Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Минимальные точки надкритического ветвящегося блуждания на решетке $\mathbf{N}_0^r$ и многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 3–6

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 02:20:54

УДК 519.2

Минимальные точки надкритического ветвящегося блуждания на решетке N_0^r и многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона

© 2000 г. Б. А. Севастьянов

Рассматривается надкритический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона со средним $A > 1$ числа потомков одной частицы. Первоначальная частица находится в точке $0 \in N_0^r$, где $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Если частица находится в точке $z \in N_0^r$, то ее непосредственные потомки независимо друг от друга помещаются в точках $z + x \in N_0^r$ с вероятностями

$$p(x), \quad \sum_{x \in N_0^r} p(x) = 1.$$

Предполагается, что $Ap(0) > 1$. Пусть $\mu_t(x)$ — число частиц t -го поколения в точке $x \in N_0^r$. Случайное множество $S \subseteq N_0^r$ определяется следующим образом: $x \in S$ тогда и только тогда, когда $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x) = \infty$. Точку $z \in S$ назовем минимальной, если при всех $x \leq z$, $x \neq z$, $x \notin S$. Множество минимальных точек обозначим S_0 . С помощью некоторых вспомогательных ветвящихся процессов с конечным числом типов частиц вычисляются вероятности $P\{z \in S_0\}$, $P\{z_1 \in S_0, z_2 \in S_0\}$ и т.п.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99-0100012, 96-15-96092 и INTAS-RFBR, проект 95-0099.

Обозначим $\mathcal{B}$ надкритический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона μ_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, где μ_t — число частиц в t -м поколении. Пусть $h(s)$ — производящая функция распределения числа потомков и $A = M\{\mu_1 \mid \mu_0 = 1\} > 1$. Будем предполагать, что частицы процесса $\mathcal{B}$ блуждают по целочисленной r -мерной решетке N_0^r , где $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Будем обозначать $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ точки решетки N_0^r . В частности, $0 = (0, \dots, 0)$, e_i — точка, i -я координата которой равна 1, а остальные координаты равны нулю. Неравенство $x \leq y$ будет обозначать, что все координаты $x_i \leq y_i$. Число частиц t -го поколения в точке x обозначим $\mu_t(x)$. Будем предполагать, что $\mu_t(0) = 1$ и что каждый потомок любой частицы t -го поколения, расположенной в точке $z \in N_0^r$, с вероятностью

$$p(x), \quad \sum_{x \in N_0^r} p(x) = 1,$$

независимо от других потомков перескакивает в точку $z + x \in N_0^r$. Ниже мы будем предполагать, что $Ap(0) > 1$ и $p(e_i) > 0, i = 1, 2, \dots, r$. Это ветвящееся блуждание можно представить как ветвящийся процесс $\mathcal{B}$ со счетным числом типов частиц $T(x), x \in N_0^r$, где все частицы процесса $\mathcal{B}$, расположенные в точке x имеют тип $T(x)$ в процессе $\mathcal{B}$, а закон размножения определяется бесконечномерной производящей функцией

$$\tilde{h}(\tilde{s}) = \{\tilde{h}_x(\tilde{s}), x \in N_0^r\}, \quad \tilde{s} = \{s_x, x \in N_0^r\},$$

где $\tilde{h}(\tilde{s})$ и $h(s)$ связаны равенствами

$$\tilde{h}_x(\tilde{s}) = h\left(\sum_{y \in N_0^r} p(y)s_{x+y}\right), \quad x \in N_0^r. \quad (1)$$

В этом процессе среди потомков каждой частицы типа $T(x)$ могут быть только частицы типов $T(x + y)$, где $p(y) > 0$. Так как $A > 1$, первоначальный процесс $\mathcal{B}$ с вероятностью $q, 0 \leq q < 1$, вырождается, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t = 0$, где $q = h(q)$, и $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t = \infty$ с вероятностью $1 - q$ (см. [1]). Аналогично, для каждого $x \in N_0^r$ либо $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x) = 0$, либо $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x) = \infty$. Случайное множество $S \subseteq N_0^r$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} x \in S, & \text{ если } \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x) = \infty, \\ x \notin S, & \text{ если } \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(x) = 0. \end{aligned}$$

Это множество обладает следующим свойством:

$$\text{если } x \in S, \text{ то } y \in S \text{ для всех } y \geq x.$$

Отсюда следует, что если $x \notin S$, то $y \notin S$ для всех $y \leq x$. Будем называть точку $z \in S$ минимальной, если $x \notin S$ для всех $x \leq z, x \neq z$. Множество минимальных точек обозначим S_0 . Ниже мы покажем, как можно вычислять $P\{x \in S_0\}$. Для этого рассмотрим конечнотипные ветвящиеся подпроцессы $\mathcal{B}_z \subseteq \mathcal{B}$ для $z \in N_0^r$. Положим

$$K_z = \{x: x \in N_0^r, x \leq z\}.$$

В процессе $\mathcal{B}_z$ мы будем рассматривать только частицы типов $T(x)$, для которых $x \in K_z$. Любое появление частицы типа $T(x)$ в $\mathcal{B}$ с $x \notin K_z$ в процессе $\mathcal{B}_z$ не учитывается, т.е. все такие частицы в процессе $\mathcal{B}_z$ считаются несуществующими. Таким образом, процесс $\mathcal{B}_z$ имеет конечное число типов частиц. Производящие функции этого процесса $h_x^*(s^*)$ получаются из (1) следующим образом:

$$h_x^*(s^*) = \tilde{h}_x\left(\sum_{y \in N_0^r} s_{x+y}^* p(y)\right), \quad (2)$$

где $x \in K_z, s^* = \{s_{x+y}^*, x + y \in K_z\}$ и $s_{x+y} = 1$ при $x + y \notin K_z$. Если процесс μ_t вырождается, то множество S пусто. В этом случае мы будем полагать, что минимальная точка множества S равна бесконечности, так как $x \notin S$ для любой точки $x \in N_0^r$. Обозначим $\lambda_x(z), x \in K_z$, вероятность вырождения процесса $\mathcal{B}_z$, если он

начинается с одной частицы типа $T(\mathbf{x})$. Как известно (см. [2]), вероятности $\lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$, $0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{z}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = h \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{N}_0^r} p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \right), \quad \mathbf{x} \in K_{\mathbf{z}}, \quad (3)$$

где $\lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = 1$, если $\mathbf{x} + \mathbf{y} \notin K_{\mathbf{z}}$. Система уравнений (3) всегда имеет решение, тождественно равное 1, но если существуют корни $\lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) < 1$, то они и определяют вероятности вырождения в нашем случае.

Лемма 1. Если $Ap(0) > 1$ и $p(\mathbf{e}_i) > 0$ для всех i , $1 \leq i \leq r$, то при любом $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$, $\mathbf{x} \neq 0$,

$$1 > \lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) > \lambda_0(\mathbf{z}). \quad (4)$$

Доказательство. Из однородности размножения и блуждания по точкам решетки $\mathbf{N}_0^r$ следует, что $\lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x})$. Так как при $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$ и при $\mathbf{x} \neq 0$ имеет место включение $K_{\mathbf{z}-\mathbf{x}} \subset K_{\mathbf{z}}$, в силу условий леммы выполняются неравенства (4). Условие $Ap(0) > 1$ означает, что процесс $\mathcal{B}_{\mathbf{z}}$ надкритический, а техническое условие $p(\mathbf{e}_i) > 0$ обеспечивает строгие неравенства (4). При его нарушении возможны случаи $\lambda_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \lambda_0(\mathbf{z})$.

Для вычисления вероятности того, что $\mathbf{z}$ — минимальная точка, введем подмножество $K'_{\mathbf{z}} = K_{\mathbf{z}} \setminus \{\mathbf{z}\}$ и связанный с ним ветвящийся процесс $\mathcal{B}'_{\mathbf{z}}$, отличающийся от $\mathcal{B}_{\mathbf{z}}$ лишь тем, что частицы типа $T(\mathbf{z})$ считаются погибшими. Обозначим $\lambda'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ вероятность вырождения процесса $\mathcal{B}'_{\mathbf{z}}$, если он начинается с одной частицы типа $T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in K'_{\mathbf{z}}$. Вероятности $\lambda'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = h \left(\sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{N}_0^r} p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \lambda'_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \right), \quad \mathbf{x} \in K'_{\mathbf{z}},$$

которая отличается от системы (3) тем, что в ней полагается дополнительно $\lambda'_{\mathbf{z}} = 1$.

Теорема 1. В условиях леммы 1 вероятность того, что точка $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^r$ минимальна, равна $\lambda'_0(\mathbf{z}) - \lambda_0(\mathbf{z}) > 0$.

Доказательство. Неравенство $\lambda'_0(\mathbf{z}) > \lambda_0(\mathbf{z})$ следует из условия $p(\mathbf{e}_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, и $K'_{\mathbf{z}} = K_{\mathbf{z}} \setminus \{\mathbf{z}\}$.

Рассмотрим событие

$$C_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z} \in S_0\}.$$

По определению минимальной точки

$$C_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z} \in S\} \cap \{S \cap K'_{\mathbf{z}} = \emptyset\} = \{S \cap K_{\mathbf{z}} \neq \emptyset\} \cap \{S \cap K'_{\mathbf{z}} = \emptyset\}$$

и

$$\lambda_0(\mathbf{z}) = \mathbf{P}\{S \cap K_{\mathbf{z}} = \emptyset\}, \quad \lambda'_0(\mathbf{z}) = \mathbf{P}\{S \cap K'_{\mathbf{z}} = \emptyset\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{C_z\} &= \mathbf{P}\{S \cap K_z \neq \emptyset, S \cap K'_z = \emptyset\} \\ &= \mathbf{P}\{S \cap K'_z = \emptyset\} - \mathbf{P}\{S \cap K'_z = \emptyset, S \cap K_z = \emptyset\} \\ &= \mathbf{P}\{S \cap K'_z = \emptyset\} - \mathbf{P}\{S \cap K_z = \emptyset\} = \lambda'_0(z) - \lambda_0(z), \end{aligned}$$

так как $\{S \cap K_z = \emptyset\} \subseteq \{S \cap K'_z = \emptyset\}$.

Вероятности $\mathbf{P}\{C_{z_1} C_{z_2}\} = 0$, если $z_1 \leq z_2$ или $z_2 \leq z_1$ и $z_2 \neq z_1$. Для вычисления вероятностей $\mathbf{P}\{C_{z_1} C_{z_2}\}$ в остальных случаях надо воспользоваться следующим методом. Введем обозначения $K_{z_1 z_2} = K_{z_1} \cup K_{z_2}$ и $K'_{z_1 z_2} = K'_{z_1} \cup K'_{z_2}$. Соответствующие ветвящиеся процессы $\mathcal{B}_{z_1 z_2}$ и $\mathcal{B}'_{z_1 z_2}$ содержат только типы $T(x)$ с $x \in K_{z_1 z_2}$ и $x \in K'_{z_1 z_2}$ соответственно. Обозначим $\lambda_0(z_1, z_2)$ и $\lambda'_0(z_1, z_2)$ вероятности вырождения процессов $\mathcal{B}_{z_1, z_2}$ и $\mathcal{B}'_{z_1, z_2}$, соответственно, начинающихся с одной частицы типа $T(0)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. В условиях леммы 1

$$\mathbf{P}\{C_{z_1} \cup C_{z_2}\} = \lambda'_0(z_1, z_2) - \lambda_0(z_1, z_2).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отсюда сразу вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. В условиях леммы 1

$$\mathbf{P}\{C_{z_1} C_{z_2}\} = \lambda'_0(z_1) - \lambda_0(z_1) + \lambda'_0(z_2) - \lambda_0(z_2) - \lambda'_0(z_1, z_2) + \lambda_0(z_1, z_2).$$

Для доказательства в равенстве

$$\mathbf{P}\{C_{z_1} C_{z_2}\} = \mathbf{P}\{C_{z_1}\} + \mathbf{P}\{C_{z_2}\} - \mathbf{P}\{C_{z_1} \cup C_{z_2}\}$$

надо воспользоваться теоремами 1 и 2.

Аналогично можно вычислять вероятности событий $C_{z_1} C_{z_2} C_{z_3}$, $C_{z_1} C_{z_2} C_{z_3} C_{z_4}$ и т.д.

Список литературы

1. Харрис Т., *Теория ветвящихся случайных процессов*. Мир, Москва, 1966.
2. Севастьянов Б.А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.

Статья поступила 04.12.1999.