Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Д. П. Подкопаев, О радиусе устойчивости векторной задачи линейного булева программирования, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 25–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:10:36

УДК 519.10

О радиусе устойчивости векторной задачи линейного булева программирования

© 2000 г. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Д. П. Подкопаев

Рассматривается многокритериальная задача булева программирования с линейными частными критериями. Найдены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости множества Парето в случае, когда независимым возмущениям подвергаются одновременно и коэффициенты векторного критерия и элементы матрицы ограничений.

Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф 97-266).

Под устойчивостью векторной задачи дискретной оптимизации обычно (см., например, [1–4]) понимают свойство непоявления новых паретовских оптимумов при любых изменениях параметров задачи в пределах “малой” окрестности исходных данных. Тем самым, устойчивость является дискретным аналогом классического свойства полунепрерывности сверху в смысле Хаусдорфа точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие множество Парето.

Хорошо известны [1, 2] необходимые и достаточные условия устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае, когда возмущению подвергаются одновременно и коэффициенты векторного критерия, и элементы матрицы ограничений. В настоящей заметке найдены количественные оценки устойчивости векторной линейной задачи булева программирования при том же характере возмущений всех параметров задачи. Ранее в [5] была выведена формула радиуса устойчивости фиксированного паретовского оптимума векторной задачи булева программирования, а в [6] — формула радиуса устойчивости единственного оптимума скалярной (однокритериальной) задачи булева программирования.

Будем в основном придерживаться обозначений, а по возможности и терминологии работ [5, 6].

Пусть $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{k \times n}$, $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, $k \geq 1$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $\mathbf{E}^n$ — множество вершин единичного n -мерного куба ($\mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$).

Рассмотрим k -критериальную (векторную) задачу булева программирования

$$Cx \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\forall i \in N_m \ (A_i x \leq b_i), \ x \in \mathbf{E}^n, \quad (2)$$

состоящую в поиске множества Парето.

Здесь $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ и в дальнейшем нижний индекс i у матрицы (вектора) будет указывать на i -ю строку (компоненту) соответствующей матрицы (соответствующего вектора).

Условимся для двух векторов $u, v \in \mathbf{R}^k$ считать

$$u \leq v \iff u_i \leq v_i, \quad i \in N_k,$$

$$u < v \iff u_i < v_i, \quad i \in N_k.$$

Будем говорить, что вектор u доминирует вектор v , если $u \geq v$ и $u \neq v$.

Пусть X — непустое множество всех точек, удовлетворяющих системе (2), т.е. множество (допустимых) решений задачи (1)–(2). Под паретовским оптимумом задачи (1)–(2), как обычно, будем понимать элемент множества Парето

$$P = \{x \in X : p(x) = \emptyset\},$$

где

$$p(x) = \{x' \in X : C(x - x') \leq 0, \quad C(x - x') \neq 0\},$$

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^k.$$

Другими словами, точка $x \in X$ является паретовским оптимумом задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда для всякой точки $x' \in X$ вектор Cx' не доминирует вектор Cx .

Очевидно, что $P \neq \emptyset$ ввиду предположения $X \neq \emptyset$. В случае, когда $k = 1$, множество Парето превращается в множество оптимальных решений, а наша задача — в обычную скалярную задачу булева программирования.

“Возмущенной” задачей будем называть следующую векторную задачу поиска множества Парето:

$$(C + C')x \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\forall i \in N_m \quad ((A_i + A'_i)x \leq b_i + b'_i), \quad x \in \mathbf{E}^n. \quad (4)$$

Расстояние между задачами (1)–(2) и (3)–(4) определим числом

$$\max\{\|C'\|, \|A'\|, \|b'\|\},$$

где A' — матрица со строками A'_i , $i \in N_m$, $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$, $\|\cdot\|$ — чебышевская норма (l_∞) в соответствующем пространстве. Через $\|\cdot\|^*$ будем, как обычно, обозначать норму в сопряженном пространстве (l_1).

По аналогии с [5, 6] радиусом устойчивости k -критериальной задачи (1)–(2) назовем инфимум расстояний от этой задачи до задач вида (3)–(4), каждая из которых или не имеет решений, или имеет хотя бы один паретовский оптимум, не являющийся паретовским оптимумом задачи (1)–(2).

Радиус устойчивости задачи (1)–(2) будем обозначать через $\rho^k(A, b, C)$ или просто ρ .

В дальнейшем число $\max\{\|A'\|, \|b'\|\}$ будем считать расстоянием между системами (2) и (4).

Точку $x^0 \in X$ назовем ε -устойчивым решением системы (2), если x^0 — решение любой системы (4), находящейся от (2) на расстоянии, не превосходящем ε .

Пусть

$$\beta(x) = \max \left\{ \frac{A_i x - b_i}{\|x\|^* + 1} : i \in N_m \right\}.$$

Нам понадобятся следующие две леммы, доказанные в [6].

Лемма 1 ([6]). Точка $x^0 \in X$ является ε -устойчивым решением системы (2) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\varepsilon \leq -\beta(x^0).$$

Пусть $x \in \mathbf{E}^n \setminus X$. Обозначим через $\beta'(x)$ расстояние от системы (2) до ближайшей из систем (4), имеющих точку x в качестве решения.

Лемма 2 ([6]). Для всякой точки $x \in \mathbf{E}^n \setminus X$ справедливо равенство

$$\beta(x) = \beta'(x).$$

Далее положим

$$\begin{aligned}\varphi^k(A, b, C) &= \min_{x \in \bar{P}} \max_{x' \in \{x\}} \min\{\alpha(x', x), -\beta(x')\}, \\ \psi^k(A, b, C) &= \min_{x \in \bar{P}} \max_{x' \in \{x\}} \max\{\alpha(x', x), \beta(x)\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{\{x\}} &= \mathbf{E}^n \setminus \{x\}, \\ \alpha(x', x) &= \min \left\{ \frac{C_i(x' - x)}{\|x' - x\|^*} : i \in N_k \right\}.\end{aligned}$$

Задачу (1)–(2) будем называть нетривиальной, если

$$\bar{P} = \mathbf{E}^n \setminus P \neq \emptyset.$$

Замечание 1. Очевидно, что в случае $\bar{P} = \emptyset$ радиус устойчивости задачи (1)–(2) равен инфимуму расстояний от этой задачи до задач вида (3)–(4), не имеющих решений.

Теорема 1. Для радиуса устойчивости нетривиальной k -критериальной ($k \geq 1$) задачи булева программирования (1)–(2) справедливы оценки

$$\varphi^k(A, b, C) \leq \rho^k(A, b, C) \leq \psi^k(A, b, C).$$

Доказательство. Сначала докажем правое из этих неравенств. Легко видеть, что для этого достаточно доказать справедливость неравенства

$$\rho \leq \max \left\{ \max_{x' \in \{x\}} \alpha(x', x), \beta(x) \right\}$$

для любой точки $x \in \bar{P}$.

Пусть $x \in \bar{P}$, $\psi(x)$ — правая часть последнего неравенства. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $x \in X$. Тогда $\beta(x) \leq 0$. Поэтому

$$\psi(x) = \max\{\alpha(x', x) : x' \in \overline{\{x\}}\} \geq 0.$$

Рассмотрим возмущенную задачу (3)–(4), для которой $A' = [0]_{m \times n}$, $b' = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^m$, $C' = [c'_{ij}]_{k \times n}$ — матрица, элементы которой для любой пары $(i, j) \in N_k \times N_n$ задаются формулой

$$c'_{ij} = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } x_j = 1, \\ -\varepsilon, & \text{если } x_j = 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon > \psi(x)$.

Тем самым, расстояние между исходной и возмущенной задачами равно ε . Осталось показать, что точка x — паретовский оптимум нашей возмущенной задачи.

Полагая $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{E}^k$, для любой точки $x' \in \{x\}$ легко выводим

$$\begin{aligned} (C + C')(x - x') &= C(x - x') + \varepsilon \|x - x'\|^* e \\ &> C(x - x') + \psi(x) \|x - x'\|^* e \\ &\geq C(x - x') + \alpha(x', x) \|x - x'\|^* e \\ &= C(x - x') + e \min\{C_i(x' - x) : i \in N_k\} \\ &= C(x - x') - e \max\{C_i(x - x') : i \in N_k\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что вектор, стоящий в правой части этих соотношений, имеет хотя бы одну нулевую координату. Поэтому ни при какой точке $x' \in X$ вектор $(C + C')x'$ не доминирует вектор $(C + C')x$. Следовательно, точка x — паретовский оптимум нашей возмущенной задачи.

Случай 2: $x \in \mathbf{E}^n \setminus X$. Построим новую возмущенную задачу, выбрав матрицу A' и вектор b' так, чтобы точка x была решением системы (4), а расстояние от этой системы до системы (2) было равно $\beta(x)$. Согласно лемме 2 это возможно. Далее матрицу C' зададим такой же, как и в случае 1. Тем самым, расстояние между исходной и возмущенной задачами также равно числу $\varepsilon > \psi(x)$ (ввиду $\beta(x) \leq \psi(x)$).

Теперь, повторяя рассуждения предыдущего случая, вновь убеждаемся, что точка x — паретовский оптимум построенной возмущенной задачи.

Далее докажем справедливость нижней оценки радиуса устойчивости

$$\rho \geq \varphi^k(A, b, C). \quad (5)$$

Если $\varphi = \varphi^k(A, b, C) = 0$, то неравенство (5) очевидно.

Пусть $\varphi > 0$. Ясно, что для доказательства неравенства (5) в этом случае достаточно показать, что

- (а) для всякого числа $\varepsilon < \varphi$ существует ε -устойчивое решение задачи (1)–(2);
- (б) всякая точка $x \in \mathbf{E}^n$, не являющаяся паретовским оптимумом задачи (1)–(2), остается таковой в любой возмущенной задаче (3)–(4), находящейся от задачи (1)–(2) на любом расстоянии $\varepsilon < \varphi$.

Пусть $x \in \bar{P}$, $0 < \varepsilon < \varphi$. Тогда существует такая точка $y \in \overline{\{x\}}$, что

$$\varepsilon < \varphi \leq \max_{x' \in \overline{\{x\}}} \min\{\alpha(x', x), -\beta(x')\} = \min\{\alpha(y, x), -\beta(y)\} \leq -\beta(y).$$

Отсюда $y \in X$ и поэтому согласно лемме 1 точка y является ε -устойчивым решением системы (2). Далее, учитывая, что $\varepsilon < \alpha(y, x)$, при $\|C'\| = \varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned}(C + C')(x - y) &= C(x - y) + C'(x - y) \leq C(x - y) + \varepsilon \|x - y\|^* e \\ &< C(x - x') + \alpha(y, x) \|x - y\|^* e \\ &= C(x - y) + e \min\{C_i(y - x) : i \in N_k\} \\ &= C(x - y) - e \max\{C_i(x - y) : i \in N_k\} \leq 0.\end{aligned}$$

Поэтому вектор $(C + C')y$ доминирует вектор $(C + C')x$. Следовательно, точка x не является паретовским оптимумом никакой возмущенной задачи (3)–(4), находящейся на любом расстоянии $\varepsilon < \varphi$ от исходной задачи (1)–(2).

Теорема 1 доказана.

Приведем примеры задач, демонстрирующие достижимость установленных теоремой 1 нижней и верхней оценок для радиуса устойчивости.

Пример 1. Пусть

$$A = (1, 1), \quad b = 10, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = \mathbf{E}^2$, $P = \{(1, 1)\}$ и согласно теореме 1

$$\frac{8}{3} \leq \rho^2(A, b, C) \leq 3.$$

Очевидно, что радиус устойчивости нашей задачи $\rho = 8/3$, поскольку множество Парето возмущенной задачи с параметрами

$$A' = \left(\frac{8}{3} + a, \frac{8}{3} + a\right), \quad b' = -\frac{8}{3} - a, \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

состоит из двух точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$ при любом числе $a > 0$.

Пример 2. Пусть

$$A = (4, 2), \quad b = 3, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = P = \{(0, 0), (0, 1)\}$, $0 \leq \rho^2(A, b, C) \leq 1/2$.

Очевидно, что ни одна из точек $(1, 0)$ и $(1, 1)$ не может быть решением никакой системы неравенств вида (4), находящейся на расстоянии меньшем, чем $1/2$, от исходной системы. Кроме того, точка $(0, 0)$ является $1/2$ -устойчивым решением неравенства $4x_1 + 2x_2 \leq 3$. Следовательно, $\rho = 1/2$.

Легко видеть, что утверждение теоремы 1 не имеет смысла для тривиальной задачи (1)–(2) (т.е. в случае $\bar{P} = \emptyset$), поскольку тогда величины $\varphi^k(A, b, C)$ и $\psi^k(A, b, C)$ не определены. Этот случай рассмотрим отдельно.

Теорема 2. Пусть $\bar{P} = \emptyset$. Тогда радиус устойчивости k -критериальной задачи (1)–(2) выражается формулой

$$\rho^k(A, b, C) = \theta = \max\{-\beta(x) : x \in \mathbf{E}^n\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $\theta \geq 0$. Сначала докажем неравенство $\rho \geq \theta$.

Если $\theta = 0$, то это неравенство очевидно.

Пусть $\theta > 0$. Тогда для любого числа $\varepsilon < \theta$ найдется такое решение x^0 задачи (1)–(2), что $\varepsilon < -\beta(x^0)$. Отсюда с учетом леммы 1 получаем, что решение x^0 является ε -устойчивым. Таким образом, любая задача, находящаяся от задачи (1)–(2) на расстоянии, меньшим θ , имеет решение. Отсюда с учетом замечания 1 получаем неравенство $\rho \geq \theta$.

Теперь для доказательства теоремы осталось убедиться в справедливости неравенства $\rho \leq \theta$. Для этого достаточно при любом $\varepsilon > \theta$ найти систему неравенств вида (4), не имеющую решений и находящуюся от системы (2) на расстоянии ε .

Пусть $\varepsilon > \theta$, $b' = (-\varepsilon, \dots, -\varepsilon) \in \mathbf{R}^m$, $A' = [a'_{ij}]_{m \times n}$ — матрица с элементами $a'_{ij} = \varepsilon$, $(i, j) \in N_m \times N_n$. Тогда для любого вектора $x \in \mathbf{E}^n$ с учетом неравенства $\varepsilon > -\beta(x)$ имеем

$$\begin{aligned}(A_s + A'_s)x - (b_s + b'_s) &= A_s x - b_s + \varepsilon \|x\|^* + \varepsilon \\ &> A_s x - b_s - \beta(x) (\|x\|^* + 1) \\ &= A_s x - b_s - \max\{A_i x - b_i : i \in N_m\} = 0,\end{aligned}$$

где $s = s(x) = \operatorname{argmax}\{A_i x - b_i : i \in N_m\}$.

Следовательно, ни для какого вектора $x \in \mathbf{E}^n$ неравенство $(A + A')x \leq b + b'$ не выполняется, т.е. система (4), находящаяся от системы (2) на расстоянии $\varepsilon > \theta$, не имеет решений. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Функционально-избыточными ограничениями в математическом программировании называют ограничения, добавление которых оставляет неизменным множество допустимых решений задачи. В то же время введение таких ограничений может уменьшить радиус устойчивости задачи. Действительно, очевидно, что неравенство $x_1 + x_2 \leq 2$ является функционально-избыточным ограничением в примере 1, хотя добавление этого ограничения к прежним уменьшает радиус устойчивости с $8/3$ до 0.

Список литературы

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач*. Наукова думка, Киев, 1995.
2. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В., *Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации. Кибернетика и системный анализ* (1993) №3, 78–93.
3. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И., *Вопросы параметрического анализа и исследования устойчивости многокритериальных задач целочисленного линейного программирования. Кибернетика* (1988) 68, №3, 41–44.
4. Емеличев В. А., Кравцов М. К., *Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации. Кибернетика и системный анализ* (1995) №4, 137–143.
5. Емеличев В. А., Кричко В. Н., *Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования. Дискретная математика* (1999) 11, №4, 27–32.
6. Леонтьев В. К., Мамутов К. Х. *Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования. Журн. выч. матем. и матем. физики* (1988) 28, №10, 1475–1481.

Статья поступила 27.04.1999.

Переработанный вариант поступил 9.11.1999.