Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Орлова, О сложности реализации конечных языков формулами, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 145–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:54:06

УДК 519.6

О сложности реализации конечных языков формулами

© 2000 г. Е.В. Орлова

Рассматривается реализация конечных языков регулярных выражений в конечных алфавитах формулами, имеющими минимальную сложность. Исследованы некоторые классы языков, для которых получены наилучшие по порядку оценки. Основное внимание уделено реализации языков, состоящих из слов одинаковой длины.

1. Основные определения

Словом в алфавите называется конечная последовательность букв этого алфавита. Языком в алфавите называется множество слов в этом алфавите.

Язык, состоящий из слов одинаковой длины, будем называть однородным. Однородный язык с длиной слова равной n , будем называть n -однородным. Без ограничения общности, под алфавитом будем понимать алфавит $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$.

Языки регулярных выражений [1, 2] строятся следующим образом. Вводятся операции $\cup$, $\times$ и $*$, имеющие следующую интерпретацию.

Пусть M_1 и M_2 — произвольные языки. Через $M_1 \cup M_2$ обозначают объединение языков M_1 и M_2 , а через $M_1 \times M_2$ — множество всех слов, каждое из которых является конкатенацией слова из M_1 и слова из M_2 . Через $*M_1$ обозначается

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_1^i,$$

где

$$M_1^1 = M_1, \quad M_1^2 = M_1 \times M_1, \quad M_1^n = M_1^{n-1} \times M_1, \quad n > 2.$$

Язык регулярных выражений определяется индуктивно следующим образом.

1. Множество, состоящее из буквы алфавита, является языком регулярных выражений.
2. Если M_1 и M_2 — языки регулярных выражений, то $M_1 \cup M_2$, $M_1 \times M_2$ и $*M_1$ также являются языками регулярных выражений.
3. Других языков регулярных выражений нет.

Таким образом, каждый язык регулярных выражений можно задать формулой над базисом $\{\cup, \times, *\}$. Результатом применения операции $*$ является язык регулярных выражений, содержащий слова разной длины, причем существуют слова, длина которых превосходит любое наперед заданное число. Таким образом, при построении языков со словами ограниченной длины операция $*$ неприменима. Отметим, что операция $\cup$ не изменяет длины слов, а операция $\times$ увеличивает длины слов.

Всюду в дальнейшем под формулой будем понимать формулу над базисом $\{\cup, \times\}$. Под сложностью формулы будем понимать число операций $\cup$ и $\times$. Через $L_\Phi(\mathcal{L})$ обозначим минимум сложностей формул, задающих язык $\mathcal{L}$, а через $L_\Phi(M)$ — максимум $L_\Phi(\mathcal{L})$ по всем языкам $\mathcal{L}$ из множества M . Пусть $L_\Phi(k, n) = L_\Phi(M)$, где M — множество языков в алфавите E_k с максимальной длиной слова, равной n , и пусть $L_\Phi^0(k, n) = L_\Phi(M^0)$, где M^0 — множество n -однородных языков в алфавите E_k .

Двухполюсная последовательно-параллельная сеть, все дуги которой ориентированы естественным образом (от входа к выходу), называется π -сетью; π -сеть, дугам которой приписаны буквы алфавита E_k , будем называть (π, k) -схемой (в случае $k = 2$ будем называть ее π -схемой).

Формуле в алфавите E_k поставим в соответствие (π, k) -схему. При этом операции $\cup$ ($\times$) соответствует параллельное (последовательное) соединение подсхем. Формуле α , $\alpha \in E_k$, ставим в соответствие (π, k) -схему, состоящую из инцидентной ее входу и выходу дуги, которой приписан символ α .

Таким образом, формуле соответствует единственная (π, k) -схема.

Пусть формула Φ задает язык $\mathcal{L}$ в алфавите E_k . Скажем, что (π, k) -схема, соответствующая формуле Φ , реализует язык $\mathcal{L}$.

Под сложностью (π, k) -схемы будем понимать число ее дуг. Через $L_\pi(\mathcal{L})$ обозначим минимум сложностей (π, k) -схем, реализующих язык $\mathcal{L}$ в алфавите E_k , а через $L_\pi(M)$ — максимум $L_\pi(\mathcal{L})$ по всем языкам $\mathcal{L}$ из множества M . Пусть $L_\pi(k, n) = L_\pi(M)$, где M — множество языков в алфавите E_k с максимальной длиной слова, равной n , и пусть $L_\pi^0(k, n) = L_\pi(M^0)$, где M^0 — множество n -однородных языков в алфавите E_k . При $k = 2$ индекс k будем опускать.

Известно, что для любого конечного языка $\mathcal{L}$ имеет место равенство

$$L_\pi(\mathcal{L}) = L_\Phi(\mathcal{L}) + 1. \quad (1)$$

Через N_f обозначаем множество наборов, на которых булева функция f равна 1. Таким образом, булевой функции f от n переменных соответствует являющийся n -однородным язык N_f в алфавите E_2 . Ввиду этого, не будем различать булеву функцию f и соответствующий ей (однородный) язык N_f . Следовательно, вопрос о реализации однородных языков в алфавите E_2 регулярными выражениями сводится к задаче реализации булевых функций (однородными) π -схемами. Это дает возможность использовать достаточно хорошо разработанную теорию оптимального синтеза булевых функций.

Пусть D_n — множество всех дизъюнкций $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$, пусть $F_{k,n,r}$ — множество всех n -однородных языков в алфавите E_k мощности r и пусть $D_{k,n} = F_{k,n,k^n-1}$.

В работе получены оценки функционалов $L_\Phi^0(k, n)$, $L_\Phi(k, n)$, $L_\Phi(D_n)$, $L_\Phi(D_{k,n})$ и $L_\Phi(F_{k,n,r})$.

Для простоты изложения приведены доказательства утверждений о сложности реализации языков в алфавите E_2 .

2. Асимптотические оценки функционала $L_\pi^0(n)$

Основными результатами этого параграфа являются доказательство соотношения $L_\pi^0(n) \sim \sigma 2^n$ и получение оценок константы σ .

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$

$$L_\pi^0(n) \sim \sigma 2^n,$$

где σ — некоторая константа.

Доказательство. Пусть $N(l)$ — число неизоморфных π -схем, имеющих l дуг. Из оценки числа π -сетей [7, стр. 173] нетрудно получить оценку $N(l) \leq 2^{5l}$, из которой, применяя обычные мощностные рассуждения, получаем соотношение

$$L_\pi^0(n) \gtrsim \frac{1}{5} 2^n. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что для любого натурального n имеет место соотношение

$$L_\pi^0(n+1) \leq 2L_\pi^0(n) + 2. \quad (3)$$

Представим $L_\pi^0(n)$ в виде $\sigma(n)2^n$. Из (3) получаем, что

$$\sigma(n+1) \leq \sigma(n) + \frac{2}{2^{n+1}} = \sigma(n) + 2 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right),$$

или

$$\sigma(n+1) + \frac{2}{2^{n+1}} \leq \sigma(n) + \frac{2}{2^n}. \quad (4)$$

Пусть

$$\sigma'(n) = \sigma(n) + \frac{2}{2^n}.$$

Из (4) следует, что последовательность $\{\sigma'(n)\}$ монотонно убывает. Последовательность $\{\sigma(n)\}$ ограничена снизу константой $1/5$. Следовательно, последовательность $\{\sigma'(n)\}$ также ограничена снизу и по теореме Вейерштрасса имеет предел. Таким образом, последовательность $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n), \dots$ имеет тот же самый предел, который мы обозначим через σ .

Теорема 1 доказана.

Произвольную булеву функцию от n переменных разложим по $n-2$ первым переменным и реализуем все конъюнкции длины $n-2$ полным дихотомическим деревом. Теперь, используя легко проверяемое равенство $L_\pi^0(2) = 5$, получаем соотношение

$$L_\pi^0(n) \leq \frac{7}{4} 2^n. \quad (5)$$

В предлагаемом ниже методе синтеза π -схем, дающем более точную, чем в (5), оценку константы σ , используется предложенное О.Б. Лупановым разложение булевых функций [5].

Всюду в дальнейшем через $\log n$ будем обозначать $\log_2 n$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$L_{\pi}^0(n) \leq 2^n \left(1 + \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \right).$$

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция от n переменных. Введем параметр r и переменные функции f разобьем на две группы $x_1, x_2, \dots, x_r$ и $y_1, y_2, \dots, y_{n-r}$. Функцию f будем задавать булевой $(2^r \times 2^{n-r})$ -матрицей M^f следующим образом.

Через $\tilde{x}$ ($\tilde{y}$) будем обозначать набор $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ (набор $(y_1, y_2, \dots, y_{n-r})$). Через X_j (Y_j) будем обозначать набор $\tilde{x}$ (набор $\tilde{y}$), являющийся двоичной записью числа j . Нумерацию строк и столбцов матриц будем начинать с нуля. Элементом матрицы M^f , расположенным на пересечении t -й строки и j -го столбца, является значение $f(X_t, Y_j)$.

Введем параметр s и матрицу M^f разобьем на полосы, каждая из которых, кроме, быть может, последней, содержит s строк. Число p полос матрицы M^f равно $\lfloor 2^r / s \rfloor$. Число строк последней полосы матрицы M^f будем обозначать через s' . Через A_i , $1 \leq i \leq p$, будем обозначать i -ю полосу матрицы M^f .

Пусть f_i — функция, совпадающая с f на полосе A_i и равная 0 вне ее. Столбцы матрицы, соответствующей функции f_i , разбиваем на группы одинаковых между собой столбцов. Пусть $\tilde{\tau}$ — произвольный набор длины (точнее высоты) s (или s' , если $i = p$).

Обозначим через $B_{i,\tilde{\tau}}$ группу столбцов матрицы M^f , равных $\tilde{\tau}$ в полосе A_i (для некоторых $(i, \tilde{\tau})$ группа $B_{i,\tilde{\tau}}$ может оказаться пустой). Пусть $f_{i,\tilde{\tau}}$ — функция, совпадающая с f_i на столбцах из $B_{i,\tilde{\tau}}$ и равная 0 в остальных случаях (если $B_{i,\tilde{\tau}}$ — пустая группа, то соответствующая функция $f_{i,\tilde{\tau}}$ тождественно равна 0).

Матрица для функции $f_{i,\tilde{\tau}}$ имеет столбцы 2-х сортов:

- (а) столбцы из $B_{i,\tilde{\tau}}$, равные $\tilde{\tau}$ в полосе A_i и состоящие из нулей вне A_i ;
- (б) остальные столбцы, состоящие сплошь из нулей.

Поэтому функция $f_{i,\tilde{\tau}}$ может быть представлена в виде конъюнкции двух функций, зависящих от $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_k$:

- (1) функции $f_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}(\tilde{x})$, в матрице которой все столбцы равны $\tilde{\tau}$ в полосе A_i и состоят из нулей вне A_i ;
- (2) функции $f_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}(\tilde{y})$, равной 1 на столбцах из $B_{i,\tilde{\tau}}$ и равной 0 в остальных случаях.

Таким образом, функцию f можно представить в виде

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{i=1}^p \bigvee_{\tilde{\tau}} f_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}(\tilde{x}) f_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}(\tilde{y}).$$

Реализующую функцию f π -схему S будем строить в соответствии с этим разложением. Она состоит из не более чем $p2^s$ подсхем $S_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}$, реализующих функции $f_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}(\tilde{y})$ и из не более чем $p2^s$ подсхем $S_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}$, реализующих функции $f_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}(\tilde{x})$.

Подсхемы $S_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}$ строим в соответствии с СДНФ для функций $f_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}(\tilde{y})$.

Нетрудно проверить, что для любого i наборы $\tilde{x}$, соответствующие строкам i -й полосы, имеют не более трех различных начал длины $r - \lfloor \log s \rfloor$. Отсюда и из (5) для любых i и n получаем оценку

$$L_{\pi}(f_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}(\tilde{x})) \leq 3(r - \lfloor \log s \rfloor + 2s).$$

Таким образом, имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{\tilde{\tau}} L(S_{i,\tilde{\tau}}^{(2)}) &\leq \frac{n-r}{s} 2^n \left(1 + \frac{s}{2^r}\right), \\ \sum_{i=1}^p \sum_{\tilde{\tau}} L(S_{i,\tilde{\tau}}^{(1)}) &\leq 2^{s+r} \left(6 + 3\frac{r}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{2^r}\right). \end{aligned}$$

Выбирая $r = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ и $s = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \log n \rfloor$, получаем завершающую доказательство леммы 1 оценку

$$L(S) \leq 2^n \left(1 + \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right).$$

Теперь перейдем к получению более точной нижней оценки константы σ .

Пусть формула Φ задает однородный язык $\mathcal{L}$ в алфавите E_k . Скажем, что (π, k) -схема, соответствующая формуле Φ , является однородной.

Дугу (π, k) -схемы, которой приписан символ $\alpha \in E_k$, назовем α -дугой. Подсхему, состоящую из k параллельно соединенных 0-дуг, 1-дуг, ..., $(k-1)$ -дуг, назовем u -дугой (универсальной дугой).

Вершины и дуги однородной (π, k) -схемы разобьем на ярусы следующим образом. Вход схемы отнесем к нулевому ярусу. Вершинами первого яруса считаем вершины, инцидентные входу. Вершинами i -го яруса, $i \geq 2$, считаем вершины, инцидентные вершинам $(i-1)$ -го яруса и не являющиеся вершинами $(i-2)$ -го яруса. Дуги, соединяющие вершины $(i-1)$ -го и i -го ярусов, отнесем к i -му ярусу.

Отметим, что выход (π, k) -схемы, реализующей n -однородный язык, является вершиной n -го яруса.

Пусть A и B — вершины i -го и j -го яруса соответственно, $j > i$, произвольной однородной (π, k) -схемы S . Последовательность попарно инцидентных дуг $(p_i, p_{i+1}, \dots, p_j)$, где p_s — дуга s -го яруса, p_i инцидентна вершине A и p_j инцидентна вершине B , назовем путем $\overline{AB}$.

Нетрудно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Произвольная (π, k) -схема, реализующая n -однородный язык, обладает следующими свойствами:

- (1) любой путь, соединяющий вход и выход схемы, имеет длину n ;
- (2) все пути между любыми двумя вершинами имеют одинаковую длину;
- (3) из любой вершины существует путь к выходу и из входа существует путь в любую вершину.

Лемма 3. Пусть A и B — различные вершины i -го яруса, и пусть C и D — различные вершины j -го яруса, $j > i$, произвольной однородной π -сети S . Тогда если в сети S существуют пути $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, то не существует пути $\overline{BD}$.

Доказательство. Доказательство проведем рассуждением от противного. Пусть в сети S , удовлетворяющей условиям леммы, существует путь $\overline{BD}$. По свойству 3 однородных (π, k) -схем существуют пути из входа a в вершины A и B и из вершин C и D к выходу b . Пусть E и F — общие точки этих путей из ярусов, имеющих наименьший и наибольший номер. Отметим, что вершина E (F) может совпадать с входом a (с выходом b). Подсеть с полюсами E и F , содержащая пути $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CF}$ и $\overline{DF}$ является H -сетью. Следовательно, сеть S не является π -сетью. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть A и B — различные вершины i -го яруса, и пусть C и D — различные вершины j -го яруса, $j > i$, произвольной однородной π -сети S . Тогда если в сети S существуют не имеющие общих вершин пути $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, то не существует пути $\overline{BC}$.

Пусть S — произвольная однородная π -сеть, не содержащая кратных дуг. Из лемм 3 и 4 следует, что если полустепень исхода (захода) вершины сети S больше 1, то полустепень захода (исхода) смежных с ней вершин следующего (предыдущего) яруса равна 1. Сети S поставим в соответствие код в алфавите $\{b, d, z\}$ следующим образом. Дуги сети будем обходить слева направо в пределах яруса в порядке увеличения номеров ярусов. Кодом сети S является конкатенация кодов ее дуг (или групп ее дуг).

Группу всех дуг, инцидентных вершине с полустепенью исхода (захода) $r > 1$, кодируем набором $b^{r-1}z$ (набором $d^{r-1}z$). Каждую оставшуюся дугу кодируем символом z .

Заметим, что сеть S однозначно восстанавливается по своему коду.

Пусть $N_1(l)$ — множество попарно неизоморфных однородных π -сетей, имеющих l дуг и не содержащих кратных дуг. Из вышеизложенного следует, что $|N_1(l)|$ не превосходит числа наборов длины l в алфавите $\{b, d, z\}$, в которых после символа b (символа d) не может следовать символ d (символ b).

Оценим мощность множества $M(l)$ всех таких наборов. Через $M(l, q, m)$ обозначим множество наборов из $M(l)$, в которых число поднаборов $b^{i-1}z$ или $d^{i-1}z$, $i \geq 2$, равно q , а общее число символов b и d равно $m + q$. Отметим, что $0 \leq m \leq l$, $q \leq (l - m)/2$.

Разобьем $m + q$ символов на q непустых групп, каждая из которых состоит из одинаковых букв, b или d . Символы z вне поднаборов, их $(l - m - 2q)$ штук, разобьем на $q + 1$ групп (группы могут быть и пустыми).

Таким образом,

$$|M(l, q, m)| \leq 2^q \binom{m+q-1}{q-1} \binom{l-m-q}{q}.$$

Нетрудно проверить, что для любых q и m

$$|M(l, q, m)| \leq 2^{l+q-1}$$

и

$$\log |M(l, (1/4)l, (1/4)l)| \sim (5/4)l.$$

Следовательно, для оценки максимального значения $|M(l, q, m)|$ мы будем рассматривать случай $q \geq (1/4)l$. При фиксированном q значение m , при котором $|M(l, q, m)|$ максимально, равно

$$\frac{(q-1)l}{2q-1} - q.$$

Максимум произведения

$$\binom{l/2}{q} \binom{l/2}{q} 2^q$$

достигается при $q \sim l/(2 + \sqrt{2})$.

Таким образом, получаем оценку

$$\log (\max_{q,m} |M(l, q, m)|) \lesssim 1,2715l,$$

из которой следует оценка

$$\log |N_1(l)| \lesssim 1,2715l. \quad (6)$$

Теперь оценим мощность множества $N(l)$ неизоморфных π -схем, имеющих l дуг. Пусть $N(l, r)$ — множество π -схем из $N(l)$, имеющих r , $r \leq l/2$, u -дуг.

Выбираем дуги, входящие в состав u -дуг. Это можно сделать $\binom{l-r}{r}$ способами. Оставшиеся $l - 2r$ дуг занумеруем символами 0 или 1. Отсюда и из (6) получаем оценку

$$|N(l, r)| \leq \binom{l-r}{r} 2^{l-2r} 2^{1,2715(l-r)}.$$

Отсюда, используя свойства функции $\binom{n}{k}$, получаем оценку

$$\log |N(l)| \lesssim 2,4015l. \quad (7)$$

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$L_{\pi}^0(n) \gtrsim 0,4164 \cdot 2^n.$$

Доказательство следует из (7) и обычных мощностных рассуждений.

Из лемм 1 и 5 и (1) получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При $n \rightarrow \infty$*

$$L_{\Phi}^0(n) \sim \sigma 2^n,$$

где σ — константа из интервала $[0,4164, 1]$.

3. Сложность реализации дизъюнкций

Нетрудно проверить, что все функции из D_n имеют одинаковую сложность реализации. Поэтому будем рассматривать реализацию чистой дизъюнкции $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$.

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$L_{\pi}(D_n) \lesssim \frac{3}{2} n \log n.$$

Доказательство. Пусть S — π -схема, являющаяся p -схемой и состоящая из двух компонент S_1 и S_2 . Подсхема S_1 (S_2) является последовательным соединением под-схем S_1^1 и S_1^2 (S_2^1 и S_2^2). Подсхема S_1^1 (S_2^1) реализует чистую дизъюнкцию от $n - \lfloor n/2 \rfloor$ ($\lfloor n/2 \rfloor$) переменных. Подсхема S_1^2 (S_2^2) является последовательным соединением $\lfloor n/2 \rfloor$ ($n - \lfloor n/2 \rfloor$) u -дуг (0-дуг).

Нетрудно проверить, что схема S реализует дизъюнкцию $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ и имеет место оценка

$$L_\pi(D_n) \leq L_\pi(D_{\lfloor n/2 \rfloor}) + L_\pi(D_{n - \lfloor n/2 \rfloor}) + 2 \lfloor n/2 \rfloor + n - \lfloor n/2 \rfloor.$$

Реализуя аналогичным образом схемы S_1^1 и S_2^2 и используя очевидную оценку $L_\pi(D_1) = 1$, получаем утверждение леммы 6.

Для получения нижних оценок функционала $L_\pi(D_n)$ будем использовать следующую легко проверяемую лемму.

Лемма 7. *Функционирование π -схемы, реализующей чистую дизъюнкцию, не изменится, если в ней любые 0-дуги заменить u -дугами.*

Состоящую из 1-дуг и u -дуг π -схему назовем $(\pi, 1, u)$ -схемой. При этом u -дугу считаем одним элементом. Сложностью $(\pi, 1, u)$ -схемы будем называть число ее 1-дуг и u -дуг. Через $L'(d, n)$ обозначим минимальную сложность $(\pi, 1, u)$ -схемы, реализующей чистую дизъюнкцию от n переменных.

Нетрудно проверить, что

$$L_\pi(D_n) \geq L'(d, n). \quad (8)$$

Содержащую путь из u -дуг, соединяющий ее вход и выход, π -схему будем называть u -схемой; $(\pi, 1, u)$ -схему, не являющуюся u -схемой, назовем $\bar{u}$ -схемой; π -схему, состоящую из последовательно соединенных u -дуг, назовем u -цепью.

Нетрудно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 8. *В минимальной $(\pi, 1, u)$ -схеме, реализующей чистую дизъюнкцию, любая являющаяся u -схемой подсхема есть u -цепь, любая являющаяся p -схемой подсхема есть $\bar{u}$ -схема и любая являющаяся s -схемой подсхема содержит не более одной компоненты, являющейся p -схемой.*

Пусть U — множество $(\pi, 1, u)$ -схем. Пусть R_1 (R_2) — множество s -схем из U , первая (последняя) компонента которых является $\bar{u}$ -схемой, а остальные компоненты — u -дуги. Пусть R_3 — множество не являющихся u -схемами s -схем из U , и первая и последняя компонента которых является u -дугой. Пусть $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

Лемма 9. *Минимальная $(\pi, 1, u)$ -схема, реализующая чистую дизъюнкцию от $n \geq 2$ переменных, является p -схемой из двух компонент, одна из которых является последовательным соединением $\bar{u}$ -подсхемы и u -цепи, а другая является последовательным соединением u -цепи и $\bar{u}$ -подсхемы.*

Доказательство. Пусть S — произвольная $(\pi, 1, u)$ -схема, удовлетворяющая условиям леммы. Используя лемму 8, нетрудно проверить, что схема S является p -схемой, компоненты которой принадлежат множеству R .

Нетрудно проверить, что π -схема, в которой имеется вершина с большей единицы полустепенью захода (исхода) такая, что всем входящим в (исходящим из) нее

дугам приписан один и тот же символ, не является минимальной. Таким образом, имеющая две компоненты из множества R_1 (R_2 , R_3) p -схема не минимальна. Имеющая компоненту из множества R_1 (R_2) и компоненту из множества R_3 p -схема, также, не минимальна.

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. В минимальной $(\pi, 1, u)$ -схеме, реализующей чистую дизъюнкцию от $n \geq 2$ переменных, сумма глубин $\bar{u}$ -подсхем ее двух компонент равна n .

Доказательство. Доказательство проведем рассуждением от противного. Пусть S — минимальная $(\pi, 1, u)$ -схема, реализующая чистую дизъюнкцию от $n \geq 2$ переменных, состоящая (согласно лемме 9) из двух компонент S_1 и S_2 . Подсхема S_1 (S_2) является последовательным соединением подсхем S_1^1 и S_1^2 (S_2^1 и S_2^2). Пусть подсхема S_1^1 (S_2^1) является $\bar{u}$ -подсхемой и имеет глубину m_1 (m_2). Подсхема S_1^2 (S_2^2) является последовательным соединением $n - m_1$ ($n - m_2$) u -дуг.

Пусть $m_1 + m_2 < n$. Подсхема S_1^1 (S_2^1) не проводит на наборе 0^{m_1} (0^{m_2}). Схема S не проводит на $2^{n-m_1-m_2}$ наборах ($0^{m_1} \bar{\gamma} 0^{m_2}$), где $\bar{\gamma}$ — произвольный булев набор длины $n - m_1 - m_2$. Получаем противоречие, так как по определению схема S не проводит на единственном наборе 0^n .

Таким образом, $m_1 + m_2 \geq n$.

Пусть теперь $m_1 + m_2 > n$ и пусть в одной из $\bar{u}$ -подсхем, например, в S_1^1 нет u -пути длины $n - m_2$, инцидентного входу схемы S . В этом случае приписывание всем дугам подсхемы S_1^1 из ярусов с $(n - m_2)$ -го по m_1 -й символа u не изменит функционирования схемы S (не появится путь, соответствующий набору 0^n). Следовательно, подсхема S_1^1 не минимальна (в ней всем вершинам, инцидентным выходу, стал приписан символ u).

Пусть, наконец, $m_1 + m_2 = n$ и пусть в подсхеме S_1^1 (S_2^2) есть инцидентный входу (выходу) u -путь W_1 (W_2) длины $n - m_2$ ($n - m_1$).

Через A (D) обозначим конечную (начальную) вершину пути W_1 (W_2), а через B (C) — выход (вход) подсхемы S_1^1 (S_2^2). Нетрудно проверить, что если из подсхемы S_1^1 удалить ее подсхему с входом A и выходом B и перенести последнюю в подсхему S_2^2 , объединив вершины A и C и вершины B и D , то функционирование не изменится. Можно проверить, что новая схема не минимальна. Следовательно, не минимальна и исходная схема.

Лемма 10 доказана полностью.

Лемма 11. Справедливо соотношение

$$L_\pi(D_n) \gtrsim n \log n.$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. В качестве базы индукции возьмем случай $n = 1$, в котором $L_\pi(D_1) = L'(d, 1) = 1 \geq 1 \cdot \log 1$.

Пусть S — минимальная $(\pi, 1, u)$ -схема, реализующая чистую дизъюнкцию от $n \geq 2$ переменных, состоящая (согласно лемме 9) из двух компонент S_1 и S_2 . Подсхема S_1 (S_2) является последовательным соединением подсхем S_1^1 и S_1^2 (S_2^1 и S_2^2). Пусть подсхема S_1^1 является $\bar{u}$ -подсхемой и имеет глубину m , $1 \leq m \leq n - 1$. Тогда согласно лемме 10 являющаяся $\bar{u}$ -подсхемой подсхема S_2^2 имеет глубину $n - m$.

Нетрудно проверить, что подсхема S_1^1 (S_2^2) реализует чистую дизъюнкцию от m ($n - m$) переменных.

Таким образом, получена точная оценка

$$L'(d, n) = n + \min_m (L'(d, m) + L'(d, n - m)). \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что

$$\min_m (m \log m + (n - m) \log(n - m))$$

достигается при $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Отсюда, из (8) и (9) следует справедливость индуктивного перехода.

Лемма 11 доказана.

Из лемм 6 и 11 и (1) получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

$$n \log n \lesssim L_\Phi(D_n) \lesssim \frac{3}{2} n \log n.$$

4. Функции, обращающиеся в единицу на r наборах

Лемма 12. *Для любых n и r , $r \leq 2^n$,*

$$L_\pi(F_{n,r}) \leq (n - \lfloor \log r \rfloor + 1)r + 2^{\lfloor \log r \rfloor} - 2.$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $F_{n,r}$. Обозначим через M_f множество всех начал длины $\lfloor \log r \rfloor$ наборов из N_f . Отметим, что $|M_f| \leq r$. Строим π -схему S , реализующую функцию f , которая содержит $|M_f|$ вершин $\lfloor \log r \rfloor$ -го яруса. Пусть S_1 (S_2 , S_3) — часть схемы S , содержащая дуги ярусов с 1-го по $(\lfloor \log r \rfloor - 1)$ -й ($\lfloor \log r \rfloor$ -го, с $(\lfloor \log r \rfloor + 1)$ -го по n -й). Отметим, что часть S_3 может быть пустой.

Ясно, что $L(S_1) \leq 2 \cdot 2^{\lfloor \log r \rfloor - 1} - 2$, так как подсхема S_1 не более сложна, чем полное дихотомическое дерево глубины $\lfloor \log r \rfloor - 1$.

Нетрудно проверить, что имеют место оценки

$$L(S_2) = |M_f| \leq r, \quad L(S_3) \leq (n - \lfloor \log r \rfloor)r.$$

Лемма доказана.

Через a^m будем обозначать набор длины m , все компоненты которого равны a .

Пусть $G_{n,r,p}$ — множество булевых функций от n переменных, обращающихся в единицу на r произвольных различных наборах вида

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0^{n-2p}, \sigma_1, \dots, \sigma_p),$$

где $r \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ и $\lfloor \log r \rfloor \leq p \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Нетрудно проверить, что произвольная минимальная π -схема S , реализующая функцию из $G_{n,r,p}$, обладает следующими свойствами:

- (1) схема S не содержит u -дуг;
- (2) ее подсхемы S_1 и S_3 , содержащие дуги ярусов с 1-го по p -й и с $(n - p + 1)$ -го по n -й, соответственно, не содержат p -подсхем;

- (3) полустепень захода любой вершины подсхемы S_1 равна 1;
- (4) полустепень исхода любой вершины подсхемы S_3 равна 1;
- (5) полустепени захода и исхода любой вершины подсхемы S_2 , содержащей дуги ярусов с $(p+1)$ -го по $(n-p)$ -й, совпадают и равны 1.

Пусть $g_{n,l,p}$ — произвольная функция из $G_{n,l,p}$, $l \geq 2$ и пусть $g'_{n,l-1,p}$ — функция из $G_{n,l-1,p}$, отличающаяся от $g_{n,l,p}$ на одном произвольном наборе.

Лемма 13. *Справедливо неравенство*

$$L_{\pi}(g_{n,l,p}) \geq L_{\pi}(g'_{n,l-1,p}) + n - p + 1.$$

Доказательство. Пусть S — минимальная π -схема, реализующая функцию $g_{n,l,p}$. Пусть

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, 0^{n-2p}, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

— набор, различающий функции $g_{n,l,p}$ и $g'_{n,l-1,p}$, и пусть A (B) — имеющая степень, большую 2, вершина в подсхеме S_1 (S_3) на соответствующем этому набору пути W , принадлежащая ярусу с наибольшим (наименьшим) номером i ($n-p+j$).

Удаляя из схемы S путь

$$W_1 = (\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p, 0^{n-2p}, \alpha_1, \dots, \alpha_j),$$

являющийся частью пути W , получим схему S' , реализующую функцию $g'_{n,l-1,p}$.

Нетрудно проверить, что

$$L_{\pi}(g'_{n,l-1,p}) \leq L(S') = L_{\pi}(g_{n,l,p}) - (n - p - i + j).$$

Покажем, что $n - p - i + j \geq n - p + 1$, то есть что $j > i$. Существует отличный от пути W_1 путь W_2 из вершины A в вершину B , так как в противном случае существуют отличная от вершины A вершина C i -го яруса и отличная от вершины B вершина D $(n-p+j)$ -го яруса такие, что пути AD и BC не пересекаются, что противоречит лемме 3.

Из минимальности схемы S следует, что начальные (конечные) дуги путей W_1 и W_2 имеют противоположную нумерацию.

Из определения функции $g_{n,l,p}$ следует, что части путей W_1 и W_2 , лежащие в ярусах с номерами с $(n-p+1)$ -го по $(n-p+i)$ -й, одинаковы. Следовательно, $j \geq i+1$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Справедливо неравенство*

$$L_{\pi}(G_{n,r,p}) \geq r(n-p+1).$$

Доказательство получаем последовательным применением леммы 13 к произвольной функции из $G_{n,r,p}$.

Теорема 4. *Для любого $r \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$*

$$L_{\Phi}(F_{n,r}) \sim r(n - \log r).$$

Доказательство. Верхняя оценка следует из леммы 12. Полагая $p = \lfloor \log r \rfloor$ в лемме 14, получаем нижнюю оценку.

Замечание 1. Функции из множества $G_{n,r,p}$ являются примерами индивидуальных функций, имеющих при $r \asymp n$ экспоненциальную сложность реализации.

Теорема 5. При $r = 2^{cn}$, $c \in [1/2, 1)$,

$$L_{\Phi}(F_{n,r}) \asymp r(n - \log r).$$

Доказательство. В условиях теоремы

$$|F_{n,r}| = \binom{2^n}{2^{cn}} \sim \frac{2^{n2^{cn}}}{(2^{cn})!}.$$

Отсюда, $\log |F_{n,r}| \sim (1 - c)n2^{cn}$. Из (7) и обычных мощностных рассуждений получаем нижнюю оценку.

Разлагая функцию f по первым $\lceil cn \rceil$ переменным и реализуя функции от оставшихся переменных схемами в классе СДНФ, получаем верхнюю оценку.

Теорема 5 доказана.

Через $B_{\Phi}(M)$ обозначим минимум $L_{\Phi}(\mathcal{L})$ по всем языкам $\mathcal{L}$ из множества M . Нетрудно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Для любого r

$$B_{\Phi}(F_{n,r}) \lesssim n - \log r + \log r \log \log r.$$

5. Основные результаты для произвольных конечных языков

Вначале рассмотрим случай произвольных конечных булевых языков. Нетрудно проверить, что

$$L_{\pi}(n) \leq \sum_{i=1}^n L_{\pi}^0(i). \quad (10)$$

Отсюда и из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. При $n \rightarrow \infty$

$$L_{\Phi}(2, n) \sim \sigma_1 2^n,$$

где σ_1 — константа из интервала $[0, 4164, 2]$.

Теперь обобщим полученные выше результаты на случай конечных языков регулярных выражений в алфавите E_k , $k \geq 3$.

Из оценки числа π -сетей [7] и аналогов теоремы 2 и соотношения (10) для случая произвольных k получаем следующие утверждения.

Теорема 8. Для любого $k \geq 3$ при $n \rightarrow \infty$

$$L_{\Phi}^0(k, n) \sim \sigma_2 k^n,$$

где σ_2 — зависящая от k константа такая, что

$$\frac{1}{4 + \log k} \leq \sigma_2 \leq \frac{1}{\log k}.$$

Теорема 9. Для любого $k \geq 3$ при $n \rightarrow \infty$

$$L_{\Phi}(k, n) \sim \sigma_3 k^n,$$

где σ_3 — зависящая от k константа такая, что

$$\frac{1}{4 + \log k} \leq \sigma_3 \leq \frac{1}{\log k} \frac{k}{k-1}.$$

Отметим, что нижнюю оценку теоремы 8 можно улучшить, применяя рассуждения, аналогичные приведенным в параграфе 2.

Аналоги результатов, полученных в параграфах 3 и 4, имеют место и для случая произвольного $k \geq 3$.

В заключение, выражаю глубокую благодарность О.Б. Лупанову за внимание к работе.

Список литературы

1. Глушков В.М., *Синтез цифровых автоматов*. Физматгиз, Москва, 1962.
2. Клини С.К., Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. *Автоматы*. ИЛ, Москва, 1956, 15–67.
3. Лупанов О.Б., О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$. *Проблемы кибернетики* (1961) **6**, 5–14.
4. Лупанов О.Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем. *Проблемы кибернетики* (1963) **10**, 88–96.
5. Орлова Е.В., Реализация булевых функций регулярными выражениями. *Тезисы докладов 11-й международной конференции по проблемам теоретической кибернетики*. РГГУ, Москва, 1996.
6. Орлова Е.В., О сложности регулярных выражений для функций из некоторых классов. *Тезисы докладов 12-й международной конференции по проблемам теоретической кибернетики*. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 1999.
7. Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 17.01.2000.