Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Псевдогеометрические графы частичных геометрий $pG_2(4, t)$, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 113–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:41:30

УДК 519.14

Псевдогеометрические графы частичных геометрий $pG_2(4, t)$

© 2000 г. А.А. Махнев

Доказано, что сильно регулярный граф Γ с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2),$$

содержащий плохую тройку, совпадает с треугольным графом $T(6)$ или с частным графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$. Тройка вершин называется плохой, если эти вершины попарно не смежны и пересечение их окрестностей пусто. Как следствие, установлено, что любой λ -подграф из Γ состоит из изолированных вершин и треугольников.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00462.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть X — некоторое множество вершин графа Γ . В данной работе подграф X будет обозначать подграф, индуцированный Γ на X . Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть окрестностью вершины a и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$, а через $[a]'$ — подграф $\Gamma - a^\perp$.

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется регулярным валентности k , если валентность любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) , если он содержит v вершин, регулярен валентности k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух несмежных вершин a, b из Γ . Для подграфа Δ графа Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных с i вершинами из Δ , $x_i(\Delta) = |K_i(\Delta)|$. Полный многодольный граф $\{M_1; \dots; M_n\}$ с долями M_i порядка m_i назовем $(m_1, \dots, m_n)$ -графом. Подграф $[a] \cap [b]$ назовем (λ) - μ -подграфом, если вершины a, b (смежны) находятся на расстоянии 2.

Граф называется $(m \times n)$ -решеткой, если множество его вершин совпадает с $X \times Y$, где $|X| = m$, $|Y| = n$, и две вершины смежны, если они имеют точно одну

общую координату. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны только, если они имеют общий элемент. Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -элементные подмножества данного n -элементного множества, и две вершины смежны, если они пересекаются по $(m - 1)$ -элементному подмножеству. Частным графа Джонсона $\bar{J}(2m, m)$ называется граф, полученный отождествлением m -элементных подмножеств с их дополнениями.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (через $pG_\alpha(s, t)$ обозначим геометрию из класса всех α -частичных геометрий порядка (s, t)). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным 4-угольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф α -частичной геометрии порядка (s, t) сильно регулярен с параметрами

$$v = (s + 1)(1 + st/\alpha), \quad k = s(t + 1), \quad \lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t, \quad \mu = \alpha(t + 1).$$

Для графов с этими параметрами достигается граница Хоффмана для клик (см. [1]) и каждая вершина вне $(s + 1)$ -клики L смежна с α вершинами из L . Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$.

Псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_2(4, t)$ имеет параметры

$$v = 5(2t + 1), \quad k = 4(t + 1), \quad \lambda = t + 3, \quad \mu = 2t + 2.$$

Собственные значения графа равны в этом случае $4t + 4$, 2 , $-(t + 1)$. По условию целочисленности [1] $t + 3$ делит $2t(5t + 5)$, поэтому $t = 1, 2, 3, 7, 9, 12, 17, 27$ или 57 . Если $t = 1$, то граф совпадает с треугольным графом $T(6)$, который является геометрическим. Для $t = 2$ геометрия $pG_2(4, 2)$ — это 3-сеть, она может быть построена из 5×5 решетки добавлением пяти прямых, параллельных главной диагонали решетки. По условию Крейна [1] параметр t не больше 27. Граф с параметрами $(275, 112, 30, 56)$ существует и является графом Маклафлина [2]. Хорошо известно также, что не существует $pG_2(4, 3)$, но частное графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$ является псевдогеометрическим для $pG_2(4, 3)$. С другой стороны, известно существование $pG_2(4, 17)$ [1].

Рассмотрим Эрмитов граф $\mathcal{H}(q)$, где q — степень нечетного простого числа, множество вершин состоит из пар

$$\{(x, y) \mid x^{q+1} + y + y^q = 0\} \subset \text{GF}(q^2)^2,$$

и пары (x_1, y_1) , (x_2, y_2) смежны, если $x_1 x_2^q + y_1 + y_2^q$ является квадратом или неквадратом в $\text{GF}(q^2)$ в зависимости от того $q \equiv 3$ или $q \equiv 1$ по модулю 4. Тогда $\mathcal{H}(q)$ является псевдогеометрическим с

$$\alpha = (q - 1)/2, \quad s = q - 1, \quad t = (q^2 - 1)/2.$$

В частности, граф $\mathcal{H}(5)$ является псевдогеометрическим для $pG_2(4, 12)$. В [3] доказано, что граф $\mathcal{H}(5)$ не является геометрическим.

Для $t = 7, 9$ неизвестно существование ни указанных геометрий, ни сильно регулярных графов с данными параметрами. В [4] классифицированы псевдогеометрические графы для $pG_2(4, t)$ при условии, что все μ -подграфы регулярны и не содержат треугольников. Оказалось, что последнее условие излишне.

Предложение 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2).$$

Тогда μ -подграфы из Γ не содержат треугольников.

Плохой тройкой называется такая 3-кликка, что пересечение окрестностей ее вершин пусто. Важность этого понятия объясняется тем, что если псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_2(4, t)$ содержит максимальную 4-кликку Δ , то $K_0(\Delta)$ является плохой тройкой.

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2),$$

содержащий плохую тройку. Тогда Γ является треугольным графом $T(6)$ или частным графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$.

В частности, псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_2(4, t)$ при $t > 3$ не содержит плохих троек. Далее, графы из заключения теоремы не содержат максимальных 4-клик, и мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2).$$

Тогда для любого ребра ac из Γ подграф $[a] \cap [c]$ состоит из изолированных вершин и треугольников.

В связи с данным следствием, можно высказать предположение о наличии 5-клики в любом графе из исследуемого класса.

Гипотеза. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2).$$

Тогда Γ содержит 5-клику.

Предложение 2 дает частичное подтверждение этой гипотезы.

Предложение 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2).$$

Если $t \leq 3$, то Γ содержит 5-клику.

Доказательство проводится следующим образом. В параграфе 2 получены некоторые вспомогательные результаты. В параграфе 3 доказано предложение 1. В параграфе 4 показано, что μ -подграфы вершин из плохой тройки состоят из изолированных 4-угольников. В параграфе 5 с помощью классификации локально (4×4) -решеточных графов [6] завершено доказательство теоремы, а в параграфе 6 доказано предложение 2.

2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены некоторые часто используемые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и валентностями вершин $d_1, \dots, d_N$. Тогда

$$(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} \right) = x_0 + \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$, $i = 3, \dots, N$.

Доказательство этого утверждения содержится в [5] (см. лемму 1 в [5]).

В леммах 2–9 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами точечного графа частичной геометрии $pG_2(4, t)$

$$v = 10t + 5, \quad k = 4t + 4, \quad \lambda = t + 3, \quad \mu = 2t + 2.$$

Лемма 2. Пусть K — клика из i вершин графа Γ , $x_i = x_i(K)$. Тогда

(1) если $i = 4$, то $x_0 + x_3 + 3x_4 = 3$;

(2) если $i = 3$, то $x_0 + x_3 = t + 2$.

Доказательство этих утверждений состоит в простом применении леммы 1 к подграфу $\Delta = K$.

Лемма 3. Пусть ac — ребро. Тогда

(1) $[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и $[a]' \cap [c]'$ содержат по $3t$ вершин;

(2) если $d \in [a] \cap [c]$ и d смежна точно с i вершинами из $[a] \cap [c]$, то d смежна с $2t - 2 + i$ вершинами из $[a]' \cap [c]'$;

(3) если $w \in [a]' \cap [c]'$ и w смежна точно с j вершинами из $[a] \cap [c]$, то w смежна с j вершинами из $[a]' \cap [c]'$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. По условию $\lambda = t + 3$, поэтому

$$|[a] - c^\perp| = |[c] - a^\perp| = 3t.$$

Теперь $[a]' \cap [c]'$ состоит из $5(2t + 1) - (6t + t + 5) = 3t$ вершин.

Докажем второе утверждение. Заметим, что $[d]$ содержит по $t + 2 - i$ вершин из $[a] - c^\perp$ и $[c] - a^\perp$, поэтому $[d]$ содержит

$$4(t + 1) - 2(t + 2 - i) - (i + 2) = 2t - 2 + i$$

вершин из $[a]' \cap [c]'$.

Наконец, докажем третье утверждение. Ясно, что $[w]$ содержит по $\mu - j$ вершин из $[a] - c^\perp$ и $[c] - a^\perp$. Теперь из равенства $k = 2\mu$ следует, что $[w]$ содержит j вершин из $[a]' \cap [c]'$.

Лемма 4. Пусть вершины a, b не смежны. Тогда выполняются следующие утверждения.

- (1) Подграфы $[a] - b^\perp$, $[b] - a^\perp$ и $[a] \cap [b]$ содержат по $2(t+1)$ вершин и $|[a]' \cap [b]'| = 4t - 3$.
- (2) Если вершина d из $[a] \cap [b]$ смежна точно с i вершинами из $[a] \cap [b]$, то d смежна с $2t - 4 + i$ вершинами из $[a]' \cap [b]'$.
- (3) Если $w \in [a]' \cap [b]'$ и w смежна точно с j вершинами из $[a] \cap [b]$, то w смежна с j вершинами из $[a]' \cap [b]'$.

Доказательство. Утверждения леммы получаются простыми вычислениями, как в доказательстве леммы 3.

Лемма 5. Если a, b, c — плохая тройка, то окрестность каждой вершины из $\Delta = [a] \cap [b]$ содержит две вершины из Δ , по $t+1$ вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и $2t - 2$ вершин из $[a]' \cap [b]'$. Далее, $[w]$ содержит по $t+1$ вершине из Δ , $[a] \cap [c]$ и $[b] \cap [c]$ для $w \in [a]' \cap [b]' \cap [c]'$.

Доказательство. Пусть $d \in [a] \cap [b]$ и $[d]$ содержит β вершин из $[a] \cap [b]$. Тогда d смежна с $t+3-\beta$ вершинами из $[a] - [b]$ и из $[b] - [a]$. Но $[c] = ([a] - [b]) \cup ([b] - [a])$, поэтому $2(t+3-\beta) = 2(t+1)$ и $\beta = 2$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть $w \in [a]' \cap [b]' \cap [c]'$ и вершина w смежна с γ вершинами из $[a] \cap [b]$. Тогда $[w]$ содержит по $2(t+1) - \gamma$ вершин из $[a] \cap [c]$ и из $[b] \cap [c]$. Снова $2(2t+2-\gamma) = 2(t+1)$, поэтому $\gamma = t+1$.

Лемма 6. Пусть Δ — четырехугольник из Γ , $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$.

Тогда выполняется равенство $x_0 + x_3 + 3x_4 = 2t+5$, и если a, b, c — плохая тройка и Δ содержится в $[a] \cap [b]$, то каждая вершина вне $([a] \cap [b]) \cup \{a, b, c\}$ смежна с двумя вершинами из Δ .

Доказательство. В силу выбора Δ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= 10t + 1, \\ \sum_i i x_i &= 4(4t + 2), \\ \sum_i \binom{i}{2} x_i &= 4t + 4(t + 3). \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим, что

$$x_0 + x_3 + 3x_4 = 2t + 5.$$

В условиях второго утверждения $a, b \in K_4$, и K_0 содержит с и $2t - 2$ вершин из $[a] \cap [b]$. Из первого утверждения следует, что $\{a, b\} = K_4$ и K_0 совпадает с $\{c\} \cup (([a] \cap [b]) - \Delta)$. Теперь

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 8t, \\ x_1 + 2x_2 &= 16t, \end{aligned}$$

следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 8t$.

Лемма 7. Пусть Δ — октаэдр, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Тогда

$$x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 4t + 5.$$

Доказательство. В силу выбора Δ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= 10t - 1, \\ \sum_i i x_i &= 6 \cdot 4t, \\ \sum_i \binom{i}{2} x_i &= 12(t+1) + 3(2t-2). \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое равенство.

Лемма 8. Если L является 4-кликкой, $K_i = K_i(L)$, то либо L лежит в 5-кликке, либо K_0 является плохой тройкой и

$$\bigcup_{y \in K_0} y^\perp = K_0 \cup K_2.$$

Доказательство. Пусть 4-кликка L не лежит в 5-кликке из Γ , $x_i = |K_i|$. В силу леммы 2 $x_0 = 3$, $x_3 = x_4 = 0$. Теперь

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10t - 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 4(4t + 1), \end{aligned}$$

поэтому $x_2 = 6t + 6$, $x_1 = 4t - 8$. Для $a \in K_0$, $w \in L$ подграф $[a] \cap [w]$ состоит из $2t + 2$ вершин и $k = 4(t + 1)$, поэтому $[a]$ содержится в K_2 .

Для $\Delta = K_0(L)$ верно включение $K_1 \subset K_0(\Delta)$. Применив к Δ лемму 1, получим, что $K_0(\Delta) = L \cup K_1$ и $K_3(\Delta)$ пусто.

Пусть $K_0 = \{a, b, c\}$. Тогда $[c]$ не пересекает $[a] \cap [b]$, и K_0 — плохая тройка.

Лемма 9. Если a, b, c — плохая тройка и de — ребро из $[a] \cap [b]$, то $[d] \cap [e]$ либо не пересекает $[a] \cap [c]$, либо содержит ребро из $[a] \cap [c]$.

Доказательство. Пусть $[d] \cap [e]$ содержит единственную вершину g из $[a] \cap [c]$. Положим $L = \{d, e, a, g\}$, $K_i = K_i(L)$. Тогда L не лежит в 5-кликке и по лемме 8 K_0 является плохой тройкой. Так как $b \in K_2$, то $b \in [y] \cap [z]$ для некоторых $y, z \in K_0$. Далее, $[b] - [a] \subset [c]$, следовательно, $y, z \in [b] \cap [c]$, что противоречит включению $c \in K_1$.

Лемма 10. Пусть ac — ребро, de — ребро из $[a] \cap [c]$. Тогда сумма валентностей вершин d, e в графе $[a] \cap [c]$ не больше 5, и в случае равенства $[d] \cap [e]$ содержит $t + 1$ вершину из $[a]' \cap [c]'$, $[d] \cup [e]$ содержит $[a]' \cap [c]'$.

Доказательство. Пусть

$$|[a] \cap [c] \cap [d]| = i, \quad |[a] \cap [c] \cap [e]| = j.$$

В силу леммы 3 $[d] \cap [e]$ содержит по крайней мере $t - 4 + i + j$ вершин из $[a]' \cap [c]'$. Но $[d] \cap [e]$ содержит a, c , поэтому $i + j \leq 5$ и в случае равенства $[d] \cap [e]$ содержит $t + 1$ вершину из $[a]' \cap [c]'$, причем $[a]' \cap [c]'$ лежит в $[d] \cup [e]$.

3. Отсутствие треугольников в μ -подграфах

Пусть до конца статьи Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2).$$

Зафиксируем ребро ac , обозначим через Λ подграф $[a]' \cap [c]'$, а через Ω подграф $([a] - [c]) \cup ([c] - [a])$. Тогда $|\Lambda| = 3t$, $|\Omega| = 6t$.

Лемма 11. *Если $[a] \cap [c]$ содержит 4-цикл $defg$, то сумма валентностей вершин e, g в λ -подграфе $[a] \cap [c]$ не больше 5.*

Доказательство. В силу леммы 3 валентность каждой вершины из $\{d, e, f, g\}$ в λ -подграфе $[a] \cap [c]$ равна 2 или 3. Допустим, что вершины g, e имеют валентность 3 в указанном подграфе. В силу леммы 10 $\Lambda \subset [x] \cup [y]$ для любых $x \in \{e, g\}$, $y \in \{d, f\}$, причем $[x] \cap [y]$ содержит $t + 1$ вершин из Λ . Далее, $[e] \cap [g]$ содержит не менее $t + 2$ вершин из Λ . Аналогично, $[d] \cap [f]$ содержит не менее t вершин из Λ .

Пусть $[e] \cap [g]$ содержит α вершин из Λ и $2t - 3 - \alpha$ вершин из Ω . Тогда $\Omega - ([e] \cup [g])$ содержит $4t - 5 - \alpha$ вершин, следовательно, $[d] \cap [f]$ содержит не менее $5 + \alpha$ вершин из Ω . Получили противоречие с тем, что $[d] \cap [f]$ содержит не менее t вершин из Λ и $|\alpha| \geq t + 2$.

Лемма 12. *Если $[a] \cap [c]$ содержит 4-цикл $defg$, то валентность любой вершины из $\{d, e, f, g\}$ в λ -подграфе $[a] \cap [c]$ равна 2.*

Доказательство. Допустим, что $[e]$ содержит три вершины из $[a] \cap [c]$. Как и выше, $[d] \cap [e]$ и $[f] \cap [e]$ содержат по $t + 1$ вершин из Λ и Λ содержится в $([d] \cup [e]) \cap ([f] \cup [e])$. По лемме 2 валентность вершины g в графе $[a] \cap [c]$ равна 2. Поэтому $[a] \cap [c] \cap [g] = \{d, f\}$, и $[e] \cap [g]$ содержит по крайней мере $t + 1$ вершин из Λ .

Теперь $[e] \cap [g]$ содержит не более $t - 3$ вершин из Ω , $[e]$ содержит $2t - 2$ вершин из Ω , $[g]$ содержит $2t$ вершин из Ω и по крайней мере $3t + 1$ вершин из Ω лежат в $[g] \cup [e]$. Положим

$$\Omega_0 = \Omega - ([g] \cup [e])$$

и заметим, что каждая из окрестностей $[d]$, $[f]$ содержит не более одной вершины из $\Omega \cap [g]$. Значит, $[d]$, $[f]$ содержат не менее, чем по $2t - 1$ вершин из Ω_0 и $|\Omega_0 \cap [d] \cap [f]| \geq t - 1$. Получили противоречие с тем, что $[d] \cap [f]$ содержит $\{a, c, g, e\}$ и не менее t вершин из Λ .

Лемма 13. *Для любого ребра ac подграф $[a] \cap [c]$ не содержит 4-угольников.*

Доказательство. Пусть $defg$ — четырехугольник из $[a] \cap [c]$. В силу леммы 2 любая вершина из $\{d, e, f, g\}$ имеет валентность 2 в $[a] \cap [c]$. По лемме 3 $[e] \cap [g]$ содержит не менее t вершин из Λ . Положим

$$\Omega_0 = \Omega - ([e] \cup [g])$$

и заметим, что $[e]$, $[g]$ содержат по $2t$ вершин из Λ , поэтому $|\Omega_0| \leq 3t - 2$. Далее, $[d]$ и $[f]$ пересекают $\Omega - \Omega_0$ не более, чем по двум вершинам, и $[f]$, $[d]$ содержат по крайней мере по $2t - 2$ вершин из Ω_0 .

С другой стороны, $[d] \cap [f]$ содержит a, c, g, e и не менее t вершин из Λ . Отсюда, $[d] \cap [f]$ содержит точно $t - 2$ вершин из Ω , t вершин из Λ , и симметрично, $|[e] \cap [g] \cap \Lambda| = t$. Таким образом, $|[x] \cap [y] \cap \Omega| = 1$ для любых $x \in \{e, g\}$, $y \in \{d, f\}$. В частности, $\Lambda - [e]$ и $\Lambda - [g]$ лежат в $[d] \cap [f]$, получили противоречие.

Лемма 14. Если вершины a, b не смежны, то $[a] \cap [b]$ не содержит полных подграфов на 4 вершинах с одним удаленным ребром.

Доказательство. Допустим, что $[a] \cap [b]$ содержит подграф Σ , являющийся полным графом на четырех вершинах с одним удаленным ребром. Пусть c, d имеют валентность 3 в Σ . Тогда cd — ребро и $[c] \cap [d]$ содержит 4-угольник $\{a, b\} \cup (\Sigma - \{c, d\})$, что противоречит лемме 13. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству предложения 1. Пусть вершины a, b не смежны и $[a] \cap [b]$ содержит треугольник $\Delta = \{c, d, e\}$. Обозначим валентности вершин c, d, e в графе $[a] \cap [b]$ через α, β, γ соответственно. Положим

$$\Delta' = \{a, b\} \cup \Delta, \quad x'_i = x_i(\Delta').$$

Допустим, что $K_4(\Delta')$ содержит вершину f . Если $[f]$ содержит клику $\{a, c, d, e\}$, то получается противоречие с тем, что вершина b смежна с тремя вершинами 5-клики $\{a, c, d, e, f\}$. Если же $[f]$ содержит a, c, d, b , то $\{c, d, e, f\}$ — полный подграф с одним удаленным ребром из $[a] \cap [b]$, что противоречит лемме 14. Значит, $x'_i = 0$ для $i \geq 4$.

Применив лемму 1 к подграфу Δ' , получим равенство $x'_0 + x'_3 = t + 3$. Отсюда, $\alpha + \beta + \gamma \leq t + 3$.

С другой стороны, $K_3(\Delta)$ содержит a, b и по лемме 2 $x_0(\Delta) \leq t$. Далее, $[c] \cup [d] \cup [e]$ содержит точно $3 + (\alpha - 2) + (\beta - 2) + (\gamma - 2)$ вершин из $[a] \cap [b]$ и $K_0(\Delta)$ пересекает $[a] \cap [b]$ по $2t + 5 - (\alpha + \beta + \gamma)$ вершинам. Таким образом, $\alpha + \beta + \gamma \geq t + 5$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 1.

4. Редукция плохих μ -подграфов

Пусть в этом и следующем параграфах Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2),$$

содержащий плохую тройку $\{a, b, c\}$. Положим

$$\Lambda = [a]' \cap [b]' \cap [c]'$$

и напомним, что по лемме 5 Λ — регулярный граф валентности $t + 1$ на $4t - 4$ вершинах.

Если $t = 1$, то каждая 3-кликка из Γ является плохой тройкой и Γ — треугольный граф $T(6)$. Пусть $t = 2$. Тогда Γ и граф, дополнительный к Γ , имеют параметры $(25, 12, 5, 6)$, а Λ является 4-кликкой. В дополнительном графе $\bar{\Gamma}$ μ -подграф любых двух вершин из $\bar{\Lambda}$ содержит треугольник $\{a, b, c\}$, что противоречит предложению 1. Таким образом, мы можем считать, что $t \geq 3$.

В этом параграфе мы докажем, что плохой μ -подграф (μ -подграф для пары вершин из $\{a, b, c\}$) состоит из изолированных 4-угольников.

Лемма 15. Если de — ребро из $[a] \cap [b]$ и $[d] \cap [e]$ пересекает оба подграфа $[a] \cap [c]$, $[b] \cap [c]$, то de лежит в 4-угольнике из $[a] \cap [b]$.

Доказательство. Пусть $[d] \cap [e]$ содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$ и ребро yz из $[b] \cap [c]$. Тогда Λ содержит $t - 3$ вершины из $[d] \cap [e]$ и по $t + 1$ вершин из $[d] - [e]$, $[e] - [d]$.

Так как каждая вершина из $\Gamma - L$ смежна с двумя вершинами из $L = \{a, d, e, u, w\}$, то $[u] \cap [w] \cap \Lambda = \Lambda - ([d] \cup [e])$. Отсюда, $[u] \cap [w]$ также пересекает $[a] \cap [b]$ и $[b] \cap [c]$. Пусть $[u] \cap [w]$ содержит ребро u^*w^* из $[b] \cap [c]$, $L^* = \{c, u, w, u^*, w^*\}$.

Симметрично, $[y] \cap [z]$ пересекает $[a] \cap [c]$, причем

$$[y] \cap [z] \cap \Lambda = \Lambda - ([d] \cup [e]).$$

Далее, $[y]$ и $[z]$ содержат по две вершины из L^* , причем

$$[y] \cap L = [z] \cap L = \{d, e\}.$$

Отсюда, каждая из вершин y, z смежна с единственной вершиной из $\{u^*, w^*\}$ и $\{y, z, u^*, w^*\}$ — четырехугольник.

Аналогично, $[a] \cap [b]$ содержит 4-угольник $\{d, e, f, g\}$, где fg является ребром из $[u^*] \cap [w^*] \cap [a] \cap [b]$.

Лемма 16. Если de — ребро из $[a] \cap [b]$, не лежащее в 4-угольнике из $[a] \cap [b]$, то $[d] \cap [e]$ пересекает точно один из подграфов $[a] \cap [c]$, $[b] \cap [c]$.

Доказательство. Если $[d] \cap [e]$ не пересекает $[a] \cap [c]$ и $[b] \cap [c]$, то Λ содержит $t + 1$ вершин из $[d] \cap [e]$ и по $t - 3$ вершин из $[d] - [e]$, $[e] - [d]$.

Пусть $gdef$ — путь в $[a] \cap [b]$. По лемме 15 $[f] \cap [e]$ содержит не более двух вершин из $[c]$, поэтому $[f] \cap [d]$ содержит a, b, e и не менее $2t$ вершин из $[c]$, получаем противоречие.

Лемма 17. Пусть $[a] \cap [b]$ содержит 3-путь $gdef$ и вершины f, g не смежны. Тогда выполняются следующие утверждения.

- (1) Если подграф $[g] \cap [d]$ пересекает $[a] \cap [c]$, то $[f] \cap [e]$ пересекает $[a] \cap [c]$, а $[d] \cap [e]$ пересекает $[b] \cap [c]$.
- (2) Подграф $[a] \cap [b]$ не содержит 5-угольников.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $[d] \cap [g]$ содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$. Тогда для 5-клики $L = \{a, d, g, u, w\}$ вершина e смежна с a, d из L , а вершина f смежна с a и единственной вершиной из $\{u, w\}$. Отсюда, $[f] \cap [e]$ содержит ребро pq из $[a] \cap [c]$.

Допустим, что $[d] \cap [e]$ содержит ребро yz из $[a] \cap [c]$ и положим

$$\Delta = ([a] \cap [c]) - \{u, w, p, q, y, z\}.$$

В силу леммы 15 оба подграфа $[d] \cap [g]$ и $[d] \cap [e]$ не пересекают $[b] \cap [c]$, а $[g]$, $[e]$ совпадают на $[b] \cap [c]$. Симметрично, $[d]$, $[f]$ совпадают на $[b] \cap [c]$. Теперь подграф $[f] \cap [d]$ содержит $a, b, e, t + 1$ вершин из $[b] \cap [c]$, $t - 2$ вершин из $[a] \cap [c]$ и вершину из $\{u, w\}$. Получаем противоречие.

Докажем второе утверждение. Пусть $[a] \cap [b]$ содержит 5-цикл $gdefh$ и для определенности $[d] \cap [e]$ пересекает $[a] \cap [c]$. В силу первой части первого утверждения подграфы $[f] \cap [h]$, $[g] \cap [d]$ и $[e] \cap [f]$ также пересекают $[a] \cap [c]$, а в силу второй части $[d] \cap [e]$ пересекает $[b] \cap [c]$. Получаем противоречие с леммой 15.

Лемма 18. Каждое ребро из $[a] \cap [b]$ содержится в 4-угольнике из $[a] \cap [b]$.

Доказательство. Ввиду леммы 17 можно предположить, что $[a] \cap [b]$ содержит 5-путь $gdefh$. Без ограничения общности будем считать, что $[g] \cap [d]$ содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$, $[d] \cap [e]$ содержит ребро yz из $[b] \cap [c]$. Тогда $[e] \cap [f]$ содержит ребро pq из $[a] \cap [c]$.

Ввиду леммы 17 подграфы $[d]$ и $[e]$, $[f]$ и $[h]$ расщепляют $[a] \cap [c]$. Далее, каждая из вершин f, h смежна с единственной вершиной из $\{u, w\}$, аналогично g смежна с единственной вершиной из $\{p, q\}$. Теперь $[d] \cap [f]$ содержит a, b, e , $2t - 2$ вершин из $[c]$ и одну вершину из Λ . Подграф $[f] \cap \Lambda$ содержит либо вершину из $[e] \cap [d]$ и $t - 1$ вершин из $[e]' \cap [d]'$, либо вершину из $[d] - [e]$ и $t - 2$ вершин из $[e]' \cap [d]'$.

Значит, $[g] \cap [f]$ содержит a, b , по 2 вершины из $[a] \cap [c]$, $[b] \cap [c]$ и не более t вершин из Λ . Итак, $t + 6 \geq 2t + 2$ и $t = 3$.

Теперь $[a] \cap [b]$ содержит 8-цикл $d_1e_1 \dots d_4e_4$, причем $[d_i] \cap [e_i]$ содержит ребро u_iw_i из $[a] \cap [c]$. Заметим, что

$$\Sigma = ([a] \cap [c]) - \{u_1, w_1, u_2, w_2\}$$

содержит четыре вершины, $[e_i], [d_{i+1}]$ расщепляют $[a] \cap [c]$. Без ограничения общности будем считать, что $[d_1]$ содержит вершину u_2 и вершину из $[d_2] \cap \Sigma$, $[e_2]$ содержит w_1 и вершину из $[e_1] \cap \Sigma$.

Напомним, что вершины u_i, w_i не смежны с оставшимися вершинами подграфов $[a] \cap [c] \cap [d_i]$ и подграфов $[a] \cap [c] \cap [e_i]$. Отсюда, w_2 смежна с u_1 и w_1 смежна с вершиной из $\Sigma \cap ([e_2] - [e_1])$. Значит, $u_1 \notin \{u_3, w_3\}$, поэтому

$$\{u_3, w_3\} = \Sigma \cap ([d_1] \cup ([e_1] - [e_2])).$$

Таким образом, $[d_3]$ содержит u_1 и три вершины из $\Sigma - [e_2]$, $[e_3]$ содержит w_1, u_3, w_3 и не смежную с u_3, w_3 вершину из $\{u_2, w_2\}$.

Наконец, $\{u_4, w_4\}$ не пересекает $[d_1] \cup [e_3]$ и пересекает $[d_1], [e_1], [e_2], [d_3]$ по одной вершине. Отсюда, $\{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}$ расщепляют Σ , $w_2 \in [e_3]$, $[d_4]$ содержит u_1, u_2 . Итак, $[a] \cap [c]$ содержит 8-цикл $w_1u_1 \dots w_4u_4$, причем вершина d_i смежна с u_{i+1}, u_{i+2} , e_i смежна с w_{i+2}, w_{i+3} (все индексы рассматриваются по модулю 4).

Симметрично, $[b] \cap [c]$ содержит 8-цикл $y_1z_1 \dots y_4z_4$, причем $[e_i] \cap [d_{i+1}]$ содержит ребро z_iy_{i+1} , $[e_i]$ содержит y_{i+2}, y_{i+3} , $[d_i]$ содержит z_{i+1}, z_{i+2} (все индексы рассматриваются по модулю 4).

Теперь $[y_1] \cap [z_1]$ содержит некоторое ребро u_iw_{i+1} , причем каждая из вершин e_2, d_3, e_3, d_4 смежна с единственной вершиной из этого ребра. Этому условию удовлетворяют только ребра u_1w_2, u_4w_1 . Но в первом случае e_1 смежна с тремя вершинами из 5-клики c, y_1, z_1, u_1, w_2 , а во втором d_1 смежна с единственной вершиной w_1 из 5-клики c, y_1, z_1, u_4, w_1 . В любом случае имеем противоречие.

5. Окончание доказательства теоремы

В этом параграфе мы завершим доказательство теоремы.

Лемма 19. Пусть de — ребро из $[a] \cap [b]$. Тогда

- (1) если $t > 3$, то подграф $[d] \cap [e] \cap \Lambda$ является кликой;

- (2) если $[d] \cap [e]$ содержит ребро pq из $[a] \cap [c]$, то $[a] \cap [c]$ содержит 4-цикл $pqrs$, $[r] \cap [s]$ содержит ребро fg из $[a] \cap [b]$, причем $\{d, e, f, g\}$ является 4-угольником.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть uw — ребро из $[d] \cap [e] \cap \Lambda$. Тогда 4-клика $L = \{d, e, u, w\}$ не содержится в 5-клике и по лемме 8 $K_0(L)$ является плохой тройкой. Заметим, что $[u], [w]$ содержат по $t + 1$ вершин из $[a] \cap [b]$, поэтому $K_0(L) = \{c, y, z\}$ для некоторых вершин y, z , лежащих в 4-угольнике из $[a] \cap [b]$. Положим

$$\Lambda' = [c]' \cap [y]' \cap [z]'$$

Тогда Λ' содержит $2t - 2$ вершин из $[a] \cap [b]$ и столько же вершин из Λ . Таким образом, подграфы $[y], [z]$ совпадают на Λ и $[y] \cap [z]$ содержит a, b и две вершины y^*, z^* из $[a] \cap [b]$. Аналогично, согласно второму утверждению леммы 6 подграфы $[y^*], [z^*]$ совпадают на Λ и $[p] \cap [q]$ не пересекает Λ для любого ребра pq четырехугольника $\{y, z, y^*, z^*\}$. С другой стороны, $[p] \cap [q]$ содержит не менее $t - 3$ вершин из Λ , потому $t = 3$. Получаем противоречие.

Докажем второе утверждение. По лемме 18 $[a] \cap [c]$ содержит 4-цикл $pqrs$, $[a] \cap [b]$ содержит 4-цикл $defg$, причем каждая из вершин r, s не смежна с d, e . По лемме 6 $[r] \cap [s]$ содержит ребро fg . Лемма доказана.

Зафиксируем 4-цикл $defg$ из $[a] \cap [b]$. Если ребро из $\{d, e, f, g\}$ образует 4-клику с ребром 4-угольника Δ из $[a] \cap [c]$ или из $[b] \cap [c]$, то мы скажем, что 4-угольник $\{d, e, f, g\}$ реберно соединен с 4-угольником Δ . В противном случае скажем, что $\{d, e, f, g\}$ кореберно соединен с Δ .

Лемма 20. Подграф $[d] \cap [e]$ пересекает $[c]$.

Доказательство. Если $[d] \cap [e]$ не пересекает $[c]$, то Λ содержит по $t - 3$ вершин из $[d] - [e]$, $[e] - [d]$ и по $t + 1$ вершин из $[d] \cap [e]$ и вне $[e] \cup [d]$. Ввиду леммы 6 $[f] \cap [g]$ содержит $t + 1$ вершин из Λ , поэтому $[f] \cap [g]$ также не пересекает $[c]$. Теперь $[d] \cap [f]$ содержит a, b, e, g и не менее $2t - 2$ вершин из $[c]$. Отсюда, $[d] \cap [f]$ содержит точно по $t - 1$ вершин из $[a] \cap [c]$ и $[b] \cap [c]$ и не пересекает Λ , следовательно, $[d] \cap [g]$ и $[e] \cap [f]$ содержат по $t - 3$ вершин из Λ .

Пусть $[e] \cap [f]$ содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$ и ребро yz из $[b] \cap [c]$. Как и выше,

$$[u] \cap [w] \cap \Lambda = \Lambda - ([e] \cup [f]),$$

поэтому $[u] \cap [w]$ содержит ребро y^*z^* из $[b] \cap [c]$. Ясно, что y^*, z^* не смежны с вершинами e, f из 5-клики $L = \{b, e, f, y, z\}$, поэтому, без ограничения общности, мы получим 4-цикл $yzzy^*$. Далее, по лемме 6 $y^*, z^* \in [d] \cap [g]$. Симметрично, $[g] \cap [d]$ содержит ребро u^*w^* , лежащее в 4-цикле uwu^*w^* из $[a] \cap [c]$ (см. рис. 1). Чтобы не загромождать рисунок, мы не изображали ребра между $\{u, w\}$ и $\{y^*, z^*\}$, а также между $\{u^*, w^*\}$ и $\{y, z\}$.

Таким образом, $[f]$ и $[d]$ совпадают на любом из 4-угольников в $[b] \cap [c]$, отличном от $\{y, z, y^*, z^*\}$.

Пусть $[u] \cap [f]$ содержит α вершин из Λ . Тогда $[u] \cap \Lambda$ содержит $t + 1 - \alpha$ вершин из $[d] \cap [e]$. Значит, $[u] \cap [f]$ содержит три вершины из $a^\perp$ и $t - \alpha$ вершин из $([b] \cap [c]) - \{y, z, y^*, z^*\}$. С другой стороны, $[u] \cap [d]$ содержит a, e, u^*, y^*, z^* , еще $t - \alpha$ вершин из $[b] \cap [c]$, смежных с f , и $2t - 2 - \alpha$ вершин из Λ , поэтому $3t + 3 - 2\alpha = 2t + 2$ и $\alpha = (t + 1)/2$.

Рис. 1.

Таким образом, либо $[u] \cap [u^*]$ не пересекает $[b] \cap [c]$ и $[u] \cap [f]$ пересекает точно половину из $(t-1)/2$ четырехугольников из $[b] \cap [c]$, отличных от $\{y, z, y^*, z^*\}$, либо $[u] \cap [u^*]$ содержит ребро из $[b] \cap [c]$ и $t-3$ делится на 4.

Заметим, что $[d] \cap [e]$ или $[f] \cap [g]$ содержит не менее половины вершин из подграфа $[u] \cap [u^*] \cap \Lambda$. Пусть для определенности это будет $[d] \cap [e]$ и

$$\beta = |[u] \cap [u^*] \cap [d] \cap [e] \cap \Lambda|.$$

Положим

$$\Delta = \{f, e, u, u^*\}, \quad K_i = K_i(\Delta), \quad x_i = |K_i|, \quad x'_3 = |K_3 \cap [b] \cap [c]|.$$

Пусть

$$|[u] \cap [u^*] \cap \Lambda| = t - i, \quad i = -1, 1, 3.$$

Тогда $[d] \cap [e] \cap \Lambda$ содержит по $(t+1)/2 - \beta$ вершин, смежных с единственной вершиной из $\{u, u^*\}$ и β вершин вне $[u] \cup [u^*]$. Далее, $[f] \cap [g] \cap \Lambda$ содержит $t - i - \beta$ вершин из $[u] \cap [u^*]$ и по $i + \beta - (t-1)/2$ вершин, смежных с единственной вершиной из $\{u, u^*\}$. По лемме 6 выполняется равенство

$$3(1 + \beta) + t - i - \beta + (t + 1 - 2\beta) + x'_3 = 2t + 5.$$

Отсюда, либо

$$i = -1, \beta = (t+1)/2, x_0 = (t+1)/2, x_4 = (t+3)/2, x_3 = 0, x_1 = 4t-4, x_2 = 5t+3,$$

либо $i = 1$ и $[u] \cap [u^*]$ содержит ребро из $[b] \cap [c]$, лежащее в K_3 .

Пусть

$$\Delta' = \Delta \cup \{a, h\}, \quad h \in K_4 \cap \Lambda, \quad L_i = K_i(\Delta'), \quad y_i = |L_i|.$$

В случае $i = -1$ подграф L_3 содержит $f, g, w, w^*, t+1$ вершин из $[b] \cap [c]$ и еще по $t-1$ вершин из $[a] \cap [b], [a] \cap [c]$. По лемме 7

$$3t+3+3(\beta-1) = (9t+3)/2 = 4t+5.$$

Отсюда, $t = 7$. Но, как показано выше, если $[u] \cap [u^*]$ не пересекает $[b] \cap [c]$, то $t-1$ делится на 4, получаем противоречие.

Значит, $i = 1, \beta = (t+1)/2$ или $\beta = (t-1)/2$. В первом случае, L_3 не пересекает Λ , поэтому

$$3(t-1)/2 + 6 + 3(t-1) + y_0 = 4t+5.$$

Так как $t-3$ делится на 4, то $t = 7, y_0 = 0, x_0 = 2$. Теперь $[u^*] \cap \Lambda$ содержит 4 вершины из $[u^*] \cap [w^*]$, 6 вершин из $[u] \cap [u^*]$ и 2 вершины из $[u^*] \cap [w]$. Получаем противоречие с тем, что $[z] \cap [u^*]$ не пересекает $[u] \cap [u^*]$, $[u^*] \cap [w]$ и содержит 4 вершины из Λ .

В случае $\beta = (t-1)/2$ получим $x_0 = (t-1)/2$, подграф K_3 содержит 2 вершины из Λ и

$$3(t-3)/2 + 8 + 3(t-1) + y_0 = 4t+5.$$

Так как $t-3$ делится на 4, то $t = 7, y_0 = 1$. Теперь для вершины $r \in L_0$ число 2-путей с началом в r и концом в Δ' равно $6(2t+2) = 96$. Получаем противоречие с тем, что $[r]$ содержит не более двух вершин из K_4 , не более $3t+5$ вершин из L_3 и указанное число 2-путей не больше

$$8 + 3(3t+5) + 2(t-3) = 94.$$

Лемма 21. Любой 4-угольник из $[a] \cap [b]$ содержит ребро, образующее 4-клики с двумя ребрами из $[c]$.

Доказательство. Пусть $[d] \cap [e]$ не пересекает $[b] \cap [c]$ и содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$. Тогда Λ содержит по $t-1$ вершин из $[d] \cap [e], [d] - [e]$ и из $[e] - [d]$. Далее,

$$\Lambda \cap [u] \cap [w] = \Lambda - ([e] \cup [d]),$$

поэтому $[u] \cap [w]$ также не пересекает $[b] \cap [c]$.

Пусть $[a] \cap [c]$ содержит 4-цикл uw^*u^* . По лемме 19 $[u^*] \cap [w^*]$ содержит ребро fg . Предположим, что $[f] \cap [e]$ также содержит $t-1$ вершин из Λ . Тогда подграфы $[f] \cap [g]$ и $[u] \cap [w], [d] \cap [e]$ и $[u^*] \cap [w^*]$ совпадают на Λ .

Пусть $[u] \cap [d]$ содержит α вершин из Λ , три вершины из $a^\perp$ и $t-\alpha$ вершин из $[b] \cap [c]$. Тогда $[u] \cap [f]$ содержит $a, e, u^*, 2t-2-\alpha$ вершин из Λ , и $t-\alpha$ вершин из $[b] \cap [c]$. Отсюда,

$$\alpha = (t-1)/2.$$

Пусть

$$|[u] \cap [u^*] \cap \Lambda| = t - i, \quad i = 1, 3.$$

Заметим, что одно из множеств $[d] \cap [g]$ или $[f] \cap [e]$ содержит не менее половины вершин из $[u] \cap [u^*] \cap \Lambda$. Пусть для определенности это будет $[f] \cap [e]$ и

$$\beta = |[u] \cap [u^*] \cap [f] \cap [e] \cap \Lambda|.$$

Положим

$$\Delta = \{d, e, u, u^*\}, \quad K_i = K_i(\Delta), \quad x_i = |K_i|, \quad x'_3 = |K_i \cap [b] \cap [c]|.$$

Тогда $[f] \cap [e] \cap \Lambda$ содержит по $(t-1)/2 - \beta$ вершин, смежных с единственной вершиной из $\{u, u^*\}$, и β вершин вне $[u] \cup [u^*]$. Далее, $[d] \cap [g] \cap \Lambda$ содержит $t - i - \beta$ вершин из $[u] \cap [u^*]$ и по $i + \beta - (t+1)/2$ вершин, смежных с единственной вершиной из $\{u, u^*\}$. По лемме 6

$$3(1 + \beta) + t - i - \beta + (t - 1 - 2\beta) + x'_3 = 2t + 5,$$

то есть, $i = x'_3 - 3$. Значит, $i = 1$ и подграфы $[f] \cap [e]$, $[u] \cap [u^*]$ содержат по ребру из $[b] \cap [c]$. Поэтому $\beta = x_0 = (t-1)/2$. Подграф $[u] \cap [f]$ содержит в $[b] \cap [c]$ по вершине на вышеуказанных ребрах и по две вершины на любом из оставшихся $(t-3)/2$ четырехугольников. В частности, $t-3$ делится на 4.

Пусть

$$\Delta' = \Delta \cup \{a, h\}, \quad h \in K_4 \cap \Lambda, \quad L_i = K_i(\Delta'), \quad y_i = |L_i|.$$

Тогда L_3 содержит $f, g, w, w^*, t+1$ вершину из $[b] \cap [c]$ и еще по $t-1$ вершин из $[a] \cap [b]$, $[a] \cap [c]$. По лемме 7

$$3t + 3 + 3(t-3)/2 + y_0 = 4t + 5,$$

то есть,

$$t = 13 - 2y_0.$$

Таким образом, $t = 7$, $y_0 = x_0 = 3$. Теперь для вершины $r \in L_0$ число 2-путей с началом в r и концом в Δ' равно

$$6(2t + 2) = 96.$$

Получаем противоречие с тем, что $[r]$ содержит не более $3t + 3$ вершин из L_3 , и указанное число 2-путей не больше

$$3(3t + 3) + 2(t + 1) = 88.$$

Лемма 22. Если $\{u, d, y\}$ — треугольник, где $u \in [a] \cap [b]$, $y \in [b] \cap [c]$, то $\{u, d, y\}$ не является максимальной кликой.

Доказательство. Пусть $\{u, d, y\}$ является максимальной кликой, $[u] \cap [d]$, $[d] \cap [y]$ и $[u] \cap [y]$ содержат α , β и γ вершин из Λ соответственно. Положим $K_i = K_i(\{u, d, y\})$. Тогда $[u] \cup [d] \cup [y]$ содержит $6t - 6 - (\alpha + \beta + \gamma)$ вершин из Λ и

$$|K_0 \cap \Lambda| = \alpha + \beta + \gamma - 2t + 2.$$

Рис. 2.

Далее, $([a] \cup [b]) - \Delta$ содержит $3t + 3 - (\alpha + \beta + \gamma)$ вершин из K_2 . Заметим, что $[u] \cap [d]$ содержит $t + 2 - \alpha - i_{ud}$ вершин из $[b] \cap [c] \cap K_2$, где $i_{ud} = 0$ или 2. Поэтому

$$|K_0 \cap ([a] \cup [b])| = 3t + 6 - (\alpha + \beta + \gamma) - (i_{ud} + i_{dy} + i_{yu}).$$

По лемме 2,

$$t + 8 - (i_{ud} + i_{dy} + i_{yu}) = t + 2.$$

Таким образом, каждое из ребер ud , dy , yu смежно с ребром we , gz , u^*y^* из $[a]$, $[b]$, $[c]$ соответственно (см. рис. 2, на котором не указаны ребра между вершинами из $\{u, w, u^*, w^*\}$ и $\{y, z, z^*, y^*\}$).

Итак, если $\{u, d, y\}$ является максимальной кликой, то 4-угольники

$$\{d, e, f, g\}, \quad \{u, w, u^*, w^*\}, \quad \{y, z, z^*, y^*\}$$

попарно реберно соединены. Далее, в этом случае K_0 содержит треугольник $\{f, z^*, w^*\}$.

Если вершина $x \in K_0$ смежна с δ_i вершинами из K_i . Тогда

$$\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 4t + 4, \quad \delta_1 + 2\delta_2 = 6t + 6.$$

Поэтому $[f]$ и $[w^*]$ содержат по крайней мере по $2t + 4$ вершин из K_2 , поэтому

$$|[f] \cap [w^*] \cap K_2| = t + 2, \quad K_i = K_i(\{f, z^*, w^*\}), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что вершина из $K_2 \cap \Lambda$ смежна с одной из пар $\{u, w^*\}$, $\{d, f\}$, $\{y, z^*\}$, а вершина из $K_0 \cap \Lambda$ смежна с каждой из пар $\{u^*, w\}$, $\{e, g\}$, $\{y^*, z\}$, поэтому

$$y_0 = |K_0 \cap \Lambda| \leq 4, \quad \alpha + \beta + \gamma = 2t - 2 + y_0 \leq 12.$$

Предположим сначала, что $y_0 \neq 0$. Тогда

$$t = 3, \quad |\Lambda| = 8, \quad \alpha + \beta + \gamma = 4 + y_0, \quad y_0 \leq 2.$$

Если $y_0 = 2$, то $|K_2 \cap \Lambda| = 6$, $K_0 \cap \Lambda = \{p, q\}$, где вершины p, q смежны. Получаем противоречие с тем, что в этом случае μ -подграф $[g] \cap [w]$ содержит треугольник $\{p, q, z\}$.

Если $y_0 = 1$, то

$$|K_0 - \Lambda| = 4.$$

Получаем противоречие с тем, что отличный от $\{d, e, f, g\}$ 4-угольник из $[a] \cap [b]$ содержит либо 0, либо 2 вершины из K_0 .

Таким образом, K_0 не пересекает Λ . Поэтому

$$\alpha + \beta + \gamma = 2t - 2 \leq 12,$$

где t равно 3 или 7. Если $t = 3$, то $\alpha + \beta + \gamma = 4$ и $|K_0| = 5$. Если 4-угольник из $([a] \cap [c]) \cup ([b] \cap [c])$ реберно соединен с $\{d, e, f, g\}$, то он содержится в K_1 . Поэтому можно считать, что $[a] \cap [b]$ содержит 4-угольник $\{l, m, m^*, l^*\}$, кореберно соединенный с $\{u, w, u^*, w^*\}$ и $\{y, z, z^*, y^*\}$. Получаем противоречие с леммой 21, примененной к ребрам 4-угольника $\{l, m, m^*, l^*\}$.

Мы доказали, что

$$t = 7, \quad \alpha + \beta + \gamma = 12, \quad |K_0| = 9.$$

Далее, 4-угольник $\{d, e, f, g\}$ соединен точно с двумя 4-угольниками из $[a] \cap [c]$ реберно и кореберно соответственно. Без ограничения общности, $[b] \cap [c]$ содержит такой 4-угольник $\{l, m, m^*, l^*\}$, что $l, m^* \in K_2$. Тогда этот 4-угольник кореберно соединен с $\{u, w, u^*, w^*\}$ и $\{y, z, z^*, y^*\}$. Как показано выше, треугольник $\{u, d, l\}$ не является максимальной кликой. Допустим сначала, что $\Delta = \{u, d, l, p\}$ является максимальной кликой для некоторой вершины $p \in \Lambda$. Положим $L_i = K_i(\Delta)$. Без ограничения общности можно считать, что $[p]$ содержит вершины f, z^* . Тогда $w^* \in L_0$, $z^* \in L_1$, причем вершины w^*, z^* смежны. Получаем противоречие с леммой 8. Значит, треугольник $\{u, d, l\}$ содержится в 5-клике.

Заметим, наконец, что каждый 4-угольник из $[a] \cap [c]$ реберно соединен с одним из 4-угольников $\{d, e, f, g\}$, $\{l, m, m^*, l^*\}$. Поэтому треугольник $\{d, l, x\}$ содержится в 5-клике для любой вершины x из $[a] \cap [c] \cap [d] \cap [l]$ и $|[d] \cap [l]| \geq 13$. Получаем противоречие с тем, что $\lambda = t + 3 = 10$.

Лемма 23. Пусть имеются две 5-клики L и M такие, что $p, q \in L$, $r, s \in M$ и $[p] \cap [q]$ содержит rs . Тогда $\{p, q, r, s\}$ содержится в 5-клике K ,

$$\Sigma = (L - \{p, q\}) \cup M - \{r, s\}$$

— октаэдр и $[x] = K_3(\Sigma)$ для $x \in K - \{p, q, r, s\}$.

Доказательство. Допустим, что $\Delta = \{p, q, r, s\}$ — максимальная клика. Тогда $K_0(\Delta)$ является плохой тройкой. Без ограничения общности,

$$\{a, b, c\} = K_0(\Delta), \quad L = \{u, d, y, p, q\}, \quad M = \{w^*, f, z^*, r, s\}.$$

Заметим, что $[a] \cap [b]$ не может содержать ребро из треугольника $\{u, d, y\}$, иначе вершина c смежна с единственной вершиной из L . Поэтому можно считать, что uw^*u^*, yzz^*y^* являются 4-циклами из $[a] \cap [c]$, $[b] \cap [c]$ соответственно.

Вершина $x \in ([p] \cap [q]) - (\Delta \cup \Sigma)$ не смежна с u, d, y , но смежна с двумя вершинами из $\{w^*, f, z^*\}$. Для определенности пусть $[x]$ содержит f, z^* , поэтому $x \in [a] \cap [c]$ и $[x]$ содержит ребра ef, zz^* . Таким образом, 4-угольник из $[a] \cap [c]$, содержащий x , реберно соединен с обоими 4-угольниками $\{d, e, f, g\}$ и $\{y, z, z^*, y^*\}$. В частности, число вершин в $([p] \cap [q]) - (\Delta \cup \Sigma)$ не больше 6. Значит, $t + 3 \leq 11$, поэтому $t = 3$ или $t = 7$.

В силу лемм 20 и 21, 4-угольник $\{u, w, w^*, u^*\}$ реберно соединен с тремя 4-угольниками из $([a] \cap [b]) \cup ([b] \cap [c])$. Поэтому $t > 3$.

Если $t = 7$, то $|([p] \cap [q]) - (\Delta \cup \Sigma)| = 5$. Без ограничения общности, $[a] \cap [b]$ содержит единственную вершину из $([p] \cap [q]) - (\Delta \cup \Sigma)$. Тогда $[a] \cap [b]$ содержит 4-угольник $\{l, m, m^*, l^*\}$, реберно соединенный с $\{y, z, z^*, y^*\}$ и кореберно с $\{u, w, w^*, u^*\}$. Для определенности пусть $[u] \cap [w^*]$ содержит вершины l, m^* (см. рис. 3). Тогда l смежна с тремя вершинами из Σ и с единственной вершиной из Δ . Получаем противоречие с леммой 8.

Лемма 24. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $[a] \cup [b]$ не содержит плохих троек;
- (2) если $\{p, q, r\}$ — треугольник из Λ , то $[p] \cap [q] \cap [r]$ содержится в Λ ;
- (3) пусть ребро pq из Λ смежно с ребром ud , где $u \in [a] \cap [c]$. Тогда $[b] \cap [c]$ содержит такую вершину y , что $L = \{p, q, u, d, y\}$ является 5-кликкой.

Доказательство. Пусть $[a] \cup [b]$ содержит плохую тройку. Без ограничения общности, $\{w, g, y\}$ — плохая тройка, где uw^*u^*, yzz^*y^* являются 4-циклами из $[a] \cap [c]$, $[b] \cap [c]$ соответственно. Если $[w]$ не содержит ребер 4-угольника $\{d, e, f, g\}$, то одна из вершин f, d смежна со всеми вершинами w, g, y . Получаем противоречие. Значит, $[w]$ и $[y]$ содержат ребра в 4-угольнике $\{d, e, f, g\}$. Если эти ребра совпадают, то мы получим подграф с рис. 1. Тогда вершина d принадлежит $[g] - ([w] \cup [y])$, получаем противоречие.

Мы можем считать, что $[w]$ содержит ребро de , $[y]$ содержит ef (см. рис. 4, ребра между $\{u, u^*, w, w^*\}$ и $\{y, y^*, z, z^*\}$ не указаны). Тогда $[y] \cap [y^*]$ содержит uu^* , $[w] \cap [w^*]$ содержит zz^* . В этом случае $[g] \cap [y]$ содержит 2-путь fu^*y^* , лежащий в 4-цикле fu^*y^*b и по $t - 1$ вершин из $[a] \cap [c]$, Λ .

Теперь мы имеем два изолированных треугольника $\{w, e, z\}$, $\{u^*, g, y^*\}$. По лемме 22 эти треугольники не являются максимальными кликами. Покажем, что каждый из этих треугольников содержится в 5-кликке. Пусть $\Delta = \{w, e, z, p\}$ — максимальная клика, $p \in \Lambda$. Тогда $\{q, r, s\} = K_0(\Delta)$ является плохой тройкой. Заметим, что $[y]$ содержит вершины e, z из Δ , поэтому $p \in [w] \cap [g]$, $[y]$ содержит две вершины из $K_0(\Delta)$, скажем, r, s . Значит, $r, s \in [g] \cap [y]$. Но только одна из вершин в

Рис. 3.

$K_0(\Delta)$ попадает в $[a] \cap [c]$, поэтому $y^* \in K_0(\Delta)$. Теперь $g \in K_1(\Delta) \cap [y^*]$. Получаем противоречие с леммой 8.

Итак, $L = \{w, e, z, p, q\}$ и $M = \{u^*, g, y^*, r, s\}$ являются 5-кликами для подходящих $p, q, r, s \in \Lambda$. Но тогда $p, q \in [r] \cap [s]$ и по лемме 23 $\{p, q, r, s\}$ содержится в 5-клике K . Получаем противоречие с тем, что вершина a должна быть смежна с двумя вершинами из K . Первое утверждение леммы доказано.

Пусть $\{p, q, r\}$ — треугольник из Λ и $[p] \cap [q] \cap [r]$ содержит вершину d . Если $\Delta = \{p, q, r, d\}$ содержится в 5-клике L , то вершина s смежна с двумя вершинами из L , получаем противоречие. Значит, $K_0(\Delta)$ — плохая тройка, содержащая s и две вершины s, h из Λ . При этом $[s] \cap [h]$ содержит по $t + 1$ вершин из $[a] \cap [b]$ и из Λ .

Пусть $[p] \cap [q]$, $[q] \cap [r]$, $[p] \cap [r]$ содержат α, β, γ вершин из Λ соответственно. Тогда $K_1(\{p, q, r\}) \cap \Lambda$ содержит

$$(3t - 3) - 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

вершин. С другой стороны, вершина d смежна с двумя или с одной вершиной из $[a] \cap [b] \cap [s] \cap [h]$, поэтому $[d]$ содержит $t - 1$ или t вершин из $K_1(\{p, q, r\}) \cap \Lambda$. Значит, $\alpha + \beta + \gamma$ равно 2 или 1 и $|K_1(\Delta) \cap \Lambda|$ равно $2t - 6$ или $2t - 5$. С другой стороны,

Рис. 4.

$|K_1(\Delta) \cap \Lambda| = 3t - 10$ и $t = 4$ или $t = 5$. Получаем противоречие. Второе утверждение леммы доказано.

Пусть выполнены условия третьего утверждения леммы. Если $\Delta = \{p, q, u, d\}$ — максимальная клика, то $a \in K_2(\Delta)$, $b, c \in K_1(\Delta)$. По лемме 8 $K_0(\Delta)$ является плохой тройкой, вершины которой не смежны с b, c , но a смежна с двумя вершинами из $K_0(\Delta)$. Получаем противоречие с тем, что $[a] \subset [b] \cup [c]$. Значит, Δ содержится в 5-клике L , причем пятая вершина y из L принадлежит $[b] \cap [c]$.

Лемма 25. Если $u \in [a] \cap [c]$, $y \in [b] \cap [c]$ и $\{u, d, y\}$ — треугольник, то он содержится в 5-клике $\{u, d, y, p, q\}$, $p, q \in \Lambda$.

Доказательство. Допустим, что $p \in \Lambda$ и $\Delta = \{u, d, y, p\}$ является максимальной кликой. Так как $a, b, c \in K_2(\Delta)$, то по лемме 8 $K_0(\Delta)$ — плохая тройка из $[a] \cup [b]$. Получаем противоречие с леммой 24.

Лемма 26. Параметр t равен 3 и если $[d] \cap [e]$ содержит ребро uw из $[a] \cap [c]$, то $[d] \cap [e]$ не пересекает Λ , $[u] \cap [d]$ содержит одну вершину из $[b] \cap [c]$ и две из Λ .

Доказательство. Пусть $L = \{a, u, w, e, d\}$ является 5-кликой. Каждое из ребер uw , de смежно по крайней мере с $t - 3$ вершинами из Λ . Заметим, что каждая вершина из

$$\Lambda - (([u] \cap [w]) \cup ([d] \cap [e]))$$

смежна с единственным ребром между $\{u, w\}$ и $\{d, e\}$, а число таких вершин не больше, чем $2t + 2$. Без ограничения общности, $[u] \cap [d]$ содержит не более $(t + 1)/2$ вершин из Λ . Тогда $[u] \cap [d]$ содержит не менее $(t - 1)/2$ вершин из $[b] \cap [c]$. По лемме 7 $t - 1 \leq (t + 1)/2$ и $t = 3$.

Более того, все вышеупомянутые нестрогие неравенства превращаются в равенства. Это влечет оставшиеся утверждения леммы.

Лемма 27. *Окрестность любой вершины из Γ является (4×4) -решеткой.*

Доказательство. Граф Γ содержит вершины трех типов: вершины a, b, c , вершины из $[a] \cup [b]$ и вершины из Λ . Пусть $x \in \Gamma$, $\Sigma = [x]$.

Рассмотрим сначала случай $x = a$. Ввиду леммы 26 окрестность каждой вершины из Σ состоит из двух изолированных треугольников. Тогда μ -подграфы из Σ являются 2-кокликами. Поэтому Σ является 4×4 -решеткой.

Пусть теперь $x = d \in [a] \cup [b]$. Тогда Σ содержит 4 вершины из Λ и 8 вершин из $[c]$. Если $u \in \Sigma \cap [a] \cap [c]$, то $\Sigma(u)$ содержит треугольник с вершиной a и по лемме 26 треугольник, содержащий две вершины из Λ и одну из $[b] \cap [c]$. Таким образом, Λ содержит 4 ребра, лежащих в 4-кликах из Σ . Если $p \in \Sigma \cap \Lambda$, то $\Sigma(p)$ содержит две вершины из Λ , лежащие в двух разных треугольниках.

Пусть $x = p \in \Lambda$. Как показано выше, если $u \in \Sigma - \Lambda$, то $\Sigma(u)$ содержит две вершины из Λ , лежащие в двух разных треугольниках. Поэтому для каждой из четырех вершин $q \in \Sigma \cap \Lambda$ подграф $\Sigma(q)$ состоит из двух разных треугольников. Лемма доказана.

Теперь по основной теореме из [6] Γ является частным графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$.

6. Доказательство предложения 2

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 2 и не имеет 5-клик. По следствию 1 Γ не содержит 4-клик, и каждый λ -подграф из Γ является $(t + 3)$ -кокликой. Так как в случае $t = 1$ граф Γ является треугольным графом $T(6)$ (и содержит 5-клики), то $t = 2$ или $t = 3$.

Среди 2-путей acb из Γ выберем такой, что вершина c имеет наибольшую валентность α в графе $[a] \cap [b]$. Пусть

$$\Lambda = [a]' \cap [b]', \quad \{d_1, \dots, d_\alpha\} = [a] \cap [b] \cap [c],$$

β_j — валентность вершины d_j в графе $[a] \cap [b]$. По лемме 14 $[c]$ содержит по $t + 3 - \alpha$ вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и $2t - 4 + \alpha$ вершин из Λ . Подграф $[c] \cap [d_j]$ содержит a, b и $t + 1$ вершину из Λ . Положим

$$\gamma_{ij} = |[c] \cap [d_i] \cap [d_j] \cap \Lambda|.$$

Тогда граф Λ содержит по $t + 1 - \gamma_{ij}$ вершин из $([c] \cap [d_i]) - [d_j]$, $([c] \cap [d_j]) - [d_i]$ и $\alpha + \gamma_{ij} - 6$ вершин из $[c] - ([d_i] \cup [d_j])$.

Лемма 28. *Параметр α больше 4.*

Доказательство. Напомним, что между $[a] \cap [c]$ и $[c] - a^\perp$ имеется $(t+3)(t+2)$ ребер, причем $|[c] - a^\perp| = 3t$, поэтому при $t = 2, 3$ справедливо неравенство $\alpha \geq 4$. Далее, по выбору α выполняется неравенство $\gamma_{ij} \leq \alpha - 2$.

Если $\alpha = 4$, то $\gamma_{ij} = 2$ и $[c] \cap \Lambda \subset [d_i] \cup [d_j]$ для любых различных i, j . Пусть сначала $t = 2$. Тогда

$$\mu = 6, \quad |\Lambda| = 5, \quad |[c] \cap \Lambda| = 4.$$

Поэтому валентность β_j вершины d_j в графе $[a] \cap [b]$ не больше 2. Но теперь

$$|\Lambda \cap [d_j]| \leq 2,$$

получаем противоречие с тем, что

$$|[c] \cap [d_j] \cap \Lambda| = t + 1 = 3.$$

Пусть $t = 3$. Тогда

$$\mu = 8, \quad |\Lambda| = 9, \quad |[c] \cap \Lambda| = 6.$$

Далее, $[c] \cap \Lambda$ содержит по три вершины вне $[d_1], [d_2]$. Поэтому

$$|[c] \cap [d_3] \cap [d_4] \cap \Lambda| \geq 6.$$

Получаем противоречие.

Лемма 29. *Параметр α равен 6 и $t = 3$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = 5$. Если $t = 2$, то $[a] \cap [b] \subset c^\perp$, поэтому $\beta_j = 1$ и $|[d_j] \cap \Lambda| = 1$. Значит, $\gamma_{ij} = 1$ и $\{f\} = [d_j] \cap \Lambda$ не зависит от выбора j и содержится в $[c]$. Теперь $[c] \cap [d_j] = \{a, b, f\}$. Получаем противоречие с тем, что $|[c] \cap [d_j]| = t + 3 = 5$.

Пусть $t = 3$. Тогда

$$\mu = 8, \quad |\Lambda| = 9, \quad |[c] \cap \Lambda| = 7.$$

Далее, $\beta_j \leq 3$ и $|[d_j] \cap \Lambda| \leq 5$. С другой стороны, $|[d_j] \cap \Lambda| \geq 4$, поэтому $\beta_j \geq 2$ и некоторая вершина $e \in ([a] \cap [b]) - c^\perp$ имеет в графе $[a] \cap [b]$ валентность, не меньшую 3. В частности, $|[e] \cap \Lambda| \geq 5$, поэтому $[c] \cap [e]$ содержит a, b , три вершины из $\{d_1, \dots, d_5\}$ и три из $\Lambda \cap [c]$. Теперь каждая вершина d_i , смежная с e , смежна с четырьмя вершинами из $[e] \cap \Lambda$. Поэтому $\beta_i = 3$ и валентность в графе $[a] \cap [b]$ некоторой вершины из $([a] \cap [b]) - c^\perp$ не меньше 4. Получаем противоречие.

Итак $\alpha = 6$, поэтому $t = 3$.

Завершим доказательство предложения. Пусть $t = 3$, $\alpha = 6$. Тогда $\beta_j \leq 2$ и $|[d_j] \cap \Lambda| \leq 4$. Но $[c] \cap [d_j]$ содержит $t + 1 = 4$ вершин из Λ , поэтому $\beta_j = 2$ и вершина $e \in ([a] \cap [b]) - c^\perp$ смежна с каждой вершиной d_j . Теперь $[c] \cap [e]$ содержит 8 вершин из $a^\perp \cup b^\perp$ и не менее 6 вершин из Λ . Получаем противоречие.

Список литературы

1. Браувер А.Е., Линт Й.Х., Сильно регулярные графы и частичные геометрии. *Киберн. сборник* (1987) **24**, 186–229.
2. Goethals J.M., Seidel J.J., The regular two graph on 276 points. *Discrete Math.* (1975) **12**, №1, 143–158.
3. Spence E., Is Taylor's graph geometric? *Discrete Math.* (1975) **106–107**, 143–158.
4. Махнев А.А., О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4, t)$. *Матем. сборник* (1996) **187**, №7, 145–150.
5. Wilbrink H.A., Brouwer A.E., $(57, 14, 1)$ strongly regular graph does not exist. *Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A.* (1983) **45**, №1, 117–121.
6. Blokhuis A., Brouwer A.E., Locally 4-by-4 grid graphs. *J. Graph Theory* (1989) **13**, №2, 229–244.

Статья поступила 25.08.1998.