b^3, z^+(u))) \\ &= 6 \cdot 12 = 72, \end{aligned}$$

что совместно с равенством (4) и доказывает неравенство (1). Тем самым мы доказываем, что вышеприведенная гипотеза о максимальном числе ЦВ p -АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ неверна в случае, когда $p = 3$, $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 2$.

В связи с построенным контрпримером целесообразно уточнить гипотезу о максимальном числе ЦВ p -АТМ следующим образом: p -АТМ $M(a^1, \dots, a^p)$ порядка $n_1 \times \dots \times n_p$, $n_1 = \max\{n_s : s \in N_p\}$, $p \geq 3$, определенный целочисленными векторами $(a^1, \dots, a^p)$, имеет максимальное число ЦВ тогда и только тогда, когда он невырожден и всякий КТМ $M(a^1, a^s)$ порядка $n_1 \times n_s$, $s = 2, 3, \dots, p$, обладает максимальным числом $\varphi(n_1, n_s)$ вершин.

Список литературы

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 3–24.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Крачковский А.П., Транспортные многогранники с максимальным числом k -граней. *Докл. АН СССР* (1985) **282**, №4, 784–788.
4. Кравцов М.К., Доказательство гипотезы Дюбуа о максимальном числе вершин симметрического транспортного многогранника. *Докл. АН БССР* (1989) **33**, №1, 9–12.
5. Кравцов М.К., Полиэдральные аспекты транспортных задач. *Докл. АН СССР* (1989) **309**, №2, 271–275.
6. Кравцов М.К., Полиэдральные аспекты многоиндексных транспортных задач с аксиальными суммами. *Докл. АН СССР* (1990) **315**, №6, 1298–1301.
7. Кравцов М.К., О транспортных многогранниках с минимальным числом k -граней. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 108–117.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К., О некоторых свойствах транспортных многогранников с максимальным числом вершин. *Докл. АН СССР* (1976) **228**, №5, 1025–1028.

Статья поступила 11.11.1998.