Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О строении частично упорядоченных множеств булевых степеней, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 63–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:13:50

О строении частично упорядоченных множеств булевых степеней

© 2006 г. С. С. Марченков

На множестве всех бесконечных двоичных последовательностей рассматривается простейший вид алгоритмической сводимости — булева сводимость. Каждое множество Q булевых функций, содержащее селекторную функцию и замкнутое относительно операции суперпозиции специального вида, порождает Q -сводимость и Q -степени — множества Q -эквивалентных последовательностей. Q -степень последовательности α характеризует относительную “информационную сложность” последовательности α , при этом Q является множеством операторов “извлечения” информации из бесконечных последовательностей. В работе изучаются частично упорядоченные множества $\mathcal{L}_Q$ всех Q -степеней для наиболее важных классов Q булевых функций. Исследуется положение в $\mathcal{L}_Q$ периодических и узких Q -степеней, определяется число минимальных элементов и атомов, находятся начальные сегменты, изоморфные заданным конечным решеткам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 03–01–00783.

1. Введение

Одной из форм сравнения “информационной сложности” бесконечных двоичных последовательностей является алгоритмическая сводимость. Обычно выбирают некоторый класс $\mathcal{O}$ эффективных операторов и говорят, что последовательность α $\mathcal{O}$ -сводится к последовательности β , если существует такой оператор $\Phi \in \mathcal{O}$, что $\alpha = \Phi(\beta)$. В качестве класса $\mathcal{O}$ рассматривают довольно разнообразные совокупности операторов: от операторов перечисления [1] до конечно-автоматных операторов [2].

В работе [3] предложен новый (“самый простой”) вид алгоритмической сводимости — булева сводимость. Соответствующие классы операторов представляют собой некоторые множества булевых функций, замкнутые относительно операции суперпозиции специального вида. В [3] приведены самые общие свойства булевой сводимости, и описаны частично упорядоченные множества $\mathcal{L}_Q$ булевых степеней, отвечающие некоторым простым классам Q булевых функций.

В данной работе мы продолжаем изучение булевой сводимости, рассматриваем периодические и узкие степени и определяем их положение в частично упорядоченных множествах $\mathcal{L}_Q$, решаем вопрос о мощностях семейств минимальных элементов и атомов в множествах $\mathcal{L}_Q$ для наиболее важных замкнутых классов Q , описываем некоторые начальные сегменты в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_{P_2}$.

Булеву сводимость можно рассматривать как весьма частный случай конечно-автоматной сводимости. Поэтому результаты, полученные для булевой сводимости, интересно сравнивать прежде всего с аналогичными результатами для конечно-автоматной сводимости (см. [2, 4–7]). Все необходимые сведения по булевым функциями можно найти, например, в книгах [8, 9].

2. Предварительные сведения

Пусть

$$N = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Рассматриваем бесконечные двоичные последовательности α , составленные из нулей и единиц, то есть отображения $\alpha: N \rightarrow \{0, 1\}$. Если $i \in N$, то элемент $\alpha(i)$ последовательности α обозначаем α_i . Таким образом, $\alpha = \alpha_0\alpha_1\dots$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ при $i \in N$. Для любого $i \in N$ через $(\alpha)_i$ обозначаем подпоследовательность $\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\dots$ последовательности α , а через 0 и 1 — последовательности $00\dots$ и $11\dots$. Инверсией последовательности $\alpha = \alpha_0\alpha_1\dots$ называем последовательность $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\dots$, где $\bar{\alpha}_i$ есть булево отрицание элемента α_i .

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, α и β — двоичные последовательности. Говорим, что функция f сводит последовательность α к последовательности β , если существуют такие числа $k, l \in N$, что для любого $i \in N$ выполняется соотношение

$$\alpha_{k+i} = f(\beta_{l+i}, \dots, \beta_{l+i+n-1}).$$

В случае, когда $k = l = 0$, говорим, что функция f стандартно сводит последовательность α к последовательности β .

Пусть Q — множество булевых функций. Говорим, что последовательность α Q -сводится к последовательности β (в этом случае пишем $\alpha \leq_Q \beta$), если множество Q содержит функцию f , которая сводит α к β . Пишем $\alpha <_Q \beta$, если $\alpha \leq_Q \beta$ и неверно, что $\beta \leq_Q \alpha$. Последовательности α, β называем Q -эквивалентными, если $\alpha \leq_Q \beta$ и $\beta \leq_Q \alpha$. Совокупность всех последовательностей, Q -эквивалентных последовательности α , образует Q -степень, порожденную последовательностью α ; эту степень обозначаем через $[\alpha]_Q$.

Пусть $\mathcal{L}_Q$ есть множество всех Q -степеней. Отношение $\leq_Q$ переносим с последовательностей на Q -степени: если a, b — Q -степени, то полагаем $a \leq_Q b$, когда $\alpha \leq_Q \beta$ для некоторых последовательностей $\alpha \in a$ и $\beta \in b$.

Для того чтобы Q -степень $[\alpha]_Q$ содержала последовательность α , а отношение $\leq_Q$ определяло на множестве $\mathcal{L}_Q$ частичный порядок, необходимо, чтобы на множестве всех двоичных последовательностей отношение $\leq_Q$ было рефлексивным и транзитивным. Свойство рефлексивности отношения $\leq_Q$ обеспечивается тем (см. [3]), что в множество Q мы включаем какую-либо селекторную функцию e_j^n , $j \in \{1, \dots, n\}$, где

$$e_j^n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x_j.$$

Свойство транзитивности отношения $\leq_Q$ обеспечивается замкнутостью множества Q относительно операции суперпозиции специального вида — r -суперпозиции (см. [3]). Мы говорим, что функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ получается из функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ с помощью операции r -суперпозиции, если

$$h(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), g(x_2, \dots, x_{m+1}), \dots, g(x_n, \dots, x_{m+n-1})). \quad (1)$$

Множество функций, замкнутое относительно операции r -суперпозиции, называем r -замкнутым. Очевидно, что всякое множество, замкнутое относительно операции суперпозиции, замкнуто также относительно операции r -суперпозиции.

В дальнейшем нам понадобится одно вспомогательное утверждение, относящееся к булевым функциям.

Лемма 1. Пусть булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_m)$ отличны от констант, а функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ получается из функций f , g согласно равенству (1). Тогда функция h также отлична от константы. Более того, если дополнительно хотя бы одна из функций f , g существенно зависит не менее чем от двух переменных, то и функция h существенно зависит не менее чем от двух переменных.

Доказательство. Проведем индукцию по числу существенных переменных функции f . В случае, когда функция f существенно зависит только от одной переменной, утверждение леммы очевидно.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит не менее чем от двух переменных и x_i , x_j — переменные с наименьшими индексами, существенные для функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ соответственно. Представим функцию f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i f_1(x_{i+1}, \dots, x_n) \oplus f_2(x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $f_1 \neq 0$ и $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2. Согласно равенству (1)

$$h(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = g(x_i, \dots, x_{i+m-1}) f_1(g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}), \dots, g(x_n, \dots, x_{m+n-1})) \oplus f_2(g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}), \dots, g(x_n, \dots, x_{m+n-1})).$$

Покажем, что функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ существенно зависит от переменной x_{i+j-1} . В самом деле, по определению j функция $g(x_i, \dots, x_{i+m-1})$ существенно зависит от переменной x_{i+j-1} , а функции $g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}), \dots, g(x_n, \dots, x_{m+n-1})$ нет. Поэтому функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ будет существенно зависеть от переменной x_{i+j-1} в том и только том случае, когда функция

$$f_1(g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}), \dots, g(x_n, \dots, x_{m+n-1})) \quad (2)$$

не равна тождественно нулю. Функция (2) имеет представление вида (1), при этом функция f_1 не равна тождественно нулю, а число ее существенных переменных по крайней мере на единицу меньше, чем у функции f . Если $f_1 = 1$, то функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$, очевидно, существенно зависит от переменной x_{i+j-1} . Если же $f_1 \neq 1$, то функция (2) отлична от константы в силу соображений индукции.

Совершенно аналогично показываем, что функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ существенно зависит от переменной x_{k+l-1} , где x_k , x_l — переменные с наибольшими индексами, существенные для функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$. Лемма доказана.

3. Периодические степени

Согласно предложению 2 из [3] всякая последовательность, сводящаяся к периодической последовательности, сама является периодической последовательностью. Поэтому для любого множества Q булевых функций любую Q -степень, содержащую периодическую последовательность, будем называть периодической Q -степенью.

Следующее утверждение представляет собой уточнение предложения 2 из [3]. Его доказательство мы опускаем.

Утверждение 1. Пусть β — периодическая последовательность с периодом

$$b_1 = \beta_{i+1}\beta_{i+2} \dots \beta_{i+d}$$

и

$$b_2 = \beta_{i+2}\beta_{i+3} \dots \beta_{i+d}\beta_{i+1},$$

...

$$b_d = \beta_{i+d}\beta_{i+1} \dots \beta_{i+d-1}.$$

Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сводит последовательность α к последовательности β , то α — периодическая последовательность, период которой получается из слов $b_1, \dots, b_d$ с помощью покомпонентного применения функции f . Иными словами, если $1, \dots, m_n$ — первые n элементов периодической последовательности $1, 2, \dots, d, 1, 2, \dots, d, \dots$, то период последовательности α представим в виде $f(\beta_{i+1}, \dots, \beta_{i+m_n})f(\beta_{i+2}, \dots, \beta_{i+m_n+1}) \dots f(\beta_{i+d}, \dots, \beta_{i+m_n+d-1})$, где числа $m_n + j$ в индексах элементов β_{i+m_n+j} при $m_n + j > d$ следует приводить по модулю d , заменяя при этом число 0 числом d .

Элемент a называется атомом в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_Q$, если a не является минимальным элементом в $\mathcal{L}_Q$ и для любого элемента b из условия $b \leq_Q a$ следует, что либо $b = a$, либо b есть минимальный элемент в $\mathcal{L}_Q$.

Утверждение 2. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию. Если частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_Q$ содержит наименьший элемент, то в $\mathcal{L}_Q$ имеется счетное число атомов, являющихся периодическими Q -степенями. В противном случае в $\mathcal{L}_Q$ имеется счетное число минимальных элементов, которые являются периодическими Q -степенями.

Доказательство. Для простых чисел p рассмотрим периодические последовательности α^p , у которых $\alpha_i^p = 1$ при $i \in N$ и $\alpha_j^p = 0$ в остальных случаях. Начальный сегмент I_p , определяемый степенью $[\alpha^p]_Q$ в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_Q$, конечен. Если в $\mathcal{L}_Q$ имеется наименьший элемент, то он, очевидно, будет наименьшим элементом и в начальном сегменте I_p . Поэтому всякий атом начального сегмента I_p является атомом в множестве $\mathcal{L}_Q$. Кроме того, наименьшая длина периода периодической последовательности, определяющей такой атом, равна p . Отсюда следует, что для различных простых чисел p, q соответствующие атомы начальных сегментов I_p, I_q различны. Это доказывает первую часть утверждения. Вторая часть утверждения устанавливается аналогичным образом.

В теореме 1 и далее мы пользуемся обозначениями замкнутых классов булевых функций из книги [9]. В частности, $D_1, D_{01}, O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, K_0, K_{01}, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty$ суть обозначения замкнутых классов, которые порождаются соответственно следующими системами функций $\{1, x_1 \vee x_2\}, \{x_1 \vee x_2\}, \{x_1 \vee \bar{x}_2\}, \{x_1 \vee x_2 \bar{x}_3\}, \{1, x_1 \vee x_2 x_3\}, \{x_1 \vee x_2 x_3\}, \{0, x_1 x_2\}, \{x_1 x_2\}, \{x_1 \bar{x}_2\}, \{x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)\}, \{0, x_1(x_2 \vee x_3)\}, \{x_1(x_2 \vee x_3)\}$.

Теорема 1. Пусть Q — замкнутый класс булевых функций, содержащий функцию, которая существенно зависит не менее чем от двух переменных. Тогда, за исключением двенадцати случаев, для любой периодической последовательности α найдется периодическая последовательность β , которая удовлетворяет условию $\alpha <_Q \beta$. Эти исключительные случаи суть: последовательность α содержит конечное число единиц и

$$Q \in \{D_1, D_{01}, O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}, \quad (2)$$

последовательность α содержит конечное число нулей и

$$Q \in \{K_0, K_{01}, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}.$$

Доказательство. Как известно (см., например, [9]), в условиях теоремы замкнутому классу Q принадлежит хотя бы одна из функций $x_1 \vee x_2$, $x_1 x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Предположим сначала, что $(x_1 \vee x_2) \in Q$.

Пусть α — периодическая последовательность с периодом $\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+d-1}$, в который входит хотя бы одна единица, и p — простое число, не делящее d . Рассмотрим периодическую последовательность β с периодом $0^d (\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+d-1})^{p-1}$ (мы используем степенное обозначение 0^d для слова, состоящего из d нулей). Легко видеть, что последовательность α Q -сводится к последовательности β функцией $x_1 \vee x_{d+1} \vee x_{2d+1} \vee \dots \vee x_{(p-1)d+1}$. Вместе с тем последовательность β не может сводиться к последовательности α никакой булевой функцией, так как простое число p не делит d (см. утверждение 1). Таким образом,

$$[\alpha]_Q <_Q [\beta]_Q.$$

Пусть периодическая последовательность α содержит конечное число единиц. Согласно результатам о строении замкнутых классов булевых функций (см. [9]) при $(x_1 \vee x_2) \in Q$ и невыполнении условия (3) в замкнутый класс Q входит хотя бы одна из функций 0 или

$$d_m(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j,$$

где $m \geq 3$. Если $0 \in Q$, то последовательность α Q -сводится (функцией 0) к любой периодической последовательности. Если же в класс Q входит функция d_m , то последовательность α Q -сводится (функцией d_m) к периодической последовательности β с периодом $0^{m-1} 1$. Очевидно, что последовательность β не может Q -сводиться к последовательности α .

Пусть периодическая последовательность α содержит конечное число единиц и $Q = O^\infty$. Покажем, что Q -степень последовательности α максимальна в $\mathcal{L}_Q$. Предположим, что последовательность α Q -сводится к последовательности β функцией f . Понятно, что функция f не может совпадать с константой 1. В остальных случаях (см. [9]) функция f представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \vee g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq i \leq n$ и функция g отлична от константы 1. Из этого представления сразу следует, что последовательность β может содержать лишь конечное число единиц, то есть $\beta \leq_Q \alpha$.

Класс O^∞ целиком содержит классы $D_1, D_{01}, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$. Поэтому проведенные рассуждения будут справедливы и для этих классов.

Переходя к случаю $x_1 x_2 \in Q$, следует заметить, что функция $x_1 x_2$ двойственна функции $x_1 \vee x_2$, классы $K_0, K_{01}, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty$ двойственны классам $D_1, D_{01}, O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$, и воспользоваться принципом двойственности.

Предположим, что в класс Q входит функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Если последовательность α содержит конечное число нулей (единиц), то при любом нечетном $n \geq 3$ последовательность α Q -сводится функцией $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ к периодической последовательности β , которая имеет период $0^{n-1}1$ (01^{n-1}). В противном случае пусть периодическая последовательность α имеет период $\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+d-1}$. Тогда при любом нечетном $n \geq 3$ последовательность α будет Q -сводиться функцией $x_1 \oplus x_{d+1} \oplus x_{2d+1} \oplus \dots \oplus x_{(n-1)d+1}$ к периодической последовательности β , имеющей период $0^{2d}(\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+d-1})^{n-2}$. Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 периодическая Q -степень $[\alpha]_Q$ (за исключением двенадцати случаев) не является максимальной в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_Q$.

4. Узкие степени

Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, которое содержит селекторную функцию. Назовем Q -степень последовательности α узкой, если $[\alpha]_Q$ состоит только из последовательностей вида $\beta_0 \dots \beta_k(\alpha)_l$ и, возможно (при $\bar{x} \in Q$), из инверсий таких последовательностей. Q -степень, которая не является узкой, назовем широкой Q -степенью.

Из приведенных определений следует, что если $R \subseteq Q$ и Q -степень $[\alpha]_Q$ является узкой, то и R -степень $[\alpha]_R$ также является узкой. Аналогично, если R -степень $[\alpha]_R$ является широкой, то широкой будет и Q -степень $[\alpha]_Q$.

Теорема 2. Существует континуальное множество последовательностей α , для которых Q -степень $[\alpha]_Q$ является узкой при любом множестве Q булевых функций.

Доказательство. Согласно определению, если Q -степень последовательности α не является узкой, то в нее входит последовательность γ , которая отлична от последовательностей вида $\beta_0 \dots \beta_k(\alpha)_l$ и их инверсий. Понятно, что функции f и g , сводящие последовательность α к последовательности γ и обратно, существенно зависят каждая не менее чем от двух переменных. Согласно доказанной выше лемме, r -суперпозиция функций f, g , сводящая последовательность α к себе, существенно зависит не менее чем от двух переменных. Из этого следует, что последовательность α будет узкой, если никакая булева функция h , существенно зависящая не менее чем от двух переменных, не сводит последовательность α к себе.

Чтобы обеспечить выполнение этого условия, достаточно для любых чисел $k, l \in N$ и любой функции $h(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей не менее чем от двух переменных, выбрать хотя бы одно число $i \in N$ и определить элементы $\alpha_{k+i}, \alpha_{l+i}, \dots, \alpha_{l+i+n-1}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha_{k+i} \neq h(\alpha_{l+i}, \dots, \alpha_{l+i+n-1}). \quad (3)$$

Зафиксируем какое-либо сюръективное отображение ν множества N на множество всех троек (k, l, h) , где $k, l \in N$ и h — булева функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных. Будем строить последовательность α по шагам, определяя на каждом шаге конечное число элементов последовательности α .

Считаем, что на шаге 0 ни один элемент последовательности α не определен. Пусть на шаге t уже определены элементы $\alpha_0, \dots, \alpha_{j_t}$, а

$$v(t) = (k, l, h(x_1, \dots, x_n)).$$

На шаге $t + 1$ выбираем такое значение i , чтобы выполнялось неравенство

$$\min(k + i, l + i) > j_t.$$

Поскольку функция h существенно зависит не менее чем от двух переменных, можно определить элементы $\alpha_{k+i}, \alpha_{l+i}, \dots, \alpha_{l+i+n-1}$ так, чтобы выполнялось неравенство (4). Полагаем

$$j_{t+1} = \max(k + i, l + i + n - 1).$$

Если

$$s < j_{t+1}, \quad s \notin \{0, 1, \dots, j_t, k + i, l + i, l + i + 1, \dots, l + i + n - 1\},$$

то элемент α_s определяем произвольно. Далее переходим к шагу $t + 2$ построения последовательности α .

Континуальность множества определяемых последовательностей α следует из возможности выбора на каждом шаге $t \neq 0$ бесконечного числа значений i и произвольности задания элементов α_s . Теорема доказана.

Утверждение 3. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию и функцию $x_1 \oplus x_2$. Тогда никакая узкая Q -степень не является максимальной в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_Q$.

Доказательство. Предположим, что последовательность α порождает узкую Q -степень, которая является максимальной в $\mathcal{L}_Q$. В силу теоремы 1 последовательность α не может быть периодической. Определим элементы последовательности γ соотношениями

$$\gamma_i = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_i, \quad i \in N.$$

Функция $x_1 \oplus x_2$ Q -сводит последовательность α к последовательности γ , то есть $\alpha \leq_Q \gamma$. Из максимальной Q -степени $[\alpha]_Q$ в множестве $\mathcal{L}_Q$ следует, что $\gamma \in [\alpha]_Q$. Так как Q -степень $[\alpha]_Q$ узкая, получаем, что для некоторых $k, l \in N$ последовательность γ совпадает с последовательностью $\beta_0 \dots \beta_k(\alpha)_l$ либо с ее инверсией. Это в свою очередь означает, что для некоторого $c \in \{0, 1\}$ и всех $i \in N$ выполняется соотношение

$$\alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k+i+1} = \alpha_{l+i} \oplus c.$$

Из этого соотношения вытекает, что для любого $i \in N$ справедливо равенство

$$\alpha_{k+i+2} = \alpha_{l+i} \oplus \alpha_{l+i+1}. \quad (4)$$

Если

$$l \leq k + 2 \leq l + 1,$$

то приходим к одному из соотношений

$$(\forall i)(\alpha_{l+i} = 0), \quad (\forall i)(\alpha_{l+i+1} = 0),$$

которые показывают, что α — периодическая последовательность.

Если же

$$k + 2 \notin \{l, l + 1\},$$

то, например, при $k + 2 < l$, переписав равенство (5) в виде

$$\alpha_{l+i+1} = \alpha_{l+i} \oplus \alpha_{k+i+2},$$

вновь убеждаемся, что α — периодическая последовательность. Утверждение доказано.

Пусть M_{01} — замкнутый класс всех монотонных булевых функций, которые сохраняют константы 0 и 1 (см. [9]).

Утверждение 4. Если Q — замкнутый класс булевых функций и $M_{01} \subseteq Q$, то существует континуальное множество последовательностей α , для которых Q -степень $[\alpha]_Q$ является широкой.

Доказательство. Как известно (см. [9]), базис класса M_{01} образуют функции $x_1 \vee x_2$ и $x_1 x_2$. Пусть

$$\begin{aligned}\alpha &= 10^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_i} 1 \dots, \\ \beta &= 110^{n_1-1} 110^{n_2-1} 11 \dots 110^{n_i-1} 11 \dots,\end{aligned}$$

где последовательность $n_1, n_2, \dots$ непериодическая и

$$n_i \geq 2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда последовательность α сводится к последовательности β функцией $x_1 x_2$, а последовательность β к последовательности α — функцией $x_1 \vee x_2$. Континуальность множества последовательностей α с указанным свойством обеспечивается выбором значений $n_1, n_2, \dots$. Утверждение доказано.

5. Минимальные элементы, атомы и начальные сегменты

Утверждение 5. Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{M_{01}}$ имеет континуальное множество минимальных элементов.

Доказательство. Положим

$$\alpha = 1^{n_1} 0^{n_1} 1^{n_2} 0^{n_2} \dots 1^{n_i} 0^{n_i} \dots,$$

где

$$1 \leq n_1 < n_2 < \dots$$

Покажем, что M_{01} -степень последовательности α является минимальной в множестве $\mathcal{L}_{M_{01}}$. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из класса M_{01} сводит последовательность β к последовательности α . Представим функцию f в виде дизъюнктивной нормальной формы

$K_1 \vee \dots \vee K_s$, где $K_1, \dots, K_s$ — монотонные конъюнкции, и в виде конъюнктивной нормальной формы $D_1 \& \dots \& D_t$, где $D_1, \dots, D_t$ — монотонные дизъюнкции.

Возьмем достаточно большое число n_i (например, $n_i > n$) и рассмотрим “движение” функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по последовательности α , начиная со слова 1^{n_i} . Предположим, что при попадании в слово 1^{n_i} значение 1 первой принимает конъюнкция K_1 . При дальнейшем движении по слову 1^{n_i} функция f будет принимать значение 1 до тех пор, пока не примет значение 0 одна из дизъюнкций $D_1, \dots, D_t$. Пусть это дизъюнкция D_1 . Затем при движении дизъюнкций $D_1, \dots, D_t$ по слову $0^{n_{i+1}}$ функция f будет принимать значение 0, пока конъюнкция K_1 вновь не примет значение 1 (это произойдет, разумеется, при попадании конъюнкции K_1 в слово $1^{n_{i+1}}$).

Таким образом, расстояние (по последовательности α) между двумя соседними начальными обращениями в 1 конъюнкции K_1 равно $2n_i$. То же самое справедливо для обращений в 0 дизъюнкции D_1 (здесь вместо $2n_i$ следует взять $n_i + n_{i+1}$). Отсюда вытекает, что, пренебрегая конечным числом начальных элементов, последовательность β можно представить в виде

$$\beta = 1^{n_1-d} 0^{n_i+d} 1^{n_{i+1}-d} 0^{n_{i+1}+d} \dots 1^{n_r-d} 0^{n_r+d} \dots,$$

где d — целое число и $|d| \leq n$. Используя это представление последовательности β , нетрудно осуществить сведение последовательности α к последовательности β функцией из класса M_{01} . Именно, если $d > 0$, то следует взять функцию $x_1 \vee \dots \vee x_{d+1}$, а если $d < 0$, то функцию $x_1 \dots x_{d+1}$. Утверждение доказано.

Обозначим через M_0, M_1, M замкнутые классы монотонных функций, которые получаются из класса M_{01} добавлением соответственно констант 0, 1 или обеих констант 0, 1 (см. [9]).

Следствие 2. В каждом из частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}_{M_0}, \mathcal{L}_{M_1}, \mathcal{L}_M$ имеется континуальное множество атомов.

Доказательство. Достаточно заметить, что в множествах $\mathcal{L}_{M_0}, \mathcal{L}_M$ наименьшие элементы порождаются последовательностью 0 , а в множестве $\mathcal{L}_{M_1}$ — последовательностью 1 .

Нетрудно показать, что множество $\mathcal{L}_{M_{01}}$ также имеет континуальное множество атомов. В самом деле, $[0]_{M_{01}}$ является минимальным элементом в $\mathcal{L}_{M_{01}}$ (см. [3]). Над этим элементом в $\mathcal{L}_{M_{01}}$ расположено континуальное множество атомов, которые, например, порождаются последовательностями вида $10^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_i} 1 \dots$, где $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$. Доказательство этого факта аналогично доказательству утверждения 5.

Для любого $k \geq 1$ обозначим через $\mathcal{D}_k$ множество всех отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$. На $\mathcal{D}_k$ определим частичный порядок $\leq$. Если $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{D}_k$, то полагаем $\delta_1 \leq \delta_2$ в том и только том случае, когда для любых двух элементов $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ из выполнения отношения $\delta_2(i, j)$ следует выполнение отношения $\delta_1(i, j)$ (отметим, что наше определение частичного порядка на $\mathcal{D}_k$ отличается от общепринятого). В частности, наименьшим элементом в $\mathcal{D}_k$ служит полное отношение эквивалентности, наибольшим — отношение равенства. Как обычно, введенный частичный порядок на $\mathcal{D}_k$ позволяет рассматривать $\mathcal{D}_k$ как (дистрибутивную) решетку с нулем и единицей.

Пусть δ — отношение из $\mathcal{D}_k$, имеющее m классов эквивалентных элементов (далее, классов эквивалентности). На основе отношения δ определим m отношений эквивалентности, которые получаются из отношения δ выделением ровно одного (нулевого) класса

эквивалентности. Совокупность всех таких отношений эквивалентности на $\{1, 2, \dots, k\}$ с выделенными нулевыми классами эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}_k^0$. Положим

$$\mathcal{D}_k^+ = \mathcal{D}_k \cup \mathcal{D}_k^0.$$

На множестве $\mathcal{D}_k^+$ определим частичный порядок $\leq$, который превратит множество $\mathcal{D}_k^+$ в решетку с нулем и единицей.

Пусть $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{D}_k^+$. Если $\delta_2 \in \mathcal{D}_k$, то полагаем $\delta_1 \leq \delta_2$ в том и только том случае, когда это отношение выполняется в решетке $\mathcal{D}_k$ (нулевой класс эквивалентности у отношения δ_1 , если он имеется, в расчет не принимается). Если же $\delta_2 \in \mathcal{D}_k^0$ и D_2 — нулевой класс отношения эквивалентности δ_2 , то полагаем $\delta_1 \leq \delta_2$ в том и только том случае, когда это отношение выполняется в решетке $\mathcal{D}_k$ и, кроме того, класс эквивалентности D_1 отношения δ_1 , содержащий класс D_2 , является нулевым.

Нетрудно видеть, что решетка $\mathcal{D}_k^+$ имеет наибольший элемент (отношение равенства), наименьший элемент (полное отношение с нулевым классом $\{1, 2, \dots, k\}$), а также $2^k - 1$ атомов.

Пусть P_2 обозначает множество всех булевых функций.

Теорема 3. Для любого $k \geq 1$ в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_{P_2}$ имеется континуальное множество элементов, которые определяют в множестве $\mathcal{L}_{P_2}$ начальные сегменты, изоморфные решетке $\mathcal{D}_k^+$.

Доказательство. Зафиксируем число $k \geq 1$ и последовательность чисел $i_1, i_2, \dots$ из множества $\{1, 2, \dots, k\}$, в которую каждое из чисел $1, 2, \dots, k$ входит бесконечное число раз. Положим

$$\alpha = 01^{i_1}0^21^{i_2} \dots 0^m1^{i_m} \dots$$

Докажем, что начальный сегмент $([0]_{P_2}, [\alpha]_{P_2})$ множества $\mathcal{L}_{P_2}$ изоморфен решетке $\mathcal{D}_k^+$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, сводящая последовательность β к последовательности α . Можно считать, что функция f сохраняет 0, поскольку в противном случае вместо функции f и последовательности β можно взять функцию $\bar{f}$ и инверсию $\bar{\beta}$ последовательности β (отметим, что $\bar{\beta} \in [\beta]_{P_2}$). Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, предположим еще, что функция f стандартно сводит последовательность β к последовательности α .

При $m \geq n$ рассмотрим двоичное слово B_m длины $i_m + n + 1$, которое получается, если функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ последовательно применять к $i_m + n + 1$ наборам, образующим подслова длины n в слове $0^n1^{i_m}0^n$. Очевидно, что слово B_m начинается и оканчивается символом 0. Кроме того, если не учитывать начала последовательности β длины $i_1 + \dots + i_{n-1} + n(n-1)/2$, то последовательность β можно получить из последовательности α заменой каждого слова $0^n1^{i_m}0^n$, $m \geq n$, словом B_m .

Обозначим через C_m максимальное по длине подслово слова B_m , которое начинается и оканчивается символом 1 (если в слово B_m не входит символ 1, то полагаем $C_m = \Lambda$). Пусть $m_1, \dots, m_k$ — какие-либо числа, не меньшие n , которые удовлетворяют равенствам $i_{m_1} = 1, \dots, i_{m_k} = k$. Слова $C_{m_1}, \dots, C_{m_k}$ определяют на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$ отношение эквивалентности δ (возможно, с выделенным нулевым классом эквивалентности): считаем $\delta(p, q)$ истинным в том и только том случае, когда $C_{m_p} = C_{m_q}$. При этом элемент p относим к нулевому классу эквивалентности δ , если $C_{m_p} = \Lambda$.

Итак, каждой последовательности β , которая P_2 -сводится к последовательности α , сопоставлено отношение эквивалентности δ из решетки $\mathcal{D}_k^+$. Обратно, если $\delta \in \mathcal{D}_k^+$, то определим булеву функцию $g(x_1, \dots, x_{2k})$ так, чтобы при $p, q \geq 2k$ она преобразовывала

слова $0^{2k}1^{i_p}0^{2k}$ и $0^{2k}1^{i_q}0^{2k}$ (в том смысле, как это определено выше) в одно и то же слово в том и только том случае, когда истинно $\delta(p, q)$. При этом слово $0^{2k}1^{i_p}0^{2k}$ преобразуется в слово 0^{i_p+2k+1} , если только число i_p принадлежит нулевому классу эквивалентности δ . Нетрудно видеть, что слова $C_{m_1}, \dots, C_{m_k}$, построенные для данной функции g , определяют на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$ как раз эквивалентность δ .

Предположим теперь, что $f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, \dots, x_{n_2})$ — две булевы функции, которые сводят последовательности β_1, β_2 к последовательности α . Будем предполагать также, что для функций f_1, f_2 и последовательностей β_1, β_2 выполняются те же ограничения, которые сделаны выше для функции f и последовательности β . Аналогично словам B_m, C_m и отношению эквивалентности δ определим для последовательностей β_1, β_2 слова $B_{1m}, C_{1m}, B_{2m}, C_{2m}$ и отношения эквивалентности δ_1, δ_2 . Покажем, что последовательность β_1 P_2 -сводится к последовательности β_2 в том и только том случае, когда $\delta_1 \leq \delta_2$ в решетке $\mathcal{D}_k^+$. Тем самым будет установлена справедливость теоремы.

Пусть $\delta_1 \leq \delta_2$. Определим булеву функцию $g(x_1, \dots, x_l)$, которая сводит последовательность β_1 к последовательности β_2 . Положим

$$\begin{aligned} n' &= \max(n_1, n_2), \\ l &= 2(n' + k). \end{aligned}$$

Мы хотим, чтобы при $j \geq l$ функция g “переводила” слова C_{2j} в слова C_{1j} .

Рассмотрим сначала случай, когда оба слова C_{2j}, C_{1j} отличны от слова Λ . Пусть первый (единичный) символ слова C_{2j} сдвинут в последовательности β_2 по отношению к первому символу слова C_{1j} на t позиций. Заметим, что t — целое число и

$$|t| \leq n' + k.$$

В связи с этим определяем булеву функцию $g(x_1, \dots, x_l)$ так, чтобы ее значения на последовательных подсловах длины l в слове $0^l C_{2j} 0^l$ образовывали бы слово $0^v C_{1j} 0^w$, где

$$v + w + |C_{1j}| = l + |C_{2j}| + 1$$

(здесь $|C_{1j}|$ обозначает длину слова C_{1j}), а начало слова C_{1j} оказалось бы сдвинутым относительно начала слова C_{2j} на $-t$ позиций. Определение функции g корректно, поскольку нужные нам значения функции g задаются лишь на наборах $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, где слово $a_1 a_1 \dots a_l$ имеет вид $0^{r_1} C_{2j} 0^{r_2}$ (при различных непустых словах C_{2j}) и

$$r_1 + r_2 + |C_{2j}| = l.$$

В случае, когда $C_{2j} \neq \Lambda$ и $C_{1j} = \Lambda$, функция g принимает значение 0 на всех наборах, образующих подслова длины l в слове $0^l C_{2j} 0^l$. Наконец, если $C_{2j} = \Lambda$, то должно быть $C_{1j} = \Lambda$, и потому достаточно потребовать лишь, чтобы функция g сохраняла константу 0.

Пусть теперь $\delta_1 \not\leq \delta_2$. Возможны два случая.

В первом случае существуют два элемента, эквивалентные относительно δ_2 , но не эквивалентные относительно δ_1 . Для последовательностей β_1, β_2 это означает, что для некоторых различных слов C_{1p}, C_{1q} и всех r из соотношения

$$C_{1r} \in \{C_{1p}, C_{1q}\}$$

следует, что

$$C_{2r} = C_{2p}.$$

Ясно, что никакая булева функция $g(x_1, \dots, x_l)$ не может преобразовать слово вида $0^l C_{2p} 0^l$ одновременно в два различных слова вида $0^{c_1} C_{1p} 0^{c_2}$ и $0^{d_1} C_{1q} 0^{d_2}$. Таким образом, последовательность β_1 не может P_2 -сводиться к последовательности β_2 .

Во втором случае у отношений δ_1, δ_2 имеется один и тот же класс эквивалентности, который в отношении δ_2 является нулевым, в отношении δ_1 нет. В этом случае легко получаем, что последовательность β_1 не может P_2 -сводиться к последовательности β_2 , поскольку булева функция, сохраняющая 0, не может преобразовать слово, состоящее только из нулей, в слово, содержащее единицу. Теорема доказана.

Следствие 3. Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{P_2}$ имеет континуальное множество атомов.

В заключение приведем один результат, относящийся к максимальным степеням.

Утверждение 6. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию и функцию $x_1 \oplus x_2$, α — двоичная последовательность, в которую входит любое двоичное слово. Тогда Q -степень последовательности α не максимальна в множестве $\mathcal{L}_Q$.

Доказательство. При любом $i \in N$ определим элемент β_i последовательности β соотношением

$$\beta_i = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_i.$$

Очевидно, что последовательность α Q -сводится к последовательности β функцией $x_1 \oplus x_2$.

Предположим, что Q -степень последовательности α максимальна в $\mathcal{L}_Q$. Тогда последовательность β Q -сводится к последовательности α . Это означает, что существуют такие числа $k, l \in N$ и такая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q , что для любого $i \in N$ выполняется соотношение

$$\alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{k+i} = f(\alpha_{l+i}, \dots, \alpha_{l+i+n-1}). \quad (5)$$

Заметим, что функция f не может быть линейной (см. доказательство утверждения 3). Из равенства (6) и аналогичного равенства, справедливого для числа $i + 1$, получаем соотношение

$$\alpha_{k+i+1} \oplus f(\alpha_{l+i}, \dots, \alpha_{l+i+n-1}) \oplus f(\alpha_{l+i+1}, \dots, \alpha_{l+i+n}) = 0. \quad (6)$$

Из нелинейности функции f следует нелинейность функции

$$f(x_1, \dots, x_n) \oplus f(x_2, \dots, x_{n+1}).$$

В самом деле, если j — наименьшее число, для которого переменная x_j входит в нелинейное слагаемое полинома Жегалкина функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то ни одно из таких нелинейных слагаемых не может присутствовать в полиноме Жегалкина функции $f(x_2, \dots, x_{n+1})$.

Таким образом, элементы последовательности α при всех $i \in N$ удовлетворяют нелинейному соотношению (7). Легко видеть, что для последовательности α , содержащей любое двоичное слово, это невозможно. Утверждение доказано.

Список литературы

1. Роджерс Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. Мир, Москва, 1972.
2. Рейна Г., Степени автоматных преобразований. *Киберн. сб.* (1977) **14**, 95–106.
3. Марченков С. С., Булева сводимость. *Дискретная математика* (2003) **15**, №3, 40–53.
4. Gordon H. G., Complete degrees of finite-state transformability. *Information and Control* (1976) **32**, 169–187.
5. Байрашева В. Р., Структурные свойства автоматных преобразований. *Известия вузов. Математика* (1988) **7**, 34–39.
6. Марченков С. С., Конечные начальные сегменты верхней полурешетки конечно-автоматных степеней. *Дискретная математика* (1989) **1**, №3, 96–103.
7. Соловьев В. Д., Структура распределения информации в бесконечной последовательности. *Дискретная математика* (1996) **8**, №2, 97–107.
8. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
9. Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2000.

Статья поступила 20.06.2005.