Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, О моменте достижения максимума критическим ветвящимся процессом в случайной среде и останновленным случайным блужданием, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 31–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:16:25

УДК 519.2

О моменте достижения максимума критическим ветвящимся процессом в случайной среде и остановленным случайным блужданием

© 2000 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, T — момент вырождения $\{\xi_n\}$, T_M — момент первого достижения максимума $\{\xi_n\}$. Найдена асимптотика $\mathbf{P}(T_M > n)$ и доказаны предельные теоремы для случайных величин $\{T_M/n \mid T > n\}$ и $\{T_M/T \mid T > n\}$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогичные результаты установлены также для остановленного случайного блуждания с нулевым сносом.

1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде [1] с производящими функциями

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} s^i, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

где последовательности

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \dots\}$$

одинаково распределены и независимы при разных n , причем $\xi_0 = 1$. Положим

$$X = \ln f'_0(1), \quad \eta = f''_0(1)/(2f'_0(1)^2).$$

Помимо того, что процесс $\{\xi_n\}$ критический (а это означает, что $\mathbf{M}X = 0$), будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- (а) конечны $\mathbf{M}X^2$, $\mathbf{M}\eta$, $\mathbf{M}X\eta$, причем $\mathbf{M}X^2 = \sigma_1^2 > 0$;
- (б) производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны;
- (с) $\mathbf{M} \exp(-X) < \infty$.

Пусть $T = \inf\{n > 0: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения процесса $\{\xi_n\}$.

Рассмотрим теперь произвольное выходящее из нуля случайное блуждание $\{S_n\}$ с нулевым сносом, удовлетворяющее условию $\mathbf{M}S_1^2 = \sigma_2^2$, $0 < \sigma_2^2 < \infty$. Пусть

$\mathcal{T} = \inf\{n > 0: S_n \leq 0\}$ — момент первого достижения полуоси $(-\infty, 0]$. Введем остановленное случайное блуждание

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n, & n < \mathcal{T}; \\ 0, & n \geq \mathcal{T}. \end{cases}$$

Имеется много общего между предельными теоремами для критического ветвящегося процесса в случайной среде и для остановленного случайного блуждания с нулевым сносом. Так, например, в работе [2] рассматриваются моменты достижения фиксированного уровня

$$T_x = \inf\{n: \xi_n > x\}, \quad \mathcal{T}_x = \inf\{n: \tilde{S}_n > x\},$$

и показано (см. [2], теоремы 1 и 7), что при выполнении указанных ранее условий совпадают предельные распределения при $x \rightarrow \infty$ случайных величин

$$\left\{ \frac{\sigma_1^2 T_x}{\ln^2 x} \mid T_x < \infty \right\}, \quad \left\{ \frac{\sigma_2^2 \mathcal{T}_x}{x^2} \mid \mathcal{T}_x < \infty \right\}.$$

Точно так же совпадают (см. [2], теорема 2 и [3] теорема 1) предельные распределения случайных величин

$$\left\{ \frac{T_x}{T} \mid T_x < \infty \right\}, \quad \left\{ \frac{\mathcal{T}_x}{\mathcal{T}} \mid \mathcal{T}_x < \infty \right\}$$

и (см. [2], теорема 3 и [4])

$$\left\{ \frac{\sigma_1^2 T}{2 \ln^2 x} \mid T_x < \infty \right\}, \quad \left\{ \frac{\sigma_2^2 \mathcal{T}}{2x^2} \mid \mathcal{T}_x < \infty \right\}.$$

Причина такого рода совпадений раскрыта в работе [1]. Формально же это может быть объяснено следующими функциональными предельными теоремами, установленными в [2,5].

Пусть $W^+(t)$ — броуновская извилина при $t \in [0, 1]$, а при $t \geq 1$ стандартное броуновское движение, начинающееся из $W^+(1)$. Пусть

$$\tau = \inf\{t > 0: W^+(t) = 0\}$$

(заметим, что $\tau > 1$). Положим при $t \in [0, \infty)$

$$W_1^+(t) = W^+(t \wedge \tau), \quad W_2^+(t) = W^+(t\tau \wedge \tau).$$

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнены условия (а), (b), (с). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \frac{\ln(\xi_{[tT]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_1^+(t), W_2^+(t), t \in [0, \infty)\},$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 2. Пусть $\{S_n\}$ — случайное блуждание с нулевым сносом и $MS_1^2 = \sigma_2^2$, $0 < \sigma_2^2 < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}}, \frac{\tilde{S}_{[t\mathcal{T}]}}{\sigma_2 \sqrt{n}}, t \in [0, \infty) \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_1^+(t), W_2^+(t), t \in [0, \infty)\}.$$

Доказательство теоремы 1 содержится в работе [5] (см. теорему 4 и следующий после нее абзац). Доказательство теоремы 2 содержится в работе [2] (см. теорему 4 и доказательство теоремы 6). Значение теорем 1 и 2 состоит в том, что они позволяют изучать рассматриваемые процессы одновременно в двух временных шкалах: абсолютной и относительной (относительно времени жизни процесса).

В настоящей работе рассматриваются моменты первого достижения максимального значения

$$T_M = \inf \left\{ n: \xi_n = \max_{i \in \mathbb{N}_0} \xi_i \right\}, \quad \mathcal{T}_M = \inf \left\{ n: \tilde{S}_n = \max_{i \in \mathbb{N}_0} \tilde{S}_i \right\}.$$

В дальнейшем максимальное значение $\{\xi_i\}$ и $\{\tilde{S}_i\}$ будем обозначать M_ξ и M_S соответственно. Нашей целью является изучение на основе теорем 1 и 2 асимптотики при $n \rightarrow \infty$ вероятностей $\mathbf{P}(T_M > n)$ и $\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n)$ (см. теоремы 3, 4) и доказательство предельных теорем (см. следствия 1, 2 и теоремы 8, 9) для случайных величин

$$\{T_M/n \mid T > n\}, \quad \{\mathcal{T}_M/n \mid \mathcal{T} > n\}, \quad \{T_M/T \mid T > n\}, \quad \{\mathcal{T}_M/\mathcal{T} \mid \mathcal{T} > n\}.$$

2. Приступим к нахождению асимптотики вероятностей $\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n)$ и $\mathbf{P}(T_M > n)$. Известно (см. [7], гл.12), что в условиях теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\mathbf{P}(S_k > 0) - 1/2) \right\}. \quad (2)$$

В [8] установлено, что в условиях теоремы 1 (выполнения условия (с) можно не требовать) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от n .

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) \sim \frac{c_1 \ln 2}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 4. В условиях теоремы 1 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_M > n) \sim \frac{c_2 \ln 2}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство теоремы 3. Событие $\{\mathcal{T}_M > n\}$ влечет за собой событие $\{\mathcal{T} > n\}$, поэтому

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) = \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n, \mathcal{T} > n) = \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n \mid \mathcal{T} > n)\mathbf{P}(\mathcal{T} > n).$$

Далее, событие $\{\mathcal{T}_M > n\}$ означает, что $\max_{i \leq n} \tilde{S}_i < \max_{i \geq n} \tilde{S}_i$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > n)} &= \mathbf{P}\left(\max_{i \leq n} \tilde{S}_i < \max_{i \geq n} \tilde{S}_i \mid \mathcal{T} > n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} < \sup_{t \geq 1} \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} \mid \mathcal{T} > n\right). \end{aligned}$$

Последняя вероятность в силу теоремы 2 стремится при $n \rightarrow \infty$ к постоянной

$$c = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W^+(t) < \sup_{t \geq 1} W^+(t \wedge \tau)\right).$$

Здесь учтено, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W^+(t) = \sup_{t \geq 1} W^+(t \wedge \tau)\right) = 0,$$

поскольку броуновская извилина при $t \geq 1$ представляет собой стандартное броуновское движение, начинающееся из точки $W^+(1)$. Итак, установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) \sim c\mathbf{P}(\mathcal{T} > n). \quad (4)$$

Утверждение теоремы 3 следует из соотношений (1), (4) и нижеследующей леммы 1.

Замечание 1. Доказательство теоремы 4 осуществляется аналогично, исходя из теоремы 1 и соотношения (3).

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$c = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W^+(t) < \sup_{t \geq 1} W^+(t \wedge \tau)\right) = \ln 2.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что соотношение (4) справедливо для простого симметричного случайного блуждания. Найдем асимптотику $\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n)$ при $n \rightarrow \infty$ для этого блуждания, а затем из соотношений (1), (2), (4) вычислим c . Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{T}_M = n + m, S_{n+m} = N).$$

Событие $\{\mathcal{T}_M = n + m, S_{n+m} = N\}$ означает, что первый выход на границу отрезка $[0, N]$ произошел на $(n + m)$ -м шаге и в точке N , а затем первый выход на границу

отрезка $[0, N + 1]$ произошел в точке 0. Поэтому в силу классической формулы для вероятности разорения (см., например, [6], гл.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) &= \sum_{N=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \\ &\quad \times \sum_{1 \leq k < N/2} \cos^{n+m-2} \left(\frac{\pi k}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(N-1)k}{N} \right) \\ &= \sum_{N=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{1 \leq k < N/2} (-1)^{k+1} \cos^{n+m-2} \left(\frac{\pi k}{N} \right) \sin^2 \frac{\pi k}{N}, \end{aligned}$$

причем суммирование ведется по таким N, m , что $n + m = N \pmod{2}$. Будем предполагать, что n четно, тогда N и m имеют одинаковую четность. Осуществляя суммирование по m , получаем, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) = \sum_{N=3}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{1 \leq k < n/2} (-1)^{k+1} a_{k,N}(n), \quad (5)$$

где

$$a_{k,N}(n) = \begin{cases} \cos^n(\pi k/N), & \text{если } N \text{ четно;} \\ \cos^{n-1}(\pi k/N), & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (6)$$

Двойной ряд

$$\sum_{(N,k): N \geq 3, 1 \leq k < N/2} \frac{(-1)^{k+1} a_{k,N}(n)}{N(N+1)}$$

сходится по критерию Коши, поскольку при натуральных $N_1 < N_2, K_1 < K_2$

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{(N,k): N_1 \leq N \leq N_2, K_1 \leq k \leq K_2, k < N/2} \frac{(-1)^{k+1} a_{k,N}(n)}{N(N+1)} \right| \\ &\leq \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{1}{N(N+1)} \left| \sum_{k: K_1 \leq k \leq K_2, k < N/2} (-1)^{k+1} a_{k,N}(n) \right| \leq \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{1}{N(N+1)} \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $a_{k,N}(n) \in (0, 1)$ и убывает по k при $1 \leq k < N/2$). Если в правой части (5) поменять порядок суммирования, то получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N=2k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_{k,N}(n)}{N(N+1)},$$

причем внутренний ряд сходится при любом k . В силу сказанного формулу (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k(n), \quad (7)$$

где

$$b_k(n) = \sum_{N=2k+1}^{\infty} \frac{a_{k,N}(n)}{N(N+1)}. \quad (8)$$

Покажем, что при любом фиксированном $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_k(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}. \quad (9)$$

Разобьем область суммирования в (8) на части

$$D_i = \{N: \alpha_i \sqrt{n} < N \leq \alpha_{i+1} \sqrt{n}\}, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

где $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_j < \alpha_{j+1} = \infty$, $j \in \mathbf{N}$. Тогда

$$b_k(n) = \sum_{i=0}^j c_{i,k}(n), \quad (10)$$

где

$$c_{i,k}(n) = \sum_{N \in D_i, N > 2k} \frac{a_{k,N}(n)}{N(N+1)}.$$

Если $0 < i < j$, то в силу определения $a_{k,N}(n)$ (см. (6))

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2\alpha_i^2}\right) \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_{i+1}^2} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{i,k}(n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{i,k}(n) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2\alpha_{i+1}^2}\right) \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, подберем положительное a столь близко к нулю, чтобы выполнялось неравенство $\cos x \leq \exp(-x^2/2)$ при $x \in [0, a]$ (ясно, что $a < \pi/2$). Теперь разобьем $c_{0,k}(n)$ на две части при достаточно больших n :

$$c_{0,k}(n) = c_{0,k}^{(1)}(n) + c_{0,k}^{(2)}(n), \quad (12)$$

где

$$c_{0,k}^{(1)} = \sum_{2k < N \leq \pi k/a} \frac{a_{k,N}(n)}{N(N+1)}, \quad c_{0,k}^{(2)} = \sum_{\pi k/a < N \leq \alpha_1 \sqrt{n}} \frac{a_{k,N}(n)}{N(N+1)}.$$

При $2k < N \leq \pi k/a$ выполняются неравенства $\cos(\pi k/N) \leq \cos a < 1$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{0,k}^{(1)}(n) = 0. \quad (13)$$

При $\pi k/a < N \leq \alpha_1 \sqrt{n}$ выполняется неравенство

$$\cos(\pi k/N) \leq \exp(-\pi^2 k^2/(2N^2)),$$

поэтому

$$\begin{aligned} c_{0,k}^{(2)}(n) &\leq \sum_{\pi k/a < N \leq \alpha_1 \sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2N^2}(n-1)\right) N^{-2} \\ &\leq \int_{\pi k/a}^{\alpha_1 \sqrt{n}+1} x^{-2} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2x^2}(n-1)\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \int_{\sqrt{n-1}/(\alpha_1 \sqrt{n}+1)}^{a\sqrt{n-1}/(\pi k)} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 y^2}{2}\right) dy \end{aligned}$$

(второе неравенство выполняется при достаточно малых α_1 , и это следует из того, что функция $\exp(-b^2/x^2)/x^2$, где $b > 0$, возрастает при $x \in [0, b]$). Отсюда,

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{0,k}^{(2)}(n) = 0. \quad (14)$$

Из соотношений (12)–(14) вытекает, что

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{0,k}(n) = 0. \quad (15)$$

Наконец,

$$c_{j,k}(n) \leq \sum_{N > \alpha_j \sqrt{n}} \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{\alpha_j \sqrt{n}},$$

поэтому

$$\lim_{\alpha_j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_{j,k}(n) = 0. \quad (16)$$

Из соотношений (10), (11), (15), (16) получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_k(n) &= \int_0^\infty \alpha^{-2} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 u^2}{2}\right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}. \end{aligned}$$

Итак, соотношение (9) установлено.

Поскольку $b_k(n) > 0$ и убывает по k , справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k(n) \right| \leq b_l(n),$$

и поэтому (см. (9))

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{n} \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k(n) \right| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_l(n) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} = 0. \quad (17)$$

Из соотношений (7), (9), (17) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2\pi}}. \quad (18)$$

Для простого симметричного случайного блуждания (см. [7], гл.18)

$$\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\mathbf{P}(S_k > 0) - 1/2) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

поэтому ввиду соотношения (2)

$$c_1 = 1/\sqrt{2\pi}. \quad (19)$$

Сравнивая соотношения (4) и (18) с учетом (1) и (19), находим, что $c = \ln 2$.

Лемма 1 доказана.

3. Рассмотрим простое симметричное случайное блуждание $\{S_n\}$. В лемме 1 найдена асимптотика $\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n)$ при $n \rightarrow \infty$. Практически так же устанавливается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\{S_n\}$ — простое симметричное случайное блуждание, тогда при $y > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n, M_S > y\sqrt{n}) \sim \frac{F_1(y)}{\sqrt{2\pi n}},$$

где

$$F_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \Phi(\pi k/y) \quad (20)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du. \quad (21)$$

В этом разделе находится асимптотика при $n \rightarrow \infty$ вероятности

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > xn, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n})$$

при $x > 0, y > 0$. Сначала найдем асимптотику вероятности

$$P_n(x, y) = \mathbf{P}(xn < \mathcal{T}_M \leq n, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n})$$

при $x \in (0, 1), y > 0$. Очевидно, что

$$P_n(x, y) = \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \sum_{m=[xn]+1}^n \sum_{l=n-m+1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{T}_M = m, S_m = N, \mathcal{T} = m+l),$$

причем суммирование ведется по таким N, m, l , что $N = m = l \pmod{2}$. Событие

$$\{\mathcal{T}_M = m, S_m = N, \mathcal{T} = m+l\}$$

означает, что первый выход на границу отрезка $[0, N]$ произошел в точке N на m -м шаге, а затем первый выход на границу отрезка $[0, N+1]$ произошел в точке 0 на l -м шаге. В силу классической формулы для вероятности разорения

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M = m, S_m = N, \mathcal{T} = m+l) = p_1(m, N)p_2(l, N),$$

где

$$\begin{aligned}
 p_1(m, N) &= \sum_{1 \leq k < N/2} \frac{1}{N} \cos^{m-2} \left(\frac{\pi k}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{N} \right) \sin \left(\frac{\pi(N-1)k}{N} \right) \\
 &= \sum_{1 \leq k < N/2} \frac{(-1)^{k+1}}{N} \cos^{m-2} \left(\frac{\pi k}{N} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right), \\
 p_2(l, N) &= \sum_{1 \leq r < (N+1)/2} \frac{2}{N+1} \cos^{l-1} \left(\frac{\pi r}{N+1} \right) \sin \left(\frac{\pi r}{N+1} \right) \sin \left(\frac{\pi N r}{N+1} \right) \\
 &= \sum_{1 \leq r < (N+1)/2} \frac{(-1)^{r+1} 2}{N+1} \cos^{l-1} \left(\frac{\pi r}{N+1} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi r}{N+1} \right).
 \end{aligned}$$

Суммируя по l и m , находим, что

$$P_n(x, y) = \sum_{N=[\sqrt{y}]+1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{(k,r) \in G_N} (-1)^{k+r} A_{k,r,N}(n), \quad (22)$$

где

$$G_N = \{(k, r) : 1 \leq k < N/2, 1 \leq r < (N+1)/2\}$$

и при четных n , $[xn]$ и N

$$\begin{aligned}
 A_{k,r,N}(n) &= \frac{2(1-q_1^2)q_2}{(q_2^2-q_1^2)} \left(q_1^{[xn]} q_2^{n-[xn]} - q_1^n \right), \\
 q_1 &= \cos(\pi k/N), \quad q_2 = \cos(\pi r/(N+1))
 \end{aligned} \quad (23)$$

(аналогично находится выражение для $A_{k,r,N}(n)$ в остальных случаях).

Найдем оценку сверху для модуля выражения

$$S(N, K_1, K_2, R_1, R_2) = \sum (-1)^{k+r} A_{k,r,N}(n),$$

где суммирование ведется по области

$$\{(k, r) : K_1 \leq k \leq K_2, R_1 \leq r \leq R_2, k < N/2, r < (N+1)/2\}$$

где K_1, K_2, R_1, R_2 — натуральные числа, причем $K_1 < K_2, R_1 < R_2$. Очевидно, что при четных n , $[xn]$ и N

$$\begin{aligned}
 &S(N, K_1, K_2, R_1, R_2) \\
 &= \sum_{m=[xn]/2+1}^{n/2} \sum_{K_1 \leq k \leq K_2, k < N/2} (-1)^{k+1} (1-q_1^2) q_1^{2m-2} \sum_{R_1 \leq r \leq R_2, r < (N+1)/2} (-1)^{r+1} 2 q_2^{n-2m+1}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Заметим, что при $l > 0$ функция $(1-u^2)u^{2l}$ возрастает на $[0, \sqrt{l/(l+1)}]$ и убывает на $[\sqrt{l/(l+1)}, \infty)$, поэтому при $m \geq [xn]/2 + 1$

$$\left| \sum_{K_1 \leq k \leq K_2, k < N/2} (-1)^{k+1} (1-q_1^2) q_1^{2m-2} \right| \leq \left(1 - \frac{m-1}{m} \right) \left(\frac{m-1}{m} \right)^{m-1} \leq \frac{2}{xn}. \quad (25)$$

Далее, q_2 убывает по r при $1 \leq r < (N+1)/2$, поэтому при $m \leq n/2$

$$\left| \sum_{R_1 \leq r \leq R_2, r < (N+1)/2} (-1)^{r+1} 2q_2^{n-2m+1} \right| \leq 2 \left(\cos \frac{\pi R_1}{N+1} \right)^{n-2m}.$$

В силу сказанного, при $0 < \varepsilon < (1-x)/2$

$$\begin{aligned} |S(N, K_1, K_2, R_1, R_2)| &\leq \frac{4}{xn} \sum_{m=[xn]/2+1}^{n/2} \left(\cos \frac{\pi R_1}{N+1} \right)^{n-2m} \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{x} + \frac{4}{xn} \sum_{m=[xn]/2+1}^{n/2-[\varepsilon n]} \left(\cos \frac{\pi R_1}{N+1} \right)^{n-2m} \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{x} + \frac{2}{x} \left(\cos \frac{\pi R_1}{N+1} \right)^{2[\varepsilon n]}. \end{aligned} \quad (26)$$

Правая часть (24) не превосходит $2(2\varepsilon+1)/x$, отсюда по критерию Коши устанавливается сходимость ряда

$$\sum_{(N,k,r): N > y\sqrt{n}, (k,r) \in G_N} \frac{(-1)^{k+r}}{N(N+1)} A_{k,r,N}(n).$$

Меняя порядок суммирования в (21), получаем ряд

$$\sum_{(k,r): k,r \in \mathbf{N}} \sum_{N \in D_{k,r}} \frac{(-1)^{k+r}}{N(N+1)} A_{k,r,N}(n),$$

где

$$D_{k,r} = \{N: N > \max(y\sqrt{n}, 2k, 2r-1)\},$$

причем внутренний ряд сходится при любых k, r . Из сказанного следует законность перемены порядка суммирования, поэтому формулу (21) можно переписать в виде

$$P_n(x, y) = \sum_{(k,r): k,r \in \mathbf{N}} (-1)^{k+r} B_{k,r}(n), \quad (27)$$

где

$$B_{k,r}(n) = \sum_{N \in D_{k,r}} \frac{A_{k,r,N}(n)}{N(N+1)}. \quad (28)$$

Из соотношений (22), (26) находим (см. аналогичный вывод (9)), что при $k \neq r$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} B_{k,r}(n) &= \frac{2k^2}{k^2 - r^2} \int_y^\infty \left(\exp \left\{ -\frac{\pi^2(k^2x + r^2(1-x))}{2\alpha^2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\pi^2k^2}{2\alpha^2} \right\} \right) \frac{d\alpha}{d^2} \\ &= \frac{4k^2}{\sqrt{2\pi}(k^2 - r^2)} \left(\frac{\Phi(\pi\sqrt{k^2x + r^2(1-x)}/y)}{\sqrt{k^2x + r^2(1-x)}} - \frac{\Phi(\pi k/y)}{k} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

при $k = r$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} B_{k,r}(n) &= \pi^2 k^2 (1-x) \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{\pi^2 k^2}{2\alpha^2} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^4} = \frac{1-x}{\pi k} \int_0^{\pi k/y} u^2 e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{2(1-x)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Phi(\pi k/y)}{k} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2y} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 k^2}{2y^2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим теперь хвост ряда в правой части (25)

$$\sum_{(k,r): k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} B_{k,r}(n) = \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} S(N, K, \infty, R, \infty),$$

где $K, R \in \mathbb{N}$. В силу неравенства (24)

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{n} \sum_{(k,r): k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} B_{k,r}(n) \right| &\leq \frac{4\varepsilon \sqrt{n}}{x} \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{n}}{x} \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \left(\cos \frac{\pi R}{N+1} \right)^{2[\varepsilon n]}. \end{aligned}$$

Первая сумма в правой части не превосходит $4\varepsilon/(xy)$, а верхний предел при $n \rightarrow \infty$ второй суммы не превосходит (см. (9)) $1/(x\sqrt{\pi\varepsilon}R)$. Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{K, R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{n} \sum_{(k,r): k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} B_{k,r}(n) \right| \leq \frac{4\varepsilon}{xy},$$

а поскольку ε можно взять сколь угодно близко к нулю,

$$\overline{\lim}_{K, R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{n} \sum_{(k,r): k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} B_{k,r}(n) \right| = 0. \quad (31)$$

Из соотношений (25), (27)–(29) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(x, y) \sim \frac{F_2(x, y)}{\sqrt{2\pi n}},$$

где

$$F_2(x, y) = \sum_{(k,r): k, r \in \mathbb{N}} (-1)^{k+r} b_{k,r}, \quad (32)$$

причем при $k \neq r$

$$b_{k,r} = \frac{4k^2}{k^2 - r^2} \left(\frac{\Phi(\pi \sqrt{k^2 x + r^2(1-x)}/y)}{\sqrt{k^2 x + r^2(1-x)}} - \frac{\Phi(\pi k/y)}{k} \right),$$

а при $k = r$

$$b_{k,k} = \lim_{r \rightarrow k} b_{k,r} = 2(1-x) \left(\frac{\Phi(\pi k/y)}{k} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2y} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 k^2}{2y^2} \right\} \right).$$

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 3. Если $\{S_n\}$ — простое симметричное случайное блуждание, то при $x \in (0, 1)$, $y > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(xn < \mathcal{T}_M \leq n, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n}) \sim \frac{F_2(x, y)}{\sqrt{2\pi n}},$$

где $F_2(x, y)$ задается соотношением (30).

Из лемм 2 и 3 вытекает следующая лемма.

Лемма 4. Если $\{S_n\}$ — простое симметричное случайное блуждание, то при $x > 0$, $y > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > xn, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n}) \sim \frac{F_3(x, y)}{\sqrt{2\pi n}},$$

где

$$F_3(x, y) = \begin{cases} x^{-1/2} F_1(yx^{-1/2}), & x \geq 1, y > 0, \\ F_1(y) + F_2(x, y), & x \in (0, 1), y > 0 \end{cases} \quad (33)$$

(функции F_1 и F_2 определены в (20) и (30)).

Доказательство. При $x \geq 1$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_M > xn, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n}) = \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > xn, M_S > y\sqrt{n}),$$

и дальше используем лемму 2. При $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > xn, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n}) \\ &= \mathbf{P}(xn < \mathcal{T}_M \leq n, \mathcal{T} > n, M_S > y\sqrt{n}) + \mathbf{P}(\mathcal{T}_M > n, M_S > y\sqrt{n}), \end{aligned}$$

и дальше используем леммы 2 и 3. Лемма 4 доказана.

4. Функцию $F_3(x, y)$, заданную в области $\{(x, y): x, y \in (0, \infty)\}$ соотношением (31), доопределим по непрерывности на границе этой области, полагая

$$F_3(0, y) = \lim_{x \downarrow 0} F_3(x, y), \quad y > 0;$$

$$F_3(x, 0) = \lim_{y \downarrow 0} F_3(x, y), \quad x > 0;$$

$$F_3(0, 0) = 1.$$

В этом разделе устанавливаются следующие результаты.

Теорема 5. В условиях теоремы 1 для любых фиксированных $x, y \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{T_M}{n} > x, \frac{\ln(M_\xi + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} > y \mid T > n \right) = F_3(x, y).$$

Теорема 6. В условиях теоремы 2 для любых фиксированных $x, y \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{T}_M}{n} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{T} > n \right) = F_3(x, y).$$

Введем обозначения

$$\tau_M = \inf\{t \geq 0: W_1^+(t) = \sup_{s \geq 0} W_1^+(s)\}, \quad \mathbf{M}_{W_1^+} = \sup_{t \geq 0} W_1^+(t).$$

Теорема 7. При всех $x, y \in [0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\tau_M > x, \mathbf{M}_{W_1^+} > y) = F_3(x, y).$$

Доказательство теорем 6 и 7. Очевидно, что при $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{\mathcal{I}_M}{n} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{T} > n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq x} \tilde{S}_{[nt]} < \sup_{t \geq x} \tilde{S}_{[nt]}, \sup_{t \geq 0} \tilde{S}_{[nt]} / (\sigma_2 \sqrt{n}) > y \mid \mathcal{T} > n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq x} \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} < \sup_{t \geq x} \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}}, \sup_{t \geq 0} \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{T} > n\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Известно, что броуновская извилина $\{W^+(t), t \in [0, 1]\}$ является марковским процессом, причем при $x \in (0, 1)$ распределение случайного вектора $\{\sup_{t \leq x} W^+(t), W^+(x)\}$ абсолютно непрерывно (см. [9], теорема 2.5). Отсюда и из определения броуновской извилины при $t \geq 1$ следует, что при $x \in [0, \infty)$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \leq x} W_1^+(t) = \sup_{t \geq x} W_1^+(t)\right) = 0.$$

Из следствия 2.2 в [9] вытекает, что при $y \in [0, \infty)$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \geq 0} W_1^+(t) = y\right) = 0. \quad (35)$$

В силу сказанного, применяя к соотношению (32) теорему 2, находим, что при $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mathcal{I}_M}{n} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{T} > n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq x} W_1^+(t) < \sup_{t \geq x} W_1^+(t), \sup_{t \geq 0} W_1^+(t) > y\right) = \mathbf{P}(\tau_M > x, \mathbf{M}_{W_1^+} > y). \end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо и для простого симметричного случайного блуждания, поэтому в силу леммы 4 и соотношений (1), (19) получаем, что при $x, y \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\tau_M > x, \mathbf{M}_{W_1^+} > y) = F_3(x, y).$$

Осталось заметить, что левая часть этого соотношения непрерывна по y на полупрямой $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$, что следует из (33); непрерывность левой части по x на полупрямой $\{(x, y): x = 0, y > 0\}$ вытекает из того, что (см. лемму 3.7 в [10]) при всех $a > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbf{P}\left(\max_{t \leq \delta} W^+(t) > a\right) = 0.$$

Теоремы 6 и 7 доказаны.

Доказательство теоремы 5. Очевидно, что при $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{T_M}{n} > x, \frac{\ln(M_\xi + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} > y \mid T > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq x} \xi_{[nt]} < \sup_{t \geq x} \xi_{[nt]}, \ln \left(\sup_{t \geq 0} \xi_{[nt]} + 1 \right) / (\sigma_1 \sqrt{n}) > y \mid T > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq x} \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} < \sup_{t \geq x} \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \sup_{t \geq 0} \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} > y \mid T > n \right). \end{aligned}$$

Применяя теорему 1 и теорему 7, получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{T_M}{n} > x, \frac{\ln(M_\xi + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} > y \mid T > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq x} W_1^+(t) < \sup_{t \geq x} W_1^+(t), \sup_{t \geq 0} W_1^+(t) > y \right) = \mathbf{P}(\tau_M > x, \mathbf{M}_{W_1^+} > y) = F_3(x, y). \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

Положим $F_4(0) = 1$, $F_4(x) = \ln 2 / \sqrt{x}$ при $x \geq 1$ и при $x \in (0, 1)$

$$F_4(x) = \ln 2 + \sum_{k, r \in \mathbf{N}} (-1)^{k+r} \frac{2k}{\sqrt{k^2 x + r^2(1-x)} \left(k + \sqrt{k^2 x + r^2(1-x)} \right)}.$$

Следствие 1. В условиях теоремы 1 для любого фиксированного $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{T_M}{n} > x \mid T > n \right) = F_4(x).$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 для любого фиксированного $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{T}_M}{n} > x \mid \mathcal{T} > n \right) = F_4(x).$$

Следствие 3. Для любого фиксированного $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(\tau_M > x) = F_4(x).$$

Для доказательства этих следствий достаточно установить, что при $x > 0$

$$\lim_{y \downarrow 0} F_3(x, y) = F_4(x).$$

А для этого, в свою очередь, достаточно показать (см. (20), (30), (31)), что равномерно по $y \in (0, 1]$ сходятся ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \left(\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{\pi k}{y} \right) \right), \\ & \sum_{k, r \in \mathbf{N}} (-1)^{k+r} \frac{4k^2}{k^2 - r^2} \left(\frac{1/2 - \Phi(\pi \sqrt{k^2 x + r^2(1-x)}/y)}{\sqrt{k^2 x + r^2(1-x)}} - \frac{1/2 - \Phi(\pi k/y)}{k} \right), \end{aligned}$$

причем в последнем ряду при $k = r$ слагаемое полагается равным

$$2(1-x) \left(\frac{1/2 - \Phi(\pi k/y)}{k} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2y} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{2y^2}\right) \right).$$

Но последнее утверждение следует из неравенства (см. [6], гл.7)

$$\frac{1}{2} - \Phi(z) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-z^2/2}, \quad z > 0.$$

5. В заключение изучим асимптотику при $n \rightarrow \infty$ распределения отношения времен T_M и T для критического ветвящегося процесса в случайной среде при условии $\{T > n\}$ и $\mathcal{T}_M$ и $\mathcal{T}$ для остановленного случайного блуждания с нулевым сносом при условии $\{\mathcal{T} > n\}$. Положим $F_5(0) = 1$, $F_5(x) = 0$ при $x \geq 1$ и при $x \in (0, 1)$

$$F_5(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k,r \in \mathbb{N}} (-1)^{k+r} \frac{4k^2 r^2}{k^2 - r^2} \left(\frac{1}{(k^2 x + r^2(1-x))^{3/2}} - \frac{2^{3/2}}{(k^2 + r^2)^{3/2}} \right),$$

причем при $k = r$ слагаемое полагается равным $3(1-2x)/k$.

Теорема 8. В условиях теоремы 1 для любого фиксированного $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{T_M}{T} > x \mid T > n \right) = F_5(x).$$

Теорема 9. В условиях теоремы 2 для любого фиксированного $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{T}_M}{\mathcal{T}} > x \mid \mathcal{T} > n \right) = F_5(x).$$

Пусть $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$ — броуновская экскурсия. Введем обозначения

$$\tau_M^0 = \inf\{t \geq 0: W_0^+(t) = \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)\}, \quad \mathbf{M}_{W_0^+} = \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t).$$

Теорема 10. Для любого $x \in [0, 1]$

$$\mathbf{P}(\tau_M^0 > x) = F_5(x).$$

Для доказательства теоремы 10 нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Теорема 11. Пусть $\{S_n\}$ — случайное блуждание с нулевым сносом. Пусть выполнено двустороннее условие Крамера: при некотором положительном b

$$\mathbf{M} \exp\{tS_1\} < \infty$$

при всех $t \in [-b, b]$. Наконец, либо функция распределения S_1 имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту, либо S_1 является решетчатой случайной величиной с атомом в нуле. Тогда для любых фиксированных $x, y \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{T}_M}{\mathcal{T}} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{T} = n \right) = \mathbf{P}(\tau_M^0 > x, M_{W_0^+} > y),$$

где $\sigma_2^2 = \mathbf{M}S_1^2$.

Доказательство. Очевидно, что при $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{I}_M}{\mathcal{I}} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{I} = n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} S_{[nt]} < \sup_{t \in [x, 1]} S_{[nt]}, \sup_{t \in [0, 1]} S_{[nt]} / (\sigma_2 \sqrt{n}) > y \mid \mathcal{I} = n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} \frac{S_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} < \sup_{t \in [x, 1]} \frac{S_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}}, \sup_{t \in [0, 1]} \frac{S_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{I} = n \right). \end{aligned}$$

В [12] показано, что в условиях доказываемой теоремы

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma_2 \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid \mathcal{I} = n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (36)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода. Из этих соотношений следует, что при $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{I}_M}{\mathcal{I}} > x, \frac{M_S}{\sigma_2 \sqrt{n}} > y \mid \mathcal{I} = n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} W_0^+(t) < \sup_{t \in [x, 1]} W_0^+(t), \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) > y \right) = \mathbf{P} \left(\tau_M^0 > x, M_{W_0^+} > y \right). \end{aligned}$$

При выводе учитывалось, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} W_0^+(t) = \sup_{t \in [x, 1]} W_0^+(t) \right) = 0. \quad (37)$$

Это объясняется тем, что броуновская экскурсия является марковским процессом и распределение случайного вектора $\{\sup_{t \in [0, x]} W_0^+(t), W_0^+(x)\}$ абсолютно непрерывно (см. [9], теорема 3.3). Теорема 11 доказана.

Следствие 4. Для простого симметричного случайного блуждания $\{S_n\}$ при любых фиксированных $0 < x_1 < x_2 < 1, y \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(x_1 < \frac{\mathcal{I}_M}{\mathcal{I}} \leq x_2, \frac{M_S}{\sqrt{n}} > y \mid \mathcal{I} > n \right) = \mathbf{P} \left(x_1 < \tau_M^0 \leq x_2, M_{W_0^+} > y \right).$$

Доказательство. Если простое симметричное случайное блуждание рассматривать лишь в четные моменты времени, то получим случайное блуждание, удовлетворяющее условиям теоремы 11. Отсюда нетрудно показать, что соотношение (34), а следовательно, и теорема 11 выполняются для простого симметричного случайного блуждания. Следствие 4 доказано.

Лемма 5. Пусть $\{S_n\}$ — простое симметричное случайное блуждание. Тогда для любых фиксированных $0 < x_1 < x_2 < 1, y \in (0, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(x_1 n < \mathcal{I}_M \leq x_2 n, M_S > y \sqrt{n}, \mathcal{I} = n) \sim \frac{F_6(x_1, x_2, y)}{n^{3/2}},$$

где

$$F_6(x_1, x_2, y) = \sum_{k, r \in \mathbb{N}} (-1)^{k+r} \tilde{b}_{k, r}, \quad (38)$$

причем при $k \neq r$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{k, r} = & \frac{2\pi^2 k^2 r^2}{k^2 - r^2} \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{\pi^2 (k^2 x_1 + r^2 (1 - x_1))}{2\alpha^2} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^4} \\ & - \frac{2\pi^2 k^2 r^2}{k^2 - r^2} \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{\pi^2 (k^2 x_2 + r^2 (1 - x_2))}{2\alpha^2} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^4}, \end{aligned}$$

а при $k = r$

$$\tilde{b}_{k, k} = \lim_{r \rightarrow k} \tilde{b}_{k, r} = \pi^4 (x_2 - x_1) k^4 \int_y^\infty \exp \left\{ -\frac{\pi^2 k^2}{2\alpha^2} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha^6}.$$

Доказательство. Положим

$$P_n(x_1, x_2, y) = \mathbf{P}(x_1 n < \mathcal{T}_M \leq x_2 n, M_S > y\sqrt{n}, \mathcal{T} = n).$$

Очевидно, что

$$P_n(x_1, x_2, y) = \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \sum_{m=[x_1 n]+1}^{[x_2 n]} \mathbf{P}(\mathcal{T}_M = m, S_m = N, \mathcal{T} = n),$$

где суммирование ведется по N, m одинаковой четности. Отсюда следует (см. начало раздела 3), что

$$P_n(x_1, x_2, y) = \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \sum_{m=[x_1 n]+1}^{[x_2 n]} p_1(m, N) p_2(n - m, N),$$

где

$$\begin{aligned} p_1(m, N) &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k < N/2} (-1)^{k+1} q_1^{m-2} (1 - q_1^2), \\ p_2(n - m, N) &= \frac{2}{N+1} \sum_{1 \leq r < (N+1)/2} (-1)^{r+1} q_2^{n-m-1} (1 - q_2^2), \end{aligned}$$

причем $q_1 = \cos(\pi k/N)$, $q_2 = \cos(\pi r/(N+1))$. Суммируя по m получаем, что

$$P_n(x_1, x_2, y) = \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{1}{N(N+1)} \sum_{(k, r) \in G_N} (-1)^{k+r} \tilde{A}_{k, r, N}(n), \quad (39)$$

где $G_N = \{(k, r): 1 \leq k < N/2, 1 \leq r < (N+1)/2\}$ и, например, при четных $[x_1 n]$, $[x_2 n]$ и N

$$\tilde{A}_{k, r, N}(n) = \frac{2(1 - q_1^2)(1 - q_2^2)}{q_2^2 - q_1^2} (q_1^{[x_1 n]} q_2^{n-[x_1 n]-1} - q_1^{[x_2 n]} q_2^{n-[x_2 n]-1}).$$

Поменяв порядок суммирования в (37) (обоснование законности этого легко вытекает из последующих рассуждений), находим, что

$$P_n(x_1, x_2, y) = \sum_{(k,r): k,r \in \mathbb{N}} (-1)^{k+r} \tilde{B}_{k,r}(n), \quad (40)$$

где

$$\tilde{B}_{k,r}(n) = \sum_{N \in D_{k,r}} \frac{\tilde{A}_{k,r,N}(n)}{N(N+1)}, \quad D_{k,r} = \{N: N > \max(y\sqrt{n}, 2k, 2r-1)\}.$$

Так же, как соотношение (9), устанавливается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \tilde{B}_{k,r}(n) = \tilde{b}_{k,r}. \quad (41)$$

Покажем теперь, что

$$\overline{\lim}_{K,R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| n^{3/2} \sum_{k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} \tilde{B}_{k,r}(n) \right| = 0. \quad (42)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k \geq K, r \geq R} (-1)^{k+r} \tilde{B}_{k,r}(n) = \Sigma_1,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{2}{N(N+1)} \Sigma_2, \quad \Sigma_2 = \sum_{m=[x_1 n]+1}^{[x_2 n]} \sum_{K \leq k < N/2} (-1)^{k+1} (1 - q_1^2) q_1^{m-2} \Sigma_3, \\ \Sigma_3 &= \sum_{R \leq r < (N+1)/2} (-1)^{r+1} (1 - q_2^2) q_2^{n-m-1}, \end{aligned}$$

и суммирование ведется лишь по таким m , что $m \equiv N \pmod{2}$. Разобьем сумму Σ_1 в правой части на две суммы: Σ_{11} , где суммирование по N ведется от $[y\sqrt{n}] + 1$ до $[A\sqrt{n}]$ ($A > y$), и Σ_{12} , где суммирование по N ведется от $[A\sqrt{n}] + 1$ до ∞ . В силу неравенства (23)

$$|\Sigma_{12}| \leq \sum_{N=[A\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{2}{N(N+1)} \sum_{m=[x_1 n]+1}^{[x_2 n]} \frac{4}{x_1(1-x_2)n^2} \leq \frac{4}{x_1(1-x_2)An^{3/2}}$$

(напомним, что $m \equiv N \pmod{2}$), поэтому

$$\overline{\lim}_{A \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} |\Sigma_{12}| = 0. \quad (43)$$

Далее, нетрудно заметить, что при $x_1 n < m \leq x_2 n$ и $y\sqrt{n} < N \leq A\sqrt{n}$

$$(1 - q_1^2) q_1^{m-2} \leq \frac{ak^2}{n} \exp\{-bk^2\}, \quad (1 - q_2^2) q_2^{n-m-1} \leq \frac{ak^2}{n} \exp\{-bk^2\},$$

где a, b положительны и не зависят от k, r, N, n . Отсюда следует, что

$$|\Sigma_{11}| \leq a^2 \sum_{k \geq K} k^2 e^{-bk^2} \sum_{r \geq R} r^2 e^{-br^2} \frac{1}{n} \sum_{N=[y\sqrt{n}]+1}^{[A\sqrt{n}]} \frac{1}{N(N+1)},$$

поэтому при любом фиксированном $A > y$

$$\lim_{K, R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} |\Sigma_{11}| = 0. \quad (44)$$

Из соотношений (41), (42) вытекает (40), а из соотношений (38)–(40) получаем утверждение леммы 5.

Доказательство теоремы 10. Известно [13], что в условиях теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} = n) \sim \frac{c_1}{2n^{3/2}},$$

где постоянная c_1 та же, что в соотношении (1), причем для простого симметричного случайного блуждания $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ (см. (19)). Поэтому в силу следствия 4 и леммы 5 при $0 < x_1 < x_2 < 1$ и $y \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}(x_1 < \tau_M^0 \leq x_2, M_{W_0^+} > y) = 2\sqrt{2\pi} F_6(x_1, x_2, y).$$

Отсюда ввиду того, что $\max_{t \in [0,1]} W_0^+(t)$ положителен с вероятностью 1, следует, что при $0 < x_1 < x_2 < 1$

$$\mathbf{P}(x_1 < \tau_M^0 \leq x_2) = 2\sqrt{2\pi} \lim_{y \downarrow 0} F_6(x_1, x_2, y).$$

Поскольку ряд в правой части (36) сходится равномерно по $y \in (0, 1]$ (см. окончание раздела 4), из последнего соотношения вытекает, что при $0 < x_1 < x_2 < 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(x_1 < \tau_M^0 \leq x_2) \\ &= \sum_{k, r \in \mathbf{N}} (-1)^{k+r} \frac{4k^2 r^2}{k^2 - r^2} \left(\frac{1}{(k^2 x_1 + r^2(1-x_1))^{3/2}} - \frac{1}{(k^2 x_2 + r^2(1-x_2))^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

причем при $k = r$ слагаемое принимается равным $6(x_2 - x_1)/k$. В силу соображений симметрии

$$\mathbf{P}(\tau_M^0 > 1/2) = \frac{1}{2}. \quad (46)$$

Из соотношений (43), (44) следует утверждение теоремы 10.

Доказательство теоремы 8. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_M > xT \mid T > n) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} \xi_{[tT]} < \sup_{t \in [x, 1]} \xi_{[tT]} \mid T > n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} \frac{\ln(\xi_{[tT]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} < \sup_{t \in [x, 1]} \frac{\ln(\xi_{[tT]} + 1)}{\sigma_1 \sqrt{n}} \mid T > n \right). \end{aligned} \quad (47)$$

В теореме 4 статьи [11] установлено, что совпадают распределения процессов $\{W^+(t\tau), t \in [0, 1]\}$ и $\{W_0^+(t)/\alpha, t \in [0, 1]\}$, где α — случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$ и не зависящая от процесса $\{W_0^+(t), t \in [0, 1]\}$. При выводе (45) учитывалось, что (см. (35))

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} W^+(t\tau) = \sup_{t \in [x, 1]} W^+(t\tau) \right) = \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} W_0^+(t) = \sup_{t \in [x, 1]} W_0^+(t) \right) = 0.$$

В силу сказанного и теоремы 10 правая часть соотношения (45) равна

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, x]} W_0^+(t) < \sup_{t \in [x, 1]} W_0^+(t) \right) = \mathbf{P}(\tau_M^0 > x) = F_5(x).$$

Теорема 8 доказана.

Замечание 2. Доказательство теоремы 9 осуществляется аналогично, исходя из теоремы 2.

Список литературы

1. Афанасьев В. И., Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 52–67.
2. Афанасьев В. И., О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. *Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 33–47.
3. Афанасьев В. И., О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. *Теория вероятностей и ее применения* (1986) **31**, №4, 773–777.
4. Doney R., A note on conditioned random walk. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №2, 409–412.
5. Афанасьев В. И., О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1999) **11**, №, 86–102.
6. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Мир, Москва, 1984.
7. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1984.
8. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
9. Durrett R. T., Iglehart D. L., Functionals of brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 130–135.
10. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 117–129.
11. Hooghiemstra G. Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the $M/G/1$ queue. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №3, 675–688.
12. Афанасьев В. И., Условное случайное блуждание с отрицательным сносом. *Теория вероятностей и ее применения* (1979) **24**, №1, 191–198.
13. Эппель М. С., Локальная предельная теорема для момента первого перескока. *Сибирский матем. ж.* (1979) **20**, №1, 181–191.

Статья поступила 23.12.1998.