Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Абашин, Линейные рекурсивные МДР-коды размерностей 2 и 3, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 140–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:56:20

Линейные рекурсивные МДР-коды размерностей 2 и 3

© 2000 г. А. С. Абашин

Назовем код $\mathcal{X}$ длины n в алфавите Ω линейным в широком смысле или просто линейным, если существует бинарная операция $+$ на Ω такая, что $(\Omega, +)$ — абелева группа и $\mathcal{X}$ — подгруппа в $(\Omega^n, +)$. Скажем, что $\mathcal{X}$ есть k -рекурсивный код, если он состоит из всех слов длины $n \geq k$, координаты которых получаются по некоторому фиксированному закону рекурсии из первых k координат.

Пусть $l^r(k, q)$ — максимальное n , для которого существует линейный k -рекурсивный код длины n в алфавите из q элементов с расстоянием $n - k + 1$ (МДР-код), а $l^{ir}(k, q)$ — максимальное n , для которого существует линейный k -рекурсивный идемпотентный (содержащий все слова-константы) МДР-код длины n в алфавите из q элементов. С помощью теории линейных рекуррентных последовательностей найдены значения $l^{ir}(2, q)$ и $l^r(3, q)$ для примарного q .

1. Основные понятия и результаты.

Пусть $\Omega = \{a_1, \dots, a_q\}$ — произвольное конечное множество. Любое подмножество $\mathcal{X} \subseteq \Omega^n$ называется кодом длины n в алфавите Ω . Если $|\mathcal{X}| = q^k$, то код называется $[n, k]_\Omega$ -кодом (или $[n, k]_q$ -кодом), а параметр k называется комбинаторной размерностью кода $\mathcal{X}$. Расстояние (Хэмминга) $d(u, v)$ между двумя словами $u, v \in \mathcal{X}$ определяется стандартно, как число неравных координат с одинаковыми номерами в u и v . Расстояние (Хэмминга) кода $\mathcal{X}$ определяется как минимум $d(\mathcal{X})$ расстояний между его различными словами. Будем говорить, что $[n, k]_\Omega$ -код $\mathcal{X}$ есть $[n, k, d]_\Omega$ -код, если $d(\mathcal{X}) = d$. Известно, что $d \leq n - k + 1$ (граница Синглтона [1]). Код называется МДР-кодом, если $d = n - k + 1$. Далее используются результаты и терминология работы [4]. Назовем код $\mathcal{X} \subseteq \Omega^n$ линейным в широком смысле, или просто линейным, если существует бинарная операция $+$ на Ω такая, что $(\Omega, +)$ — абелева группа и $\mathcal{X}$ — подгруппа в $(\Omega^n, +)$. В соответствии с классическим определением [1, 2] код $\mathcal{X}$ называется линейным, если Ω — конечное поле и $\mathcal{X}$ является подпространством пространства Ω^n над этим полем. Будем называть такой код линейным в узком смысле. Линейные в широком смысле (над абелевой группой $(\Omega, +)$) коды назовем линейно в широком смысле эквивалентными, если один получается из другого перестановкой координат и применением автоморфизмов группы $(\Omega, +)$ к координатам. Назовем $\mathcal{X}$ полным k -рекурсивным кодом, если существует функция $f: \Omega^k \rightarrow \Omega$, $k \leq n$, такая, что $\mathcal{X}$ есть множество всех слов $u(0, n-1) = (u(0), \dots, u(n-1))$,

удовлетворяющих условию

$$u(i+k) = f(u(i), \dots, u(i+k-1)), \quad i = 0, 1, \dots, n-k,$$

где $u(0), \dots, u(k-1)$ — произвольные элементы из Ω . Далее такой код обозначается $\mathcal{K}(n, f)$. Будем называть функцию $f: \Omega^k \rightarrow \Omega$ и соответствующий код $\mathcal{K}(n, f)$ идемпотентными, если выполняется тождество $f(x, \dots, x) = x$. Очевидно, что идемпотентность кода $\mathcal{K}$ равносильна тому, что он содержит все слова-константы $\hat{a} = (a, \dots, a)$, где $a \in \Omega$.

Введем следующие обозначения. Пусть $n(k, q)$ — максимальное n такое, что существует k -мерный МДР-код длины n в алфавите мощности q ; $n^r(k, q)$ — максимальное n такое, что существует (полный) k -рекурсивный МДР-код длины n в алфавите мощности q ; $n^{ir}(k, q)$ — максимальное n такое, что существует (полный) k -рекурсивный идемпотентный МДР-код длины n в алфавите мощности q ; $l(k, q)$ — максимум длин линейных k -мерных МДР-кодов в алфавите мощности q . В случае, когда q — примарное число (степень простого числа), обозначим через $m(k, q)$ такой же параметр в классе кодов линейных в узком смысле.

Аналогично тому, как мы определили $n^r(k, q)$, $n^{ir}(k, q)$, можно ввести дополнительно параметры $l^r(k, q)$, $l^{ir}(k, q)$, $m^r(k, q)$, $m^{ir}(k, q)$ в классах рекурсивных кодов линейных соответственно в широком и в узком смысле. В [4] ставится и частично решается задача оценивания и сравнения элементов матрицы

$$M(k, q) = \begin{pmatrix} m^{ir}(k, q) & m^r(k, q) & m(k, q) \\ l^{ir}(k, q) & l^r(k, q) & l(k, q) \\ n^{ir}(k, q) & n^r(k, q) & n(k, q) \end{pmatrix},$$

в которой числа, очевидно, не убывают слева направо и сверху вниз. Естественно, первая строка этой матрицы, заключенная в скобки, появляется лишь в случае примарного q .

В данной работе сравниваются параметры $l^r(k, q)$ и $m^r(k, q)$, $l^{ir}(k, q)$ и $m^{ir}(k, q)$ для примарных q и $k = 2, 3$. Известны следующие результаты:

$$m^r(2, q) = l^r(2, q) = n(2, q) = q + 1 \quad (1)$$

(см. теорему 6 в [4]);

$$q - 1 \leq m^{ir}(2, q) \leq l^{ir}(2, q) \leq q + 1 \quad (2)$$

(см. предложение 10 в [4]); если p — простое число, $p \geq 3$, то

$$p \leq m^{ir}(2, p) \leq l^{ir}(2, p) \leq p + 1 \quad (3)$$

(см. предложение 11 в [2]); для примарного нечетного q

$$m^r(3, q) = l^r(3, q) = n^r(3, q) = q + 1 \quad (4)$$

(см. [1]); если $q = 2^t$, то

$$2^t + 1 \leq m^r(3, 2^t) \leq l^r(3, 2^t) \leq m(3, 2^t) = 2^t + 2 \quad (5)$$

(см. [1]); и, наконец,

$$m^r(3, 4) = 5 < l^r(3, 4) = n(3, 4) = 6, \quad l^r(3, 8) = 9, \quad l^r(3, 16) = 17 \quad (6)$$

(см. [4]).

Равенство $l^r(3, 4) = 6$ было доказано путем построения с помощью ЭВМ линейного в широком смысле [6, 3, 4]-кода над $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$, названного Астурийским. Основные результаты данной работы таковы.

Теорема 1. Для примарного q справедливо равенство

$$l^{ir}(2, q) = \begin{cases} q, & \text{если } q - \text{простое,} \\ q - 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следствие 1. Пусть F — поле из $q = p^t$ элементов, p — простое, $t > 1$. Тогда любой код $\mathcal{K}$, линейно эквивалентный над группой $(F, +)$ расширенному $[q, 2, q+1]$ коду Риды-Соломона, не является циклическим.

Теорема 2. Для примарного $q \neq 4$ имеет место равенство $l^r(3, q) = q + 1$.

Следствие 2. Среди кодов, линейно в широком смысле эквивалентных $[2^t+2, 3, 2^t]$ или $[2^t+2, 2^t-1, 4]$ расширенным кодам Риды-Соломона нет циклических кодов.

Таким образом, справедливы следующие уточнения оценок (2), (3), (5). Для любого простого p верны соотношения

$$p = m^{ir}(2, q) = l^{ir}(2, p) < n(2, p) = p + 1. \quad (7)$$

Если q — примарное и не простое число, то

$$q - 1 = m^{ir}(2, q) = l^{ir}(2, q) < m^r(2, q) = q + 1. \quad (8)$$

Если $t \geq 3$, то

$$m^r(3, 2^t) = l^r(3, 2^t) = 2^t + 1. \quad (9)$$

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Пусть $\mathcal{K}$ — идемпотентный МДР-код размерности 2. Тогда в любом его слове, не являющемся константой, все координаты различны.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathcal{K}$ содержит слово α не являющееся константой и такое, что $\alpha(i) = \alpha(j) = a$ для некоторых различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $a \in \Omega$. Тогда $\hat{a} \in \mathcal{K}$, так как $\mathcal{K}$ — идемпотентный код, $\hat{a} \neq \alpha$, так как α — не константа, и $\rho(\hat{a}, \alpha) \leq n - 2 < d(\mathcal{K}) = n - 1$. Получаем противоречие.

Следствие 3. Длина идемпотентного МДР-кода размерности 2 не превосходит мощности алфавита. Для любого простого p справедливо равенство $l^{ir}(2, p) = p$.

Доказательство. Действительно, в противном случае в любом слове кода, не являющемся константой есть две одинаковые координаты. Последнее равенство следует теперь из (3).

Докажем теорему в случае, когда $q = p^t$, где p — простое число, $t \in \mathbf{N}$, $t > 1$. Введем некоторые дополнительные понятия. Пусть $\mathcal{K}(n, f)$ — линейный рекурсивный код над абелевой группой $(\Omega, +)$, тогда функция $f: \Omega^k \rightarrow \Omega$ есть гомоморфизм группы $(\Omega^k, +)$ в группу $(\Omega, +)$ и поэтому она может быть представлена в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) = a_1(x_1) + \dots + a_k(x_k),$$

где $a_i \in \text{End}(\Omega, +)$. Для того чтобы код $\mathcal{K}(n, f)$ был МДР-кодом необходимо, чтобы все эндоморфизмы a_i были автоморфизмами [4]. Поэтому далее предполагается, что

$$a_i \in \text{Aut}(\Omega, +), \quad i = 1, \dots, k. \quad (10)$$

Рассмотрим дополнительно семейство $\mathcal{R}_\Omega(f)$ всех рекуррентных последовательностей $u: \mathbf{N}_0 \rightarrow \Omega$ над Ω , удовлетворяющих условию

$$u(i + k) = f(u(i, i + k - 1)), \quad i \in \mathbf{N}_0.$$

Очевидно, что $|\mathcal{R}_\Omega(f)| = q^k$ и

$$\mathcal{K}(n, f) = \mathcal{R}_\Omega^{0, n-1}(f) \quad (11)$$

есть множество всех начальных отрезков $u(0, n-1) = (u(0), \dots, u(n-1))$ длины n рекуррент $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$. Ввиду конечности Ω и условия (10) все последовательности из $\mathcal{R}_\Omega(f)$ являются реверсивными (чисто периодическими). Наименьшее общее кратное периодов $T(u)$ последовательностей $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ назовем периодом функции f и обозначим $T(f)$.

Ввиду определений и соотношений (10) достаточно доказать, что не существует идемпотентного линейного рекурсивного $[q, 2, q-1]$ -кода над абелевой группой $(\Omega, +)$ порядка q . Пусть $\mathcal{K} = K(q, f(x_1, x_2))$ — такой код.

Покажем прежде всего, что тогда Ω — элементарная абелева группа. Справедливо разложение

$$\Omega \cong \mathbf{Z}_{p^{i_1}} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_{p^{i_s}}. \quad (12)$$

Без ограничения общности можно считать, что $i_1 \geq \dots \geq i_s \geq 1$. Предположим, что $i_1 > 1$. Рассмотрим произвольное слово $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(q)) \in \mathcal{K}$, не являющееся константой. По лемме 1 в слове α нет одинаковых координат. Значит, множество $\{\alpha(1), \dots, \alpha(q)\}$ совпадает с Ω и в этом множестве есть по крайней мере p элементов порядка p . Ввиду линейности кода $\mathcal{K}$ заключаем, что $p^{i_1-1}\alpha$ принадлежит $\mathcal{K}$ и $p^{i_1-1}\alpha$ — ненулевое слово, содержащее по крайней мере p нулей. Получаем противоречие. Таким образом, доказано, что $\Omega \cong \mathbf{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_p$. Будем считать, что

$$\Omega = (\mathbf{Z}_p)^{(t)}$$

есть пространство столбцов длины t над $\mathbf{Z}_p$.

Покажем, что $\mathcal{K}$ — циклический код. Пусть $\alpha \in \mathcal{K}$ — произвольное слово, отличное от константы. Ввиду рекурсивности кода $\mathcal{K}$ ему принадлежит также слово вида $(\alpha(2), \dots, \alpha(q-1), \beta)$, которое тоже не является константой (см. лемму 1). Следовательно,

$$\{\alpha(2), \dots, \alpha(q), \beta\} = \Omega = \{\alpha(1), \dots, \alpha(q)\},$$

то есть $\beta = \alpha(1)$.

Из свойства цикличности кода $\mathcal{K}$ и леммы 1 следует, что все последовательности $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$, не являющиеся константами, имеют период $T(u) = q$, и значит, $T(f) = q$.

Рассмотрим отображение $\pi_i: \Omega \rightarrow \mathbf{Z}_p$, ставящее в соответствие произвольному элементу $\omega = (\omega_1 \dots \omega_t)^T$ его i -ю координату: $\pi_i(\omega) = \omega_i$. Для каждой последовательности $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ обозначим через $\pi_i(u)$ последовательность над $\mathbf{Z}_p$, состоящую из i -х координат членов последовательности u :

$$\pi_i(u) = (\pi_i(u(0)), \pi_i(u(1)), \dots),$$

и обозначим через $L_i = \pi_i(\mathcal{R}_\Omega(f))$ множество всех таких различных последовательностей. Очевидно, что это множество замкнуто относительно операций сдвига и сложения последовательностей. Поэтому (см., например [4, 5]) $\pi_i(\mathcal{R}_\Omega(f))$ есть ЛРП-семейство над $\mathbf{Z}_p$, то есть существует унитарный многочлен $g_i(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$ такой, что $L_i = L_{\mathbf{Z}_p}(g_i(x))$ есть множество всех линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) с характеристическим многочленом $g_i(x)$. Наименьшее общее кратное периодов последовательностей из $L_{\mathbf{Z}_p}(g_i(x))$ равно периоду $T(g_i(x))$ многочлена $g_i(x)$, поэтому

$$[T(g_1(x)), \dots, T(g_t(x))] = T(f) = q. \quad (13)$$

Следовательно, для каждого $i = 1, \dots, t$ выполняется соотношение $T(g_i(x)) = p^{s_i}$, причем $1 \leq s_i \leq t$ и одно из чисел $s_1, \dots, s_t$ равно t .

Пусть $s_1 = t$. В таком случае (см., например [3, 8])

$$g_1(x) = (x - e)^r, \quad p^{t-1} < r \leq p^t, \quad (14)$$

и справедливо равенство

$$|L_1| = p^r. \quad (15)$$

Пусть $K_1 = L_1^{0, q-1}$ — множество всех начальных отрезков длины q линейных рекуррент из L_1 . Согласно (15) верно соотношение

$$|K_1| = p^r. \quad (16)$$

Отображение $\pi_1^n: \mathcal{K} \rightarrow K_1$, ставящее в соответствие каждому слову $\alpha \in \mathcal{K}$ слово

$$\pi_1^n(\alpha) = (\pi_1(\alpha(1)), \dots, \pi_1(\alpha(q))) \in K_1$$

есть, очевидно, эпиморфизм групп и потому

$$|\text{Ker } \pi_1^n| = \frac{|\mathcal{K}|}{|K_1|} = p^{2t-r}. \quad (17)$$

С другой стороны, $\text{Ker } \pi_1^n$ состоит из всех таких слов $\alpha \in \mathcal{K}$, у которых координаты удовлетворяют условию $\pi_1(\alpha(t)) = 0$, $t = 1, \dots, q$. Так как общее число элементов $a \in \Omega$ со свойством $\pi_1(a) = 0$ есть $p^{t-1} < q$, в каждом слове $\alpha \in \text{Ker } \pi_1^n$ есть одинаковые координаты и ввиду леммы 1 α — константа. Отсюда следует, что $|\text{Ker } \pi_1^n| = p^{t-1}$ и ввиду (14), (16), (17) выполняются соотношения $r = t + 1 > p^{t-1}$. Последнее неравенство возможно только если $p^t = 4$, но в этом случае равенство $l^{ir}(2, q) = q - 1$ отмечено в [3] и легко проверяется вручную.

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что если код является циклическим, то это — линейный рекурсивный код размерности 2 над группой $(F, +)$.

3. Доказательство теоремы 2

Ввиду (4), (6) остается рассмотреть лишь случай, когда $q = 2^t, t > 4$, что и предполагается далее. Ввиду (5) достаточно доказать, что не существует линейного рекурсивного $[q + 2, 3, q]$ -кода.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{K} - [q + k - 1, k, q]_q$ -код, тогда в коде $\mathcal{K}$ нет слов, содержащих ровно $k - 2$ нулей, то есть нет слов веса $q + 1$.

Доказательство. Пусть A_{n-i} — число слов линейного $[n, k, n - k + 1]$ -кода, имеющих ровно i нулевых координат. В [2] выведена формула

$$A_{n-i} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \binom{n}{m} (q^{k-m} - 1). \quad (18)$$

Отсюда при условии $n = q + k - 1$ следует равенство $A_{n-(k-2)} = 0$.

Для натуральных чисел $a_1, \dots, a_n$ будем обозначать $(a_1, \dots, a_n)$ их наибольший общий делитель, напомним, что $[a_1, \dots, a_n]$ обозначает наименьшее общее кратное этих чисел.

Лемма 3. Для любых натуральных n и m

$$(2^n - 1, 2^m + 1) = \frac{2^{(n, 2m)} - 1}{2^{(n, m)} - 1} \quad (19)$$

и $2^m + 1$ делит $2^n - 1$ тогда и только тогда, когда $2m$ делит n .

Доказательство. Известно, что для произвольных натуральных a и b справедливо равенство

$$(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a, b)} - 1.$$

При $a = n, b = 2m$

$$(2^n - 1, 2^{2m} - 1) = 2^{(n, 2m)} - 1.$$

Так как $(2^m - 1, 2^m + 1) = 1$, получаем цепочку равенств

$$(2^n - 1, 2^{2m} - 1) = (2^n - 1, 2^m + 1)(2^n - 1, 2^m - 1) = (2^n - 1, 2^m + 1)(2^{(n, m)} - 1).$$

Отсюда следует (19).

Докажем второе утверждение. Если $2^m + 1$ делит $2^n - 1$, то $(2^n - 1, 2^m + 1) = 2^m + 1$ и справедливо равенство $(n, 2m) = 2(n, m)$, так как иначе $(n, 2m) = (n, m)$ и правая часть равенства (19) равна 1. Таким образом n делится на $2(n, m)$ и ввиду (19)

$$2^m + 1 = (2^n - 1, 2^m + 1) = 2^{(n, m)} + 1.$$

Следовательно, $(n, m) = m$ и $2m$ делит n .

Обратно. Пусть $2m$ делит n . Тогда ввиду (19)

$$(2^n - 1, 2^m + 1) = \frac{2^{2m} - 1}{2^m - 1} = 2^m + 1,$$

то есть $2^m + 1$ делит $2^n - 1$.

Следствие 4. Условие $(2^n - 1, 2^m + 1) \neq 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $n/(n, m)$ — четное число, $m/(n, m)$ — нечетное число. Если выполняются два последних условия, то $(2^n - 1, 2^m + 1) = 2^{(n, m)} + 1$.

Доказательство. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 3, условие $(2^n - 1, 2^m + 1) \neq 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $(n, 2m) = 2(n, m)$. В этом случае $(n/(n, m), 2m/(n, m)) = 2$ и так как $n/(n, m)$ и $m/(n, m)$ — взаимно простые числа,

$$(n/(n, m), 2m/(n, m)) = (n/(n, m), 2) = 2,$$

то есть 2 делит $n/(n, m)$. Нечетность же числа $m/(n, m)$ следует из его взаимной простоты с $n/(n, m)$.

Следующий известный результат можно легко доказать методом математической индукции по параметру n .

Лемма 4. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — произвольные натуральные числа. Тогда справедлива формула

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 \dots a_n \prod_{r=2}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})^{(-1)^{r-1}}. \quad (20)$$

Лемма 5. Пусть t — целое число, большее 1 и не равное степени числа 2, и пусть $p_1, \dots, p_n$ — различные простые нечетные делители числа t . Тогда верно неравенство

$$[2^{t/p_1} + 1, \dots, 2^{t/p_n} + 1] < 2^t + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим число

$$C = \ln \frac{[2^{t/p_1} + 1, \dots, 2^{t/p_n} + 1]}{2^t + 1}.$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что $C < 0$. Положим $a_i = 2^{t/p_i} + 1$, $i = 1, \dots, n$. С помощью леммы 3 вычислим наименьшее общее кратное $[a_1, \dots, a_n]$. Для этого найдем сначала наибольшие общие делители $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$. Покажем, что $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) = \delta$, где $\delta = 2^{t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})} + 1$. Заметим, что δ делит a_{i_s} для любого $s = 1, \dots, r$, так как все $p_1, \dots, p_n$ — нечетные числа. Значит, δ делит $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$. С другой стороны, из леммы 3 следует, что $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ есть число вида $2^d + 1$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$, которое делит t/p_{i_s} для каждого $s = 1, \dots, r$, то есть делит $(t/p_{i_1}, \dots, t/p_{i_r})$. Так как $p_1, \dots, p_n$ — различные простые числа, $(t/p_{i_1}, \dots, t/p_{i_r}) = t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})$. Таким образом, d делит $t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})$ и $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ не больше δ , то есть $\delta = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$.

Теперь, применяя формулу (20) для $[a_1, \dots, a_n]$, находим, что

$$C = \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} \ln(1 + 2^{t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})}). \quad (21)$$

Рассмотрим число

$$D = \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} \ln 2^{t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})}. \quad (22)$$

Используя несложные преобразования, получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} D &= \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1} t}{p_{i_1} \dots p_{i_r}} \ln 2 \\ &= -\frac{t}{p_1 \dots p_n} \ln 2 \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{n-r} p_{i_1} \dots p_{i_r} \\ &= -\frac{t}{p_1 \dots p_n} (p_1 - 1) \dots (p_n - 1) \ln 2 < -2. \end{aligned}$$

Представляя C в виде (21), а D в виде (22), получим оценку

$$\begin{aligned} C - D &= \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} \ln(1 + 2^{-t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})}) \\ &< \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \ln(1 + 2^{-t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})}). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь тем, что для любого положительного $x \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $\ln(1 + x) < x$, получаем, что

$$C - D < \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} 2^{-t/(p_{i_1} \dots p_{i_r})} \leq \sum_{r=0}^t 2^{-r} < 2 < -D.$$

Таким образом $C < 0$.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существует линейный рекурсивный $[q + 2, 3, q]_q$ -код $\mathcal{K}$. Как уже отмечалось ранее, в этом случае $q = 2^t$. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, доказывается, что $\Omega \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_2$. Будем в дальнейшем считать, что $\Omega = (\mathbf{Z}_2)^{(t)}$ — пространство столбцов длины t над $\mathbf{Z}_2$. Тогда закон $f(x_1, x_2, x_3)$ рекурсии кода можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = A_0 x_1 + A_1 x_2 + A_2 x_3,$$

где A_i — обратимая $t \times t$ матрица над $\mathbf{Z}_2$ для $i = 0, 1, 2$.

Для любой последовательности u над Ω положим

$$u(i)^\downarrow = (u(i), u(i+1), u(i+2))^T.$$

Нетрудно заметить, что в таком случае любая последовательность $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ удовлетворяет равенствам

$$u(i)^\downarrow = S(f)^i u(0)^\downarrow, \quad i \in \mathbf{N}_0, \quad (23)$$

где $S(f)$ — сопровождающая матрица закона рекурсии

$$S(f) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \\ A_0 & A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

(здесь $E = E_{t \times t}$ — единичная $t \times t$ матрица).

Пусть $m_f(x) \in \mathbf{Z}_2[x]$ — минимальный многочлен матрицы $S(f)$. Тогда

$$\deg(m_f(x)) \leq \dim_{\mathbf{Z}_2} \Omega^3 = 3t$$

и несложно доказать, что мультипликативный порядок $S(f)$ в группе всех обратимых матриц размера $3t \times 3t$ совпадает с $T(f)$ и равен периоду $T(m_f(x))$ многочлена $m_f(x)$.

Лемма 6. Для любой последовательности $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ из условия $u(0) = 0$ следует, что $u(q+2) = 0$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ и $u(0) = 0$. Слово $(u(0), \dots, u(q+1))$ лежит в $\mathcal{K}$ и содержит по крайней мере один ноль. По лемме 2 код $\mathcal{K}$ не содержит ненулевых слов с одной нулевой координатой. Значит, существует $i \in \{1, \dots, q+1\}$ такое, что $u(i) = 0$. Единственность такого i следует из того, что $\mathcal{K}$ — МДР-код и потому он не содержит ненулевого слова веса меньшего q . Ввиду (11) слово $(u(1), \dots, u(q+2))$ также лежит в $\mathcal{K}$, но среди элементов $u(1), \dots, u(q+1)$ ровно один равен нулю. Значит, по лемме 2 $u(q+2) = 0$.

Лемма 7. Справедливо равенство

$$S(f)^{q+2} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}$$

где H — обратимая $t \times t$ матрица, перестановочная с матрицами A_0, A_1, A_2 .

Доказательство. Из (23) находим, что

$$u(q+2)^\perp = S(f)^{q+2}u(0)^\perp, \quad u(0)^\perp \in \Omega^{(3)}.$$

Следовательно, существует $t \times t$ матрицы B_1, B_2, B_3 над $\mathbf{Z}_2$ такие, что

$$u(q+2) = B_1u(0) + B_2u(1) + B_3u(2).$$

Очевидно, что если среди матриц B_2 и B_3 есть ненулевая, то при условии $u(0) = 0$ всегда можно подобрать значения $u(1)$ и $u(2)$, при которых $u(q+2) \neq 0$. Но согласно лемме 6 это невозможно. Значит, $B_2 = B_3 = 0$ и матрица $H = B_1$ удовлетворяет условию $u(q+2) = Hu(0)$. Так как $\mathcal{K}$ — рекурсивный код, очевидно, что $u(q+2+i) = Hu(i)$ для каждого $i \in \mathbf{N}_0$. Отсюда следует, в частности, что матрица $S(f)^{q+2}$ имеет указанный вид. Обратимость матрицы H следует из обратимости $S(f)$. Матрица $S(f)^{q+2}$ перестановочна с $S(f)$, поэтому H перестановочна с A_i для каждого $i = 0, 1, 2$.

Лемма 8. Для любого $i \geq q+2$ и для любой последовательности $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ справедливы импликации

$$u(i) = 0 \iff u(i - (q+2)) = 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 7 и равенства

$$u(i)^\perp = S(f)^{q+2}u(i - (q+2))^\perp,$$

вытекающего из (23).

Лемма 9. Матрица H из леммы 7 имеет неприводимый минимальный многочлен над $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Если минимальный многочлен матрицы H приводим, то он имеет собственный делитель $g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$. В таком случае $\text{Ker } g(H) = \Omega_1$ — собственное подпространство пространства Ω мощности $q_1 < q$. Из перестановочности H с A_0, A_1, A_2 следует, что если последовательность $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ удовлетворяет условию

$$u(0), u(1), u(2) \in \Omega_1,$$

то все ее члены также принадлежат Ω_1 . Таким образом подмножество $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ вида

$$\mathcal{K}_1 = \{\alpha \in \mathcal{K} : \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2) \in \Omega_1\}$$

есть линейный рекурсивный $[q+2, 3, q]$ -код в алфавите Ω_1 . Такого кода не существует, так как согласно (5)

$$l^r(3, q_1) \leq q_1 + 2 < q + 2.$$

Следовательно минимальный многочлен матрицы H неприводим.

Следствие 5. Пусть $T(H)$ — мультипликативный порядок матрицы H в группе обратимых $t \times t$ матриц. Тогда имеет место равенство

$$T(f) = (q + 2)T(H) \quad (24)$$

и $T(H)$ — нечетное число.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что $S(f)^{(q+2)T(H)} = E$ (здесь $E = E_{3t \times 3t}$ — единичная $3t \times 3t$ матрица), и так как $T(f) = T(S(f))$, то $T(f)$ делит $T(H)(q + 2)$. Для доказательства (24) теперь достаточно показать, что $T(H)(q + 2)$ делит $T(f)$. Рассмотрим произвольную ненулевую последовательность $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$, удовлетворяющую условию $u(0) = u(1) = 0$. Тогда $u(i(q + 2)) = u(i(q + 2) + 1) = 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}_0$ и других нулей в последовательности нет. Действительно, если $u(s) = 0$ для некоторого $s \in \mathbb{N}_0$, которое не сравнимо с 0 или 1 по модулю $q + 2$, то для подходящего $i \in \mathbb{N}_0$ выполняются неравенства

$$1 + i(q + 2) < s < (i + 1)(q + 2),$$

и коду $\mathcal{K}$ принадлежит ненулевое слово

$$(u(i(q + 2)), u(i(q + 2) + 1), \dots, u((i + 1)(q + 2) - 1)),$$

содержащее 3 нуля, что невозможно. Отсюда следует, что $(q + 2)$ делит $T(u)$, а значит, $(q + 2)$ делит $T(f)$. Пусть $T(f) = (q + 2)m_1$. Для произвольной ненулевой последовательности $u \in \mathcal{R}_\Omega(f)$ верны соотношения $u(T(f)) = u(0)$, так как $T(f)$ — период $\mathcal{R}_\Omega(f)$, и

$$u(T(f)) = u((q + 2)m_1) = H^{m_1}u(0).$$

Значит, m_1 делит $T(H)$ и потому $T(H)(q + 2)$ делит $T(f)$. Следовательно, верно (24). Так как минимальный многочлен матрицы H неприводим, из [3] следует, что $T(H)$ — нечетное число.

Лемма 10. Пусть $m_f(x) = g_1(x)^{d_1} \dots g_l(x)^{d_l}$ — каноническое разложение многочлена $m_f(x)$, в котором неприводимые многочлены имеют степени $n_1, \dots, n_l$ соответственно. Тогда $d_i \leq 2$, $i = 1, \dots, l$, и один из многочленов $g_1(x), \dots, g_l(x)$ имеет степень $2(t-1)$.

Доказательство. По следствию 5

$$T(m_f(x)) = T(f) = (q+2)T(H) = 2(2^{t-1}+1)T(H)$$

и $(2^{t-1}+1)T(H)$ — нечетное число. Следовательно (см., например, [3]), имеют место соотношения

$$\max\{d_1, \dots, d_l\} = 2, \quad T(g_1(x) \dots g_l(x)) = (2^{t-1}+1)T(H).$$

Так как $2^{t-1}+1$ делит $T(g_1(x) \dots g_l(x))$, верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} 2^{t-1}+1 &= (2^{t-1}+1, T(g_1(x) \dots g_l(x))) \\ &= (2^{t-1}+1, [T(g_1(x)), \dots, T(g_l(x))]) \\ &= [(2^{t-1}+1, T(g_1(x))), \dots, (2^{t-1}+1, T(g_l(x)))]. \end{aligned}$$

Так как $g_1(x), \dots, g_l(x)$ — неприводимые многочлены степеней соответственно $n_1, \dots, n_l$, то $T(g_i(x))$ делит $2^{n_i}-1$ для каждого $i = 1, \dots, l$. Теперь из предыдущих равенств следует, что $2^{t-1}+1$ делит число

$$[(2^{t-1}+1, 2^{n_1}-1), \dots, (2^{t-1}+1, 2^{n_l}-1)]. \quad (25)$$

По следствию 4 число $(2^{t-1}+1, 2^{n_i}-1)$ равно либо 1, либо $2^{m_i}+1$, где m_i делит $t-1$ и $(t-1)/m_i$ — нечетное число. Предположим, что каждый из полученных таким образом параметров m_i меньше $t-1$. Тогда нетрудно видеть, что число (25), а значит, и число $2^{t-1}+1$, делит $[2^{(t-1)/p_1}+1, \dots, 2^{(t-1)/p_s}+1]$, где $p_1, \dots, p_s$ — все различные простые нечетные делители $t-1$. Это противоречит лемме 4. Таким образом, можно считать, что $m_1 = t-1$, то есть

$$(2^{t-1}+1, 2^{n_1}-1) = 2^{t-1}+1.$$

В таком случае по следствию 4 $2(t-1)$ делит n_1 . Так как степень $m_f(x)$ не превосходит $3t$, очевидно, что n_1 строго меньше $3t$. Отсюда ввиду условия $t > 4$ следует, что $n_1 = 2(t-1)$.

Далее полагаем, что

$$\deg g_1(x) = 2(t-1)$$

и значит,

$$d_1 = 1.$$

На множестве последовательностей $\mathcal{R}_\Omega(f)$ определим отображение

$$\delta: \mathcal{R}_\Omega(f) \rightarrow \mathcal{R}_\Omega(f)$$

по правилу

$$\delta(u) = v,$$

где

$$v(i) = u(i + 1).$$

Нетрудно проверить, что δ — линейное преобразование $\mathbf{Z}_2$ -пространства $\mathcal{R}_\Omega(f)$, характеристический многочлен $\chi_\delta(x)$ и минимальный многочлен $m_\delta(x)$ которого совпадают с характеристическим и минимальным многочленами матрицы $S(f)$ соответственно. Известно, что если $g(x)$ — неприводимый делитель минимального многочлена $m_\delta(x)$ линейного преобразования δ , то его степень делит размерность $\dim \text{Ker } g(\delta)$ ядра преобразования $g(\delta)$. В частности, отсюда следует, что степень многочлена $g_1(x)$, равная $2(t - 1)$, делит $\dim \text{Ker } g_1(\delta)$, и так как $\dim \text{Ker } g_1(\delta) \leq \dim \mathcal{R}_\Omega(f) = 3t$, справедливо равенство

$$\dim \text{Ker } g_1(\delta) = 2(t - 1). \quad (26)$$

Из общих свойств линейных преобразований [4, 5] следует равенство

$$\mathcal{R}_\Omega(f) = \text{Ker } g_1(\delta)^{d_1} \dot{+} \dots \dot{+} \text{Ker } g_l(\delta)^{d_l}.$$

Отсюда, ввиду леммы 7 и равенства (3.7), следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Omega(f) &= \text{Ker } g_1(\delta) \dot{+} \text{Ker } (g_2(\delta) \dots g_l(\delta))^2, \\ \dim \text{Ker } (g_2(\delta) \dots g_l(\delta))^2 &= t + 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим мощность множества $\text{Ker } g_1(\delta) \dots g_l(\delta)$. Для этого выведем сначала некоторые соотношения. Для любого многочлена $g(x) \in \mathbf{Z}_2[x]$ соответствующее ему линейное преобразование $g(\delta)$ обладает очевидно следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{Ker } g(\delta) &\leq \text{Ker } g(\delta)^2, \\ g(\delta) \text{Ker } g(\delta)^2 &\leq \text{Ker } g(\delta). \end{aligned}$$

По теореме об эпиморфизме групп

$$\text{Ker } g(\delta)^2 / \text{Ker } g(\delta) \cong g(\delta) \text{Ker } g(\delta)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\text{Ker } g(\delta)^2 / \text{Ker } g(\delta)| &= \frac{|\text{Ker } g(\delta)^2|}{|\text{Ker } g(\delta)|} \\ &= |g(\delta) \text{Ker } g(\delta)^2| \\ &\leq |\text{Ker } g(\delta)|, \end{aligned}$$

и справедливо равенство

$$|\text{Ker } g(\delta)^2| \leq |\text{Ker } g(\delta)|^2. \quad (28)$$

Отсюда и из (27), в частности, следует неравенство

$$\dim \text{Ker } g_2(\delta) \dots g_l(\delta) \geq (t+2)/2,$$

и потому

$$\begin{aligned} |\text{Ker } g_1(\delta) \dots g_l(\delta)| &= |\text{Ker } g_1(\delta)| |\text{Ker } g_2(\delta) \dots g_l(\delta)| \\ &\geq 2^{(5t-2)/2} > 2^{2t}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что множество $\text{Ker } g_1(\delta) \dots g_l(\delta)$ содержит две различные последовательности, которые совпадают по первым двум членам. А это означает, что их сумма — некоторая ненулевая последовательность $u \in \text{Ker } g_1(\delta) \dots g_l(\delta)$ такая, что $u(0) = u(1) = 0$. Как уже отмечалось ранее,

$$T(g_1(x) \dots g_l(x)) = (2^{t-1} + 1)T(H) = \tau.$$

Так как $u \in \text{Ker } g_1(\delta) \dots g_l(\delta)$, то $T(u)$ делит τ , то есть

$$u(\tau) = u(0) = 0.$$

По следствию 5 $T(H)$ — нечетное число, значит,

$$\tau \equiv 2^{t-1} + 1 \pmod{q+2}$$

и ввиду леммы 8 из условия

$$u(\tau) = 0$$

следует, что

$$u(2^{t-1} + 1) = 0.$$

Таким образом, в ненулевом слове

$$(u(0), u(1), \dots, u(q+1)) \in \mathcal{K}$$

есть по крайней мере 3 нуля, то есть

$$d(\mathcal{K}) \leq q-1.$$

Следовательно, линейного рекурсивного $[q+2, 3, q]$ -кода не существует. Это завершает доказательство теоремы 2.

Докажем следствие 2. Линейный в широком смысле код $\mathcal{K}$, эквивалентный расширенному $[2^t + 2, 3, 2^t]$ -коду Рида-Соломона, является МДР-кодом. Если он при этом циклический, то $\mathcal{K}$ — линейный 3-рекурсивный МДР-код, что противоречит теореме 2. Отсутствие кода, линейно в широком смысле эквивалентного $[2^t + 2, 2^t - 1, 4]$ -коду, доказывается исходя из двойственности последнего к рассмотренному выше расширенному коду Рида-Соломона размерности 3.

Автор искренне признателен А. А. Нечаеву за постановку задачи, научное руководство работой и помощь в подготовке рукописи.

Список литературы

1. Мак Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
2. Heise W., Quattrocchi P., *Informations und Codierings Theorie*. Springer, Berlin, 1995.
3. Лиддл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*. Мир, Москва, 1988.
4. Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А., Рекурсивные МДР-коды и рекурсивно дифференцируемые квазигруппы. *Дискретная математика* (1998) **10**, №2, 3–29.
5. Couselo E., Gonzalez S., Markov V., and Nechaev A., Recursive MDS-codes. In: *Proc. WCC'99*. Paris, 1999, pp. 271–278.
6. Bush K. A., Orthogonal arrays of index unity. *Ann. Math. Statist.* (1952) **23**, 426–434.
7. Нечаев А. А., Кузьмин А. С., Марков В. Т., Линейные коды над конечными полями и модулями. *Фундаментальная и прикладная математика* (1996) **3**, №1, 195–254.
8. Kuzmin A. S., Kurakin V. L., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., Linear recurrences over rings and modules. *J. Math. Sci., Contemporary Math. Appl., Thematic Surveys*. 1994, v.10.

Статья поступила 12.10.1999.