Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Об асимптотических разложениях в локальных предельных теоремах в равновероятных схемах размещения частиц по различным ячейкам, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 60–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:35:35

Об асимптотических разложениях в локальных предельных теоремах в равновероятных схемах размещения частиц по различным ячейкам

© 2000 г. А.Н. Тимашев

Рассматриваются равновероятные схемы размещения n одинаковых и различных частиц по N различным ячейкам. При условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N - k \rightarrow \infty$ и $0 < \alpha_0 \leq \alpha = (n - kr)/(N - k) \leq \alpha_1 < \infty$, где α_0, α_1 — постоянные, получены асимптотические разложения в локальных теоремах о больших отклонениях, оценивающие вероятности $\mathbf{P}\{\theta_r(n, N) = k\}$ и $\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}$, где $\theta_r(n, N)$ и $\mu_r(n, N)$ — случайные величины, равные числу ячеек, содержащих ровно r частиц каждая в указанных схемах размещения, r фиксировано.

1. Случай различных частиц

Пусть n — количество частиц, N — количество ячеек в равновероятной схеме размещения различных частиц по различным ячейкам, и пусть k и r — целые неотрицательные числа. Всюду далее r фиксировано. Известно [1], что если $\mu_r(n, N)$ — случайная величина, равная числу ячеек, содержащих ровно r частиц каждая в указанной схеме размещения, то при $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = C_{N-k}^k (p_r(\lambda))^k (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}, \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (1)$$

где

$$p_r(\lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$, $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметром λ , $S_{N-k}^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}$, $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{N-k}^{(r)}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \neq r\} = \frac{p_k(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad k \neq r, \quad i = 1, \dots, N - k.$$

При $k = r$

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = r\} = 0, \quad i = 1, \dots, N - k.$$

Из этих условий следует, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = p_n(N\lambda),$$

где величина

$$p_n(N\lambda) = \frac{(N\lambda)^n}{n!} \exp(-N\lambda).$$

определяется согласно (2).

Нетрудно подсчитать, что [1]

$$\mathbf{E}\xi_i^{(r)} = \mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \frac{\lambda - rp_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)},$$

$$\mathbf{D}\xi_i^{(r)} = \mathbf{D}\xi_1^{(r)} = \frac{\lambda}{(1 - p_r(\lambda))^2} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(\lambda - r)^2}{\lambda} p_r(\lambda) \right), \quad i = 1, \dots, N - k.$$

Выберем параметр $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = (N - k)\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = n - kr.$$

Тогда

$$\frac{\lambda(1 - p_{r-1}(\lambda))}{1 - p_r(\lambda)} = \frac{n - kr}{N - k},$$

где при $r = 0$ считаем, что $p_{-1}(\lambda) = 0$. Положим

$$\alpha = \frac{n - kr}{N - k},$$

тогда параметр $\lambda > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\lambda(1 - p_{r-1}(\lambda))}{1 - p_r(\lambda)} = \alpha. \quad (3)$$

Легко проверить, что при $\alpha > 0$ и $r \geq 1$ уравнение (3) имеет единственный вещественный положительный корень $\lambda = \lambda_0$ (при $r = 0$ это верно, если $\alpha > 1$).

Далее будем считать, что при $n, N \rightarrow \infty$ k меняется так, что $N - k \rightarrow \infty$ и

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n - kr}{N - k} \leq \alpha_1 < \infty \quad (4)$$

(α_0, α_1 — постоянные).

Заметим, что если при условиях (4) $r = 0$ и $\overline{\lim}_{n, N \rightarrow \infty} k/N < 1$ или $r > 1$, то параметры n, N меняются в центральной области [1]. Это означает, что условия (4) обобщают понятие центральной области на случай, когда при $n, N \rightarrow \infty$ параметр $k \rightarrow \infty$ достаточно быстро (в этом случае $r = 0$ и $\overline{\lim}_{n, N \rightarrow \infty} k/N = 1$).

Чтобы оценить вероятность $\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}$ при $n, N \rightarrow \infty$ и выполнении условий (4), используем (1), полагая $\lambda = \lambda_0$. Достаточно ограничиться оценкой вероятности $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$. Если положить $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(r)}$ при $\lambda = \lambda_0$, то

$$\mathbf{D}S_{N-k}^{(r)} = (N - k)\sigma_r^2$$

и

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = n - kr.$$

Таким образом, нужно оценить вероятность $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = \mathbf{E}S_{N-k}^{(r)}\}$. Из уравнения (3) и формулы для дисперсии $\mathbf{D}\xi_1^{(r)}$, приведенной выше, нетрудно вывести, что

$$\sigma_r^2 = \frac{\lambda_0^2 - (\alpha + r - 1)\lambda_0 + \alpha r}{1 - p_r(\lambda_0)}. \quad (5)$$

Если $r \geq 1$ и $\alpha > 0$ или $r = 0$ и $\alpha > 1$, то в обоих случаях $\sigma_r^2 > 0$. Далее считаем, что $\sigma_r > 0$. Применяя при $n, N \rightarrow \infty$ и условиях (4) локальную нормальную теорему, получаем, что при $r \geq 1$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N-k}\right) \right). \quad (6)$$

При $r = 0$ равенство (6) верно, если $\alpha_0 > 1$.

Чтобы уточнить формулу (6), оценим коэффициенты ряда Крамера–Эссеена, дающего асимптотическое разложение остаточного члена вида $O((N-k)^{-1})$ в этой формуле. Поскольку $\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = n - kr$ при $\lambda = \lambda_0$, то указанные коэффициенты могут быть отличны от нуля только при целых отрицательных степенях вида $(N-k)^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$. Далее на примерах будет показано, что использование главного члена в (6) для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}$ согласно (1) дает, как правило, большую точность, чем известные [1] оценки этой вероятности в центральной и промежуточных областях изменения параметров n, N . Причина этого факта заключается, по-видимому, в том, что остаточный член в данном случае имеет порядок $O((N-k)^{-1})$, в то время как в указанных оценках этот остаточный член равен $O(N^{-1/2})$. Знание нескольких первых коэффициентов ряда Крамера–Эссеена позволяет существенно повысить эту точность. Известно [2], что эти коэффициенты выражаются через кумулянты κ_s порядка s , $s = 1, 2, \dots$, случайной величины $\xi_1^{(r)}$. При $\lambda = \lambda_0$ [3]

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \alpha, \\ \kappa_2 &= \mathbf{D}\xi_1^{(r)} = \sigma_r^2, \\ \kappa_3 &= \mathbf{E}(\xi_1^{(r)} - \mathbf{E}\xi_1^{(r)})^3 = \frac{m_3 - r^3 p_r(\lambda_0)}{1 - p_r(\lambda_0)} - 3\alpha\sigma_r^2 - \alpha^3, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$m_3 = \mathbf{E}\xi_1^3 = \lambda_0 + 3\lambda_0^2 + \lambda_0^3, \quad (8)$$

$$\kappa_4 = \mathbf{E}(\xi_1^{(r)} - \mathbf{E}\xi_1^{(r)})^4 - 3\sigma_r^4 \quad (9)$$

$$= \frac{m_4 - 4\alpha m_3 + (4\alpha - r)r^3 p_r \lambda_0}{1 - p_r(\lambda_0)} + 6\alpha^2 \sigma_r^2 + 3\alpha^4 - 3\sigma_r^4, \quad (10)$$

и

$$m_4 = \mathbf{E}\xi_1^4 = \lambda_0 + 7\lambda_0^2 + 6\lambda_0^3 + \lambda_0^4. \quad (11)$$

Аналогичные, но более сложные формулы для кумулянтов $\varkappa_s$ справедливы и при $s \geq 5$. Пусть γ_m — коэффициент при $(N - k)^{-m}$ в асимптотическом разложении остаточного члена в (6), $m = 1, 2, \dots$, тогда согласно [2]

$$\gamma_m = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+2mk_{2m}=2m} \frac{(-1)^l (2l)!}{l! 2^l} \times \prod_{s=1}^{2m} \frac{1}{(k_s)!} \left(\frac{\varkappa_{s+2}}{(s+2)! \sigma_r^{s+2}} \right)^{k_s}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$l = m + k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{2m} \quad (13)$$

и суммирование в (11) осуществляется по всем решениям уравнения

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + 2mk_{2m} = 2m$$

в целых неотрицательных числах $k_1, k_2, \dots, k_{2m}$.

В частности, при $m = 1$ из (11) и (12) следует, что

$$\gamma_1 = \frac{1}{8} \frac{\varkappa_4}{\sigma_r^4} - \frac{5}{24} \frac{\varkappa_3^2}{\sigma_r^6}, \quad (14)$$

при $m = 2$

$$\gamma_2 = -\frac{\varkappa_6}{48\sigma_r^6} + \frac{56\varkappa_3\varkappa_5 + 35\varkappa_4^2}{384\sigma_r^8} - \frac{35\varkappa_3^2\varkappa_4}{64\sigma_r^{10}} + \frac{385\varkappa_3^4}{1152\sigma_r^{12}}$$

и т. п.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (4), причем $\alpha_0 > 1$ при $r = 0$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} \sim \frac{C_N^k(p_r(\lambda_0))^k (1 - p_r(\lambda_0))^{N-k}}{p_n(N\lambda_0)} \times \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{(N-k)^m} \right), \quad (15)$$

где $\lambda = \lambda_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (3) и величины $p_r(\lambda_0)$, σ_r , γ_m , $m = 1, 2, \dots$, определяются согласно (2), (5), (11), (12).

Доказательство. Разлагая остаточный член в (6) в ряд Крамера–Эссеена, получаем, что при условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} \sim \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{(N-k)^m} \right), \quad (16)$$

Теперь равенство (14) следует из (15) и (1), поскольку $\mathbf{P}\{S_N = n\} = p_n(N\lambda_0)$ при $\lambda = \lambda_0$. Теорема доказана.

Заметим, что разложение (14) следует понимать в том смысле, что при условиях теоремы 1 для любого фиксированного значения $M = 1, 2, \dots$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{C_N^k (p_r(\lambda_0))^k (1 - p_r(\lambda_0))^{N-k}}{p_n(N\lambda_0)} \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \times \left(1 + \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m}{(N-k)^m} + O\left(\frac{1}{(N-k)^{M+1}}\right) \right). \quad (17)$$

В частности, при $M = 1$ получаем следующее утверждение.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{C_N^k (p_r(\lambda_0))^k (1 - p_r(\lambda_0))^{N-k}}{p_n(N\lambda_0)} \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \times \left(1 + \frac{\gamma_1}{N-k} + O\left(\frac{1}{(N-k)^2}\right) \right), \quad (18)$$

где значение γ_1 определяется согласно (5), (7)–(10), (13).

Следствие 2. Если при условиях теоремы 1 $r = 0$, то равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = C_N^k \frac{n!}{N^n} \frac{\lambda_0^{N-n-k}}{(\alpha - \lambda_0)^{N-k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n(1 - \alpha + \lambda_0)}} \times \left(1 + \frac{\gamma_1}{N-k} + O\left(\frac{1}{(N-k)^2}\right) \right), \quad (19)$$

где $\lambda = \lambda_0$ – единственный вещественный положительный корень уравнения $\lambda(1 - e^{-\lambda})^{-1} = \alpha > 1$,

$$\gamma_1 = \frac{-1 + (\alpha - \lambda_0)(\lambda_0^3 + (9/2 - 2\alpha)\lambda_0^2 + (2\alpha - 9\alpha + 8)\lambda_0 - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha + 3)}{12\alpha(1 - \alpha + \lambda_0)^3}.$$

Утверждение следствия 2 ранее было получено методом перевала в работе автора [4]. Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следствием 1 при $r = 0$ и учесть, что в данном случае

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \alpha(1 - \alpha + \lambda_0) > 0, \\ \kappa_3 &= \alpha(\lambda_0^2 + 3(1 - \alpha)\lambda_0 + 2\alpha^2 - 3\alpha + 1), \\ \kappa_4 &= \alpha(\lambda_0^3 - (7\alpha - 6)\lambda_0^2 + (12\alpha^2 - 18\alpha + 7)\lambda_0 - 6\alpha^3 + 12\alpha^2 - 7\alpha + 1). \end{aligned}$$

Теорема 2. При условиях теоремы 1

$$\gamma_m = -\frac{i\sigma_r(2m)!}{m!2^{2m+1/2}} a_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где коэффициенты a_m , $m = 0, 1, \dots$, определяются из равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m = \frac{\theta'(u)}{\theta(u)}$$

с начальным условием $a_0 = i\sqrt{2}/\sigma_r$, а функция $\theta(u)$ является аналитическим решением дифференциального уравнения

$$\theta'(u)(\alpha - \theta(u) - (\alpha - r)p_r(\theta(u))) - 2u\theta(u)(1 - p_r(\theta(u))) = 0,$$

удовлетворяющим начальному условию $\theta(0) = \lambda_0$.

Доказательство теоремы 2 исходит из равенств [1]

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{C_N^k}{(r!)^k} \frac{n!}{N^n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(e^z - z^r/r!)^{N-k}}{z^{n-kr+1}} dz, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (21)$$

Интегрирование в (20) осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении. Применяя к оценке интеграла в (20) метод перевала при условиях теоремы 1 и используя тот же прием, с помощью которого получены асимптотические разложения в работе автора [5], в силу единственности коэффициентов асимптотического разложения получаем (19) (соответствующие выкладки мы опускаем).

Следствие 3. При условиях теоремы 2

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4\lambda_0} \left(\frac{i\sigma_r \theta'''(0)}{\sqrt{2}} + 3\theta''(0) \right) - \frac{1}{\sigma_r^2}. \quad (22)$$

Для обоснования следствия 3 достаточно заметить, что при условиях теоремы 2 равенство (21) равносильно (13), поскольку при $m = 1$ согласно (19)

$$\gamma_1 = -\frac{i\sigma_r}{2\sqrt{2}} a_2$$

и

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right)''(0) = \frac{\theta'''(0)}{2\lambda_0} - \frac{3i\theta''(0)}{\lambda_0 \sigma_r \sqrt{2}} - \frac{2i\sqrt{2}}{\sigma_r^3}.$$

Оценки, полученные в теоремах 1 и 2, дают неожиданно хорошее приближение уже при небольших значениях n и N . Так, например, при $n = N = 10$, $k = 5$, $r = 0$ имеем $\alpha = 2$ и $\lambda = 1,593624\dots$ с точностью до 10^{-6} (значение λ_0 заимствовано из [6]), поэтому первое приближение, вычисленное согласно (18) путем отбрасывания слагаемых порядков $O((N-k)^{-1})$ и $O((N-k)^{-2})$, дает оценку 0,13145 (с точностью до 10^{-5}), в то время как локальная нормальная теорема [1] дает оценку 0,16486. Второе приближение, вычисленное согласно (18) путем отбрасывания слагаемого порядка $O((N-k)^{-2})$, дает оценку 0,12861 вместо точного значения $\mathbf{P}\{\mu_0(10, 10) = 5\} = 0,1285956$. При $n = N = 10$, $k = 4$, $r = 2$ имеем $\alpha = 1/3$ и $\lambda_0 = 0,435630\dots$, и уже первое приближение (главный член в формуле (17)) дает оценку 0,07041 вместо точного значения $\mathbf{P}\{\mu_2(10, 10) = 4\} = 0,071442$. Если же $n = 20$, $N = 50$, $k = r = 2$, то первое приближение дает оценку 0,28449 вместо значения $\mathbf{P}\{\mu_2(20, 50) = 2\} = 0,28462$ (с точностью до 10^{-5}), в то же время локальная нормальная теорема дает оценку 0,27177.

2. Случай одинаковых частиц

Рассмотрим теперь равновероятную схему размещения n одинаковых частиц по N различным ячейкам. Пусть $\theta_r(n, N)$ — случайная величина, равная числу ячеек, содержащих ровно r частиц каждая в этой схеме, тогда аналогично (1) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\theta_r(n, N) = k\} = C_N^k (q_r(z))^k (1 - q_r(z))^{N-k} \times \frac{\mathbf{P}\{T_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{T_N = n\}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

где $z \in (0, 1)$,

$$q_r(z) = (1 - z)z^r, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

$T_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$, $\eta_1, \dots, \eta_N$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие геометрическое распределение с параметром z , т. е.

$$\mathbf{P}\{\eta_i = k\} = q_k(z), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$T_{N-k}^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_{N-k}^{(r)}$, $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_{N-k}^{(r)}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k \mid \eta_i \neq r\} = \frac{q_k(z)}{1 - q_r(z)}, \quad i = 1, \dots, N-k, \quad k = 0, 1, \dots, k \neq r.$$

При $k = r$

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = r\} = 0, \quad i = 1, \dots, N-k.$$

Из наших условий следует, что

$$\mathbf{P}\{T_N = n\} = C_{n+N-1}^n z^n (1 - z)^N. \quad (25)$$

Далее имеем:

$$\mathbf{E}\eta_i^{(r)} = \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \frac{1}{1 - q_r(z)} \left(\frac{z}{1 - z} - r q_r(z) \right), \quad i = 1, \dots, N-k,$$

и поэтому при условиях (4)

$$\mathbf{E}T_{N-k}^{(r)} = (N - k)\mathbf{E}\eta_1^{(r)} = n - kr,$$

если $\mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \alpha$, что равносильно уравнению

$$(\alpha - r)z^r(1 - z)^2 + (1 + \alpha)z - \alpha = 0. \quad (26)$$

Нетрудно убедиться в том, что это уравнение при $r \geq 1$ и $\alpha > 0$ имеет единственный корень $z = z_0 \in (0, 1)$ (при $r = 0$ это верно, если $\alpha > 1$). При $z = z_0$ положим $\mathbf{D}\eta_1^{(r)} = (\sigma^{(r)})^2$, тогда

$$\mathbf{D}T_{N-k}^{(r)} = (N - k)(\sigma^{(r)})^2,$$

и из уравнения (25) легко вывести, что при $r \geq 1$ и $\alpha > 0$ или при $r = 0$ и $\alpha > 1$

$$0 < (\sigma^{(r)})^2 = \frac{(\alpha + 1)(r + 1)z_0^2 - (2\alpha r + \alpha + r - 1)z_0 + \alpha r}{(1 - z_0)^2(1 - q_r(z_0))}. \quad (27)$$

Всюду далее считаем, что $\sigma^{(r)} > 0$.

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\theta_r(n, N) = k\} \sim & \frac{C_N^k(q_r(z_0))^k(1 - q_r(z_0))^{N-k}}{C_{n+N-1}^n z_0^n (1 - z_0)^N} \\ & \times \frac{1}{\sigma^{(r)} \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m}{(N-k)^m} \right), \quad (28) \end{aligned}$$

где $z = z_0$ — единственный корень уравнения (25), принадлежащий интервалу $(0, 1)$, и величины $q_r(z_0)$, $\sigma^{(r)}$, δ_m , $m = 1, 2, \dots$, определяются согласно (23), (26) и равенствам (11), (12) с заменой γ_m на δ_m , σ_r на $\sigma^{(r)}$ и $\varkappa_{s+2}$ на $\varkappa^{(s+2)}$, где $\varkappa^{(s)}$ — кумулянт порядка s случайной величины $\eta_1^{(r)}$, $s = 1, 2, \dots$.

Обоснование разложения (27) проводится аналогично доказательству теоремы 1 с учетом равенств (22), (24) и соотношения

$$\mathbf{P}\{T_{N-k}^{(r)} = n - kr\} \sim \frac{1}{\sigma^{(r)} \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m}{(N-k)^m} \right),$$

справедливого при условии теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. При этом разложение (27) следует понимать в том же смысле, что и (14). При $z = z_0$ кумулянты $\varkappa_s$, $s = 1, 2, \dots$, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1)} &= \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \alpha, \\ \varkappa^{(2)} &= \mathbf{D}\eta_1^{(r)} = (\sigma^{(r)})^2, \\ \varkappa^{(3)} &= \frac{M_3 - r^3 q_r(z_0)}{1 - q_r(z_0)} - 3\alpha(\sigma^{(r)})^2 - \alpha^3, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$M_3 = \mathbf{E}\eta_1^3 = \frac{z_0(1 + 4z_0 + z_0^2)}{(1 - z_0)^3}, \quad (30)$$

$$\varkappa^{(4)} = \frac{M_4 - 4\alpha M_3 + (4\alpha - r)r^3 q_r(z_0)}{1 - q_r(z_0)} + 6\alpha^2(\sigma^{(r)})^2 + 3\alpha^4 - 3(\sigma^{(r)})^4, \quad (31)$$

и

$$M_4 = \mathbf{E}\eta_1^4 = \frac{z_0(1 + 11z_0 + 11z_0^2 + z_0^3)}{(1 - z_0)^4}. \quad (32)$$

Аналогичные, но более громоздкие формулы можно выписать для кумулянтов $\varkappa^{(s)}$ при $s \geq 5$.

Следствие 4. При условиях теоремы 3 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$P\{\theta_r(n, N) = k\} = \frac{C_N^k (q_r(z_0))^k (1 - q_r(z_0))^{N-k}}{C_{n+N-1}^n z_0^n (1 - z_0)^N} \frac{1}{\sigma^{(r)} \sqrt{2\pi(N-k)}} \times \left(1 + \frac{\delta_1}{N-k} + O\left(\frac{1}{(N-k)^2}\right) \right), \quad (33)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{8} \frac{\kappa^{(4)}}{(\sigma^{(r)})^4} - \frac{5}{24} \frac{(\kappa^{(3)})^2}{(\sigma^{(r)})^6} \quad (34)$$

и величины $\sigma^{(r)}, \kappa^{(3)}, \kappa^{(4)}$ определяются согласно (26), (28)–(31).

Заметим, что величина δ_2 выражается так же, как и γ_2 , с заменой σ_r на $\sigma^{(r)}$ и κ_s на $\kappa^{(s)}$, $s = 3, 4, 5, 6$.

Следствие 5. Если в условиях теоремы 3 $r = 0$, то равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$P\{\theta_0(n, N) = k\} = \frac{C_N^k \alpha^n}{C_{n+N-1}^n (\alpha - 1)^{n-N+k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(\alpha - 1)(N-k)}} \times \left(1 + \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{12\alpha(\alpha - 1)(N-k)} + O\left(\frac{1}{(N-k)^2}\right) \right). \quad (35)$$

Заметим, что утверждение следствия 5 можно также получить, используя формулу Стирлинга и соотношения [7]

$$P\{\theta_0(n, N) = k\} = \frac{C_N^k C_{n-1}^{N-k-1}}{C_{n+N-1}^n}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Теорема 4. При условиях теоремы 3

$$\delta_m = -\frac{i\sigma^{(r)}(2m)!}{m!2^{2m+1/2}} b_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты b_m , $m = 0, 1, \dots$, определяются из равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m u^m = \frac{\eta'(u)}{\eta(u)}$$

с начальным условием

$$b_0 = \frac{i\sqrt{2}}{\sigma^{(r)}},$$

а функция $\eta(u)$ является аналитическим решением дифференциального уравнения

$$\eta'(u) \left(\alpha - \frac{\eta(u)}{1 - \eta(u)} - (\alpha - r)q_r(\eta(u)) \right) - 2u\eta(u)(1 - q_r(\eta(u))) = 0,$$

удовлетворяющим начальному условию $\eta(0) = z_0$.

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 2, исходя из интегрального представления [7] (см. также [8])

$$\mathbf{P}\{\theta_r(n, N) = k\} = \frac{C_N^k}{C_{n+N-1}} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{((1-z)^{-1} - z^r)^{N-k}}{z^{n-kr+1}} dz, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (36)$$

Интегрирование в формуле (35) осуществляется по тому же пути, что и в (20).

Следствие 6. При условиях теоремы 4

$$\delta_1 = -\frac{1}{4z_0} \left(\frac{i\sigma^{(r)}\eta'''(0)}{\sqrt{2}} + 3\eta''(0) \right) - \frac{1}{(\sigma^{(r)})^2}.$$

Полученные в теоремах 3 и 4 оценки, как и в случае различных частиц, дают очень хорошее приближение даже при небольших значениях n и N . Если, например, $n = 10$, $N = 9$, $k = r = 2$, то $\alpha = 6/7$ и $z_0 = 1/2$, поэтому первое приближение, вычисленное согласно (32) путем отбрасывания слагаемых порядков $O((N-k)^{-1})$ и $O((N-k)^{-2})$, дает оценку 0,27393 (с точностью до 10^{-5}). Второе приближение, вычисленное согласно (26), (28)–(30), (32), (33) путем отбрасывания слагаемого порядка $O((N-k)^{-2})$, дает оценку 0,26110 вместо значения $\mathbf{P}\{\theta_2(10, 9) = 2\} \simeq 0,26491$ (с той же точностью). Если же $n = 10$, $N = 7$, $k = 2$, $r = 0$, то $\alpha = 2$, $z_0 = 1/2$, и первое приближение (главный член в (34) дает оценку 0,33877, в то время как локальная нормальная теорема [7] дает значение 0,39893. Второе приближение, вычисленное согласно (34) путем отбрасывания слагаемого порядка $O((N-k)^{-2})$ дает оценку 0,33030 вместо значения $\mathbf{P}\{\theta_0(10, 7) = 2\} \simeq 0,33042$.

Список литературы

1. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Петров В.В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
3. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А., *Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы*. Наука, Москва, 1973.
4. Тимашев А.Н., Об асимптотических разложениях для чисел Стирлинга I-го и II-го рода. *Дискретная математика* (1998) 10, №3, 148–159.
5. Тимашев А.Н., Об асимптотических разложениях в области больших отклонений для биномиального и пуассоновского распределений. *Теория вероятностей и ее применения* (1998) 43, №1, 57–68.
6. Good I.J., An asymptotic formula for the differences of the powers at zero. *Ann. Math. Statist.* (1961) 32, №1, 249–256.
7. Сачков В.Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
8. Тимашев А.Н., Теоремы о больших отклонениях в схеме размещения одинаковых частиц по различным ячейкам. *Дискретная математика* (1993) 5, №4, 29–42.

Статья поступила 30.09.1998.