Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Асратян, Н. Н. Кузюрин, Аппроксимация оптимумов целочисленных программ типа покрытия–упаковки, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 96–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 07:28:02

Аппроксимация оптимумов целочисленных программ типа покрытия–упаковки

© 2000 г. А.С. Асратян, Н.Н. Кузюрин

Рассматривается задача оценки величины оптимумов так называемых целочисленных программ типа покрытия–упаковки, которые содержат ограничения типа покрытия и типа упаковки одновременно. Введено понятие δ -релаксации таких программ и показано, что вероятностное округление позволяет получить простые достаточные условия для точной аппроксимации целочисленных оптимумов через оптимумы δ -релаксаций. Предложен эффективный вероятностный алгоритм нахождения приближенного решения целочисленных программ типа покрытия–упаковки и отмечено, что с помощью известной техники дерандомизации этот алгоритм может быть преобразован в детерминированный алгоритм.

Работа выполнена при поддержке Svenska Instituteten и Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00210.

1. Введение

Известно, что линейное и целочисленное программирование — это универсальный способ записи различных задач комбинаторной оптимизации, важных как с теоретической, так и с практической точек зрения [15].

Между задачами линейного и целочисленного линейного программирования существует большая разница. Для задач линейного программирования известны эффективные алгоритмы решения, а для задач целочисленного линейного программирования таких алгоритмов неизвестно и, вероятно, они и не существуют, так как задача целочисленного линейного программирования является NP-полной (см. [15]). С другой стороны, линейная релаксация, полученная из целочисленной программы отбрасыванием требования целочисленности переменных, является наиболее естественной аппроксимацией целочисленной линейной программы. Это одна из причин того, что отношения целочисленных и рациональных оптимумов являются объектом многочисленных исследований [4, 8, 15].

Недавно значительный прогресс был достигнут в изучении так называемых положительных линейных программ (все исходные данные неотрицательны), и новые более эффективные алгоритмы были предложены для нахождения $(1 + \varepsilon)$ -приближенных решений таких линейных программ [6, 7, 9, 12]. Это вызвало новый интерес к старой проблеме аппроксимации оптимумов целочисленных линейных программ через оптимумы их линейных релаксаций. Весьма желательно найти простые

достаточные условия, гарантирующие существование хороших приближенных решений целочисленных линейных программ.

Для различных форм целочисленных программ типа покрытия или упаковки вероятностное округление обеспечивает точные оценки целочисленных оптимумов через рациональные [1, 14, 18]. Имеется важная задача нахождения аналогичных аппроксимаций для более общих классов целочисленных программ. Цель настоящей статьи предложить один такой класс целочисленных программ, включающий в себя классы программ типа покрытия или упаковки.

Мы рассматриваем отношение целочисленных и рациональных оптимумов для целочисленных программ типа покрытия-упаковки, которые содержат одновременно ограничения типа покрытия и упаковки. Ранее такие ограничения рассматривались только отдельно. Мы вводим понятие δ -релаксации таких целочисленных программ и показываем, как применить вероятностное округление для получения простых достаточных условий для точных аппроксимаций целочисленного оптимума через оптимум их δ -релаксации. Наконец, мы предлагаем эффективный вероятностный алгоритм для нахождения приближенного решения целочисленных линейных программ типа покрытия-упаковки. Таким образом, наши результаты дают точные аппроксимации целочисленных оптимумов для более широкого класса целочисленных линейных программ, включающих в качестве подклассов целочисленные программы типа покрытия и упаковки.

2. Задача

Пусть $A = (a_{ij})$ — рациональная $m \times n$ матрица, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ — рациональные векторы, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$\mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Мы рассматриваем целочисленные программы следующего вида:

найти

$$\max \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{1}$$

при условиях

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \tag{2}$$

$$x_j — \text{целые неотрицательные числа, } j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Функция $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x}$ называется целевой функцией и $\mathbf{c}\mathbf{x}$ является значением целевой функции на $\mathbf{x}$. Любое неравенство в (2) называется ограничением. Любой целочисленный вектор, удовлетворяющий (2)–(3), называется допустимым решением (1)–(3). Допустимое решение со значением целевой функции, равным максимуму, называется оптимальным решением. Значение целевой функции на оптимальном решении задачи (1)–(3) называется целочисленным оптимумом и обозначается через z .

Задача (1)–(3) без ограничения целочисленности переменных называется линейной релаксацией (1)–(3). Значение ее оптимума называется рациональным оптимумом и обозначается обычно через q .

Следующие классы целочисленных линейных программ хорошо известны.

Целочисленные программы типа упаковки. Это задача (1)–(3) с ограничением, состоящим в том, что исходные данные неотрицательны. Различные классы таких программ исследовались в [4, 5, 14, 17, 18].

Целочисленные программы типа покрытия. Найти

$$\min cx$$

при ограничениях

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0, \quad x - \text{целочисленный вектор,}$$

где все элементы исходных данных неотрицательны.

Различные классы таких программ исследовались в [1, 2, 8, 17].

Мы рассматриваем следующий класс целочисленных программ, включающий в качестве подклассов классы целочисленных программ типа покрытия и упаковки.

Целочисленные программы типа покрытия–упаковки. Найти

$$\max cx \tag{4}$$

при ограничениях

$$Ax \leq b, \quad Bx \geq d, \quad x - \text{целочисленный неотрицательный вектор,}$$

где все исходные данные неотрицательны.

Ограничения $Ax \leq b$ мы называем ограничениями типа упаковки и ограничения $Bx \geq d$ ограничениями типа покрытия. Мы предполагаем, что имеется m_1 ограничений типа упаковки и m_2 ограничений типа покрытия.

Для этого класса целочисленных программ мы предполагаем, что

$$\max_j a_{ij} = 1, \quad \max_j b_{ij} \geq 1, \quad \max_j c_j = 1.$$

Нетрудно видеть, что эти ограничения не приводят к потере общности, так как можно полагать, что a_{ij} и b_{ij} не превосходят правой части i -го ограничения для всех i, j . Если это не так для ограничения типа упаковки, то можно положить $x_j = 0$. Если это не так для ограничения типа покрытия, то можно положить $a_{ij} = b_i$, так как это не меняет решения. Затем, масштабируя каждую строку A (или A и B) так, чтобы

$$\max_j a_{ij} = 1$$

для каждого i , и масштабируя c так, чтобы

$$\max_j c_j = 1,$$

мы получаем требуемую форму.

3. Гарантированные оценки

Рассмотрим целочисленную программу (4). Мы заинтересованы в получении простых достаточных условий, гарантирующих точную аппроксимацию оптимумов таких целочисленных программ.

Мы будем использовать вероятностные методы, в частности, оценки для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин. Идея вероятностного округления, предложенная в [13], заключается в следующем. Для примера рассмотрим случай целочисленных программ типа покрытия. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — некоторое оптимальное решение линейной релаксации целочисленной программы типа покрытия, и $\mathbf{x}' = (kx_1, \dots, kx_n)$ для некоторого параметра $k > 1$. Ясно, что $\mathbf{x}'$ также является допустимым решением линейной релаксации. Рассмотрим далее дробную часть каждого kx_i как вероятность $p_i = kx_i - \lfloor kx_i \rfloor$, округляя kx_i до $\lfloor kx_i \rfloor + 1$ с вероятностью p_i и до $\lfloor kx_i \rfloor$ с вероятностью $1 - p_i$. Эта базовая идея приводит к получению точных оценок оптимумов целочисленных программ типа покрытия и упаковки [14, 1, 17, 18].

К сожалению, этот подход не может быть использован при аппроксимации целочисленных программ типа покрытия–упаковки, поскольку умножая допустимый рациональный вектор на множитель $k > 1$, мы можем получить вектор, не являющийся допустимым для такой программы. Мы преодолеваем эту трудность, вводя новое понятие δ -релаксации целочисленной программы типа покрытия–упаковки.

Рассмотрим линейную программу, которую мы называем δ -релаксацией исходной целочисленной программы:

найти

$$\max c\mathbf{x}$$

при ограничениях

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(1 - \delta), \quad B\mathbf{x} \geq \mathbf{d}(1 + \delta), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Обозначим значение ее оптимума через $q(\delta)$. Отметим, что 0-релаксация является обычной линейной релаксацией целочисленной линейной программы и, следовательно, $q(0) = q$. Найти максимальное δ такое, что δ -релаксация имеет решение, нетрудно. Для этого достаточно решить следующую вспомогательную линейную программу с одной дополнительной переменной δ : найти

$$\max \delta$$

при ограничениях

$$A\mathbf{x} + \delta \mathbf{b} \leq \mathbf{b}, \quad B\mathbf{x} - \delta \mathbf{d} \geq \mathbf{d}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \delta \geq 0.$$

Пусть δ_0 — оптимум для этой задачи. Ясно, что если $\delta_0 > 0$, то для любого δ такого, что $0 \leq \delta < \delta_0$, δ -релаксация также имеет решение. Более того, если $0 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq \delta_0$, то $q(\delta_1) \geq q(\delta_2)$. Таким образом, можно использовать обычные алгоритмы линейного программирования для нахождения $q(\delta)$ и δ_0 [15].

Найдем простые достаточные условия гарантирующие, что $z \geq (1 - \delta)q(\delta)$. Следующая лемма используется для получения оценок оптимумов целочисленных линейных программ.

Лемма 1 ([14]). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — независимые случайные величины такие, что x_i принимает два значения, 0 и a_i , $0 \leq a_i \leq 1$, и

$$P\{x_i = a_i\} = p_i, \quad P\{x_i = 0\} = 1 - p_i.$$

Тогда для

$$X = \sum_{i=1}^n x_i, \quad EX = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

выполнены неравенства

$$P\{X - EX > \delta EX\} \leq \exp\{(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))EX\} \quad (5)$$

для любого $\delta > 0$,

$$P\{X - EX < -\delta EX\} \leq \exp\{-(\delta^2/2)EX\}, \quad (6)$$

для $0 \leq \delta \leq 1$, и

$$\exp\{(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))\} \leq \exp\{-\delta^2/3\}, \quad (7)$$

для $0 \leq \delta \leq 1$.

Теорема 1. Если для некоторого δ , $0 < \delta < 1$, δ -релаксация исходной целочисленной программы типа покрытия-упаковки имеет решение и

$$b_i \geq 3\delta^{-2} \ln(3m_1), \quad i = 1, \dots, m_1, \quad (8)$$

$$d_i \geq 2\delta^{-2}(1 + \delta) \ln(3m_2), \quad i = 1, \dots, m_2, \quad (9)$$

$$c_j \geq (\ln(3m_2))^{-1} \ln 3, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

то программа (4) имеет целочисленное допустимое решение $\mathbf{Z}$ такое, что

$$q \geq \mathbf{c}\mathbf{z} \geq (1 - \delta)q(\delta).$$

4. Доказательство теоремы

Пусть $\mathbf{x} = (t_1, \dots, t_n)$ — некоторое решение δ -релаксации исходной целочисленной программы типа покрытия-упаковки. Определим вектор $\mathbf{p}$ следующим образом:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - [\mathbf{x}] = (p_1, \dots, p_n),$$

где

$$p_i = t_i - [t_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим независимые случайные величины z_j следующим образом: $z_j = 1$ с вероятностью p_j и $z_j = 0$ с вероятностью $1 - p_j$, для всех j . Пусть $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ и

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z} + [\mathbf{x}] = (Z_1, \dots, Z_n),$$

где

$$Z_j = z_j + [t_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

Мы докажем, что с положительной вероятностью случайный вектор $\mathbf{Z}$ является допустимым (т.е. удовлетворяет всем ограничениям в (4)) и значение целевой функции на нем близко к значению оптимума δ -релаксации.

Пусть

$$\begin{aligned} Z^{(i)}(A) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} Z_j, & Y &= \sum_{j=1}^n c_j Z_j, \\ z^{(i)}(A) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, & X^{(i)}(A) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \lfloor t_j \rfloor. \end{aligned}$$

Аналогично, пусть

$$\begin{aligned} Z^{(i)}(B) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} Z_j, & z^{(i)}(B) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} z_j, \\ X^{(i)}(B) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} \lfloor t_j \rfloor. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$X^{(i)}(A) + \mathbf{E}z^{(i)}(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \leq (1 - \delta)b_i, \quad (11)$$

$$X^{(i)}(B) + \mathbf{E}z^{(i)}(B) = \sum_{j=1}^n b_{ij} t_j \geq (1 + \delta)d_i. \quad (12)$$

Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i -е ограничение типа упаковки не выполнено, т.е.

$$A_i: Z^{(i)}(A) > b_i,$$

и пусть B_i — событие, состоящее в том, что i -е ограничение типа покрытия не выполнено, т.е.

$$B_i: Z^{(i)}(B) < d_i.$$

Пусть C — событие $Y < (1 - \delta)q(\delta)$. Рассматривая эти события как плохие мы будем оценивать вероятность того, что по крайней мере одно из этих событий произойдет, т.е.

$$P_{\text{bad}} = \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^{m_1} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{m_2} B_i \cup C \right\}.$$

Если мы докажем, что эта вероятность меньше 1, то вероятность события

$$\bigcap_{i=1}^{m_1} \bar{A}_i \cap \bigcap_{i=1}^{m_2} \bar{B}_i \cap \bar{C}$$

положительна, т.е. положительна вероятность того, что ограничения в (4) удовлетворяются и для целевой функции выполнено неравенство $Y \geq (1 - \delta)q(\delta)$. Полагая

$$F(\delta) = \sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{P}\{A_i\} + \sum_{i=1}^{m_2} \mathbf{P}\{B_i\} + \mathbf{P}\{C\},$$

мы будем пользоваться оценкой

$$P_{\text{bad}} \leq F(\delta).$$

Мы покажем, что $F(\delta) < 1$ при условиях теоремы 1, т.е. что вероятность того, что хотя бы одно плохое событие произойдет, меньше 1. Следовательно, существует целочисленный вектор, удовлетворяющий всем ограничениям в (4), такой, что значение целевой функции на нем не сильно отличается от $q(\delta)$.

Доказательство состоит из трех частей. В первой части рассматриваются ограничения типа упаковки, во второй ограничения типа покрытия, и, наконец, в третьей части рассматриваются неравенства для целевой функции. Для простоты записи мы будем опускать буквы A и B в обозначениях сумм, относящихся к матрицам A и B . Например, вместо $Z^{(i)}(A)$ или $X^{(i)}(B)$ мы будем писать $Z^{(i)}$ и $X^{(i)}$ соответственно.

Рассмотрим ограничения типа упаковки.

Из (11) следует, что

$$X^{(i)} + \mathbf{E}z^{(i)} \leq (1 - \delta)b_i,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_i\} &= \mathbf{P}\{Z^{(i)} > b_i\} = \mathbf{P}\{z^{(i)} > b_i - X^{(i)}\} \\ &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > b_i - X^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > b_i - b_i(1 - \delta)\} \\ &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > b_i\delta\}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{E}z^{(i)} = rb_i$, где $0 \leq r \leq 1$ ввиду неравенства $\mathbf{E}z^{(i)} < b_i$. Если $r = 0$, то $\mathbf{E}z^{(i)} = 0$, что влечет равенство $\mathbf{P}\{A_i\} = 0$. Далее мы рассмотрим случай $r > 0$. По лемме 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > b_i\delta\} &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > \mathbf{E}z^{(i)}(\delta/r)\} \\ &\leq \exp\{((\delta/r) - (1 + (\delta/r)) \ln(1 + (\delta/r)))\mathbf{E}z^{(i)}\} \\ &= \exp\{(\delta - (r + \delta) \ln(1 + (\delta/r)))b_i\}. \end{aligned}$$

Используя обозначение

$$f(r) = \delta - (r + \delta) \ln(1 + (\delta/r))$$

и вычисляя производную, получаем, что

$$\begin{aligned} f'(r) &= -\ln(1 + (\delta/r)) + (r + \delta)(1 + (\delta/r))^{-1}\delta r^{-2} \\ &= \delta r^{-1} - \ln(1 + (\delta/r)) \geq 0, \end{aligned}$$

ввиду известного неравенства $\ln(1 + x) \leq x$ при $x > 0$.

Подставляя $r = 1$ и используя неравенство (7) леммы 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_i\} &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} > b_i\delta\} \\ &\leq \exp\{(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))b_i\} \leq \exp\{(-\delta^2/3)b_i\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что (ввиду (8)) $b_i \geq 3\delta^{-2} \ln(3m_1)$ для всех $i = 1, \dots, m_1$, мы получаем, что

$$\mathbf{P}\{A_i\} \leq \exp\{(-\delta^2/3)b_i\} \leq \exp\{-\ln(3m_1)\} = 1/(3m_1)$$

для всех $i = 1, \dots, m_1$. Из последнего неравенства следует, что

$$\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{P}\{A_i\} \leq \frac{1}{3},$$

поскольку в левой части каждое из m_1 слагаемых не превосходит $1/(3m_1)$.

Рассмотрим теперь случай ограничений типа покрытия. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B_i\} &= \mathbf{P}\{Z^{(i)} < d_i\} = \mathbf{P}\{z^{(i)} < d_i - X^{(i)}\} \\ &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < d_i - X^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)}\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$X^{(i)} + \mathbf{E}z^{(i)} = Rd_i, \quad \mathbf{E}z^{(i)} = rd_i,$$

где R и r — некоторые параметры. Из неотрицательности исходных данных вытекает, что $R \geq r$. Если $r = 0$, то $\mathbf{E}z^{(i)} = 0$, что влечет равенство $\mathbf{P}\{B_i\} = 0$. Далее рассмотрим случай $r > 0$.

Из (12) следует, что $R \geq 1 + \delta$. По лемме 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{B_i\} &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < d_i - Rd_i\} \\ &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < -(R-1)d_i\} = \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < -\frac{R-1}{r}\mathbf{E}z^{(i)}\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{2r^2}\mathbf{E}z^{(i)}\right\} = \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{2r}d_i\right\}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь неравенство (6) леммы 1 с $\delta = (R-1)/r$ и условие $0 < \delta \leq 1$. Если это условие на δ не выполнено и $R-1 > r$, то мы получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < -\frac{R-1}{r}\mathbf{E}z^{(i)}\right\} \leq \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E}z^{(i)} < -\mathbf{E}z^{(i)}\} = \mathbf{P}\{z^{(i)} < 0\} = 0,$$

ввиду неотрицательности исходных данных. Следовательно, полученное неравенство также верно и в случае $R-1 > r$ и

$$\mathbf{P}\{B_i\} \leq \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{2r}d_i\right\}.$$

Принимая во внимание, что $R \geq r$, мы получаем неравенство

$$\mathbf{P}\{B_i\} \leq \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{2R}d_i\right\}.$$

Вычисляя производную функции

$$F(R) = \frac{(R-1)^2}{2R},$$

получаем, что при $R > 1$

$$F'(R) = -\frac{(R-1)^2}{2R^2} + \frac{R-1}{R} = \frac{R^2-1}{2R^2} > 0.$$

Мы видим, что функция $F(R) = (R - 1)^2/(2R)$ возрастает при $R > 1$. Поскольку $R \geq 1 + \delta$, мы заключаем, что

$$\mathbf{P}\{B_i\} \leq \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{2(1+\delta)} d_i \right\}.$$

Условие (9) утверждает, что

$$d_i \geq \frac{2(1+\delta)}{\delta^2} \ln(3m_2)$$

для всех $i = 1, \dots, m_2$, и мы получаем, что

$$\mathbf{P}\{B_i\} \leq \exp\{-\ln(3m_2)\} = 1/(3m_2)$$

для всех $i = 1, \dots, m_2$, что немедленно влечет неравенство

$$\sum_{i=1}^{m_2} \mathbf{P}\{B_i\} \leq \frac{1}{3}.$$

Получим теперь неравенства для целевой функции.

Справедливы равенства

$$Y = \mathbf{c}z + \mathbf{c}[\mathbf{x}], \quad \mathbf{E}Y = q(\delta),$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{C\} &= \mathbf{P}\{Y < (1 - \delta)q(\delta)\} = \mathbf{P}\{\mathbf{c}z < (1 - \delta)q(\delta) - \mathbf{c}[\mathbf{x}]\} \\ &\leq \mathbf{P}\{\mathbf{c}z - \mathbf{E}cz < (1 - \delta)q(\delta) - q(\delta)\} = \mathbf{P}\{\mathbf{c}z - \mathbf{E}cz < -\delta q(\delta)\}. \end{aligned}$$

Представим $\mathbf{E}cz$ в виде

$$\mathbf{E}cz = rq(\delta), \quad 0 \leq r < 1.$$

Если $r = 0$, то $\mathbf{E}cz = 0$ и, значит, $\mathbf{P}\{C\} = 0$.

Предполагая теперь, что $r > 0$ и применяя лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mathbf{c}z - \mathbf{E}cz < -(\delta/r)\mathbf{E}cz\} &\leq \exp\{(-\delta^2/(2r^2))\mathbf{E}cz\} \\ &= \exp\{(-\delta^2/(2r))q(\delta)\} \leq \exp\{-\delta^2 q(\delta)/2\}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство получено при условии, что $0 < \delta/r \leq 1$. Если это условие не выполнено, то $\mathbf{P}\{C\} = 0$, так как из неотрицательности $\mathbf{c}z$ вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{c}z < 0\} = 0.$$

Ясно, что условие

$$q(\delta) > (2 \ln 3) \delta^{-2}, \tag{13}$$

влечет оценку $\mathbf{P}\{C\} < 1/3$.

Покажем теперь, что условие

$$c_j \geq (\ln(3m_2))^{-1} \ln 3, \quad j = 1, \dots, n,$$

также влечет оценку $P\{C\} < 1/3$.

Пусть $\mathbf{x} = (t_1, \dots, t_n)$ — некоторое решение δ -релаксации исходной задачи типа покрытия–упаковки. Обозначая $c_0 = \min_j c_j$ и принимая во внимание, что все элементы матрицы ограничений не превосходят 1, получаем, что

$$q(\delta) \geq c_0 \sum_{j=1}^n t_j \geq c_0 \sum_{j=1}^n b_{ij} t_j \geq c_0 2\delta^{-2} (1 + \delta) \ln(3m_2).$$

Используя это неравенство и неравенство $c_0 \geq (\ln(3m_2))^{-1} \ln 3$, получаем оценку

$$\begin{aligned} P\{C\} &\leq \exp\{-\delta^2 q(\delta)/2\} \leq \exp\{-c_{\min}(1 + \delta) \ln(3m_2)\} \\ &\leq \exp\{-(1 + \delta) \ln 3\} = \frac{1}{3^{1+\delta}} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

5. Вероятностный алгоритм

Как можно использовать теорему 1. Прежде всего, можно найти максимальное δ такое, что δ -релаксация имеет решение. Для этого нужно решить вспомогательную линейную программу, описанную перед формулировкой теоремы 1. Пусть это значение будет δ_0 .

Затем найдем максимальное $\delta > 0$, для которого выполнены условия (8)–(10). Обозначим это значение δ_1 .

Если $\delta_1 \leq \delta_0$ и $\delta_1 < 1$, то все условия теоремы 1 выполнены и мы можем применять эту теорему. В противном случае, мы не можем ее использовать.

Отметим также, что вероятностное округление, которое мы описали для целочисленных программ типа покрытия–упаковки, является, по существу, эффективным вероятностным алгоритмом с доказуемо хорошим качеством аппроксимации. Различные сведения о вероятностных алгоритмах можно найти в [10].

Вероятностный алгоритм.

Шаг 1. Найти решение $\mathbf{x} = (t_1, \dots, t_n)$ δ -релаксации исходной целочисленной программы типа покрытия–упаковки.

Шаг 2. Вычислить вектор $\mathbf{p}$ по правилу

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - \lfloor \mathbf{x} \rfloor = (p_1, \dots, p_n).$$

Шаг 3. Определить независимые случайные величины z_j , полагая $z_j = 1$ с вероятностью p_j , и $z_j = 0$ с вероятностью $1 - p_j$ для всех j . Положить $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$.

Шаг 4. Вычислить

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z} + \lfloor \mathbf{x} \rfloor.$$

Шаг 5. Проверить, удовлетворяет ли вектор $\mathbf{Z}$ неравенству

$$Y \geq (1 - \delta)q(\delta)$$

на целевую функцию и всем ограничениям.

Детерминированный алгоритм нахождения целочисленного вектора $\mathbf{Z}$ со свойствами, гарантируемыми теоремой 1, можно построить, используя технику дерандомизации, основанную на методе условных вероятностей [14, 16] или его модификациях [1, 17, 18].

Список литературы

1. Кузюрин Н.Н., Асимптотически точные полиномиальные алгоритмы в целочисленном линейном программировании. *Дискретная математика* (1989) 1, №2, 78–85.
2. Кузюрин Н.Н., Об отношении оптимумов линейных и целочисленных программ. *Дискретная математика* (1991) 3, №1, 98–104.
3. Хачиян Л.Г., Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. *Докл. АН СССР* (1979) 244, 1093–1096.
4. Aharoni R., Erdős P., Linial N., Primal and dual integer programs and the relationship between their optima. In: *Proc. 17th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. 1985, pp. 476–483.
5. Aharoni R., Erdős P., Linial N., Optima of dual integer linear programs. *Combinatorica* (1988) 8, №1, 476–483.
6. Awerbuch B., Azar Y., Local optimization of global objectives: competitive distributed deadlock resolution and resource allocation. In: *Proc. 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. 1994, pp. 240–249.
7. Bartal Y., Byers J.H., Raz D., Global optimization using local information with applications to flow control. In: *Proc. 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. 1997, pp. 303–312.
8. Lovasz L., On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Math.* (1975) 13, 383–390.
9. Luby M., Nisan N., A parallel approximation algorithm for positive linear programming. In: *Proc. 25th Annual Symposium on Theory of Computing*. 1993, pp. 448–457.
10. Motwani R., Raghavan P., *Randomized Algorithms*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
11. Papadimitriou C.H., Yannakakis M., Linear programming without the matrix. *Proc. Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. 1993, pp. 121–129.
12. Plotkin S., Shmoys D., Tardos E., Fast approximation algorithms for fractional packing and covering problems. *Math. Oper. Research* (1995) 20, 257–301.
13. Raghavan P., Thompson C.D., Randomized rounding: a technique for provably good algorithms and algorithmic proofs. *Combinatorica* (1987) 37, 365–374.
14. Raghavan P., Probabilistic construction of deterministic algorithms: approximating packing integer programs. *J. Comp. Syst. Sci.* (1988) 37, 130–143.
15. Schrijver A., *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, New York, 1986.
16. Spencer J., *Ten Lectures on the Probabilistic Method*. SIAM, Philadelphia, 1987.
17. Srinivasan A., Improved approximations of packing and covering problems. In: *Proc. ACM Symposium on Theory of Computing*. 1995, pp. 268–276.
18. Srivastav A., Stangier P., Algorithmic Chernoff–Hoeffding inequalities in integer programming. *Random Structures and Algorithms* (1996) 8, №1, 27–58.

Статья поступила 22.08.1999.