Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карпунин, И. Г. Шапошников, Скрещенные гомоморфизмы конечных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 66–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:01:28

УДК 519.7

Скрещенные гомоморфизмы конечных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями

© 2000 г. Г. А. Карпунин, И. Г. Шапошников

Вводится понятие правого (левого) скрещенного гомоморфизма конечных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями, обобщающее понятие правой (левой) скрещенной изотопии квазигрупп, введенных В. Д. Белоусовым. Доказывается теорема о скрещенных гомоморфизмах (аналог классической теоремы о гомоморфизмах). Описание скрещенных гомоморфизмов многоосновной универсальной алгебры сводится к описанию ее скрещенных конгруэнций. Изучаются скрещенные конгруэнции квазигрупп, изотопных группам и скрещенно изотопных группам. Показана возможность использования скрещенных конгруэнций для построения алгоритмов решения уравнений над алгебрами.

1. Введение

В работе В. Д. Белоусова [1] было введено понятие скрещенной изотопии квазигрупп. Напомним его определение. Тройка $T = (\alpha, B, \gamma)$, где α, γ — подстановки, а B — обратимая справа операция на множестве Q , называется правой скрещенной изотопией или R -изотопией, а квазигруппа $Q(*)$ называется R -изотопной квазигруппе $Q(\cdot)$, если

$$x * y = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot B(x, y))$$

для всех $x, y \in Q$.

Аналогично определяется левая скрещенная изотопия или L -изотопия $S = (A, \beta, \gamma)$, где β, γ — подстановки, а A — обратимая слева операция на множестве Q . Квазигруппа $Q(*)$ называется L -изотопной квазигруппе $Q(\cdot)$, если существует такая L -изотопия $S = (A, \beta, \gamma)$, что

$$x * y = \gamma^{-1}(A(x, y) \cdot \beta y)$$

для всех $x, y \in Q$.

Скрещенные изотопы появляются в ряде практических приложений, например, в криптографии. Известно, что, как правило, алгоритмы блочного шифрования строятся по так называемому принципу Feistel networks [2], по которому шифруемый

блок длины $2n$ двоичных знаков разбивается на равные части L_0 и R_0 и преобразуется в течении ряда однотипных циклов по следующему закону в i -м цикле:

$$\begin{aligned} L_i &= R_{i-1}, \\ R_i &= L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i), \end{aligned}$$

где K_i — элемент ключа, f — некоторая функция, $\oplus$ — покомпонентное сложение двоичных векторов по модулю 2. Если L_i, R_i, K_i — элементы одного множества V_n , а f является обратимой справа операцией на V_n , то нетрудно показать, что операция

$$F: V_{2n} \times V_{2n} \rightarrow V_{2n}$$

преобразования блока за два цикла:

$$F((L_{i-1}, R_{i-1}), (K_i, K_{i+1})) = (L_{i+1}, R_{i+1}), \quad (1)$$

задает структуру квазигруппы $V_{2n}(F)$, R -изотопной группе $V_{2n}(\oplus)$ при R -изотопии (e, B, e) , где e — тождественное отображение, а B имеет вид

$$B((L_{i-1}, R_{i-1}), (K_i, K_{i+1})) = (f(R_{i-1}, K_i), f(L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i), K_{i+1})).$$

Изотопии квазигрупп, в том числе и скрещенные изотопии, могут быть рассмотрены как частный случай гомотопии (соответственно скрещенной гомотопии) квазигрупп. Скрещенную гомотопию мы определим следующим образом.

Определение 1. Рассмотрим квазигруппы $Q(*)$ и $P(\cdot)$. Тройку $T = (\alpha, B, \gamma)$, где α, γ — отображения Q в P , а B — отображение $P \times Q$ в P , назовем правой скрещенной гомотопией или R -гомотопией, если

$$\gamma(x * y) = \alpha x \cdot B(\alpha x, y)$$

для всех $x, y \in Q$. При этом квазигруппа $Q(*)$ называется R -гомотопной квазигруппе $P(\cdot)$.

Аналогично определяется левая скрещенная гомотопия или L -гомотопия $S = (A, \beta, \gamma)$, где β, γ — отображения Q в P , а A — отображение $Q \times P$ в P . Квазигруппа $Q(*)$ называется L -гомотопной квазигруппе $P(\cdot)$, если существует такая L -гомотопия $S = (A, \beta, \gamma)$, что

$$\gamma(x * y) = A(x, \beta y) \cdot \beta y$$

для всех $x, y \in Q$.

В представленной статье развиваются идеи В. Д. Белоусова по построению и исследованию скрещенных изоморфизмов и гомоморфизмов конечных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями, то есть пар $(\mathcal{M}; \Sigma)$, где $\mathcal{M}$ — семейство основных конечных множеств, а Σ — семейство бинарных операций, определенных на элементах $\mathcal{M}$. Скрещенные изоморфизмы и гомоморфизмы многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями являются обобщениями скрещенных изотопий и гомотопий квазигрупп, определенных выше, а также обобщениями изоморфизмов и гомоморфизмов многоосновных универсальных алгебр, рассмотренных в классической работе Хиггинса [3]. Такое направление исследований представляет не только теоретический, но и практический интерес, например, для решения уравнений над алгебрами. Основным объектом исследования статьи

является скрещенный гомоморфизм многоосновной универсальной алгебры с одной бинарной операцией. Полученные результаты естественным образом распространяются на случай произвольных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями.

Многоосновную универсальную алгебру с одной бинарной операцией $F: A \times B \rightarrow C$ будем обозначать через $(A, B, C; F)$. Поскольку других алгебр кроме многоосновных универсальных у нас не появится, то два этих прилагательных мы, как правило, будем опускать. Пусть у алгебры $\mathcal{A} = (A, B, C; F)$ операция F частично определена. Через $D(F)$ будем обозначать множество упорядоченных троек элементов $(a, b, c) \in (A, B, C)$ таких, что на (a, b) определена операция F и $F(a, b) = c$. Множество $D(F)$ назовем оператором алгебры $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две алгебры

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, B_1, C_1; F), \quad \mathcal{A}_2 = (A_2, B_2, C_2; H)$$

с частичными бинарными операциями

$$F: A_1 \times B_1 \rightarrow C_1, \quad H: A_2 \times B_2 \rightarrow C_2$$

соответственно.

Определение 2. Пусть тройка (α, B, Γ) , состоящая из набора отображений

$$\alpha: A_1 \rightarrow A_2, \quad B: A_2 \times B_1 \rightarrow B_2, \quad \Gamma: A_2 \times C_1 \rightarrow C_2,$$

задает отображение T оператора $D(F)$ алгебры $\mathcal{A}_1$ в оператор $D(H)$ алгебры $\mathcal{A}_2$ следующим образом:

$$T(a, b, c) = (\alpha(a), B(\alpha(a), b), \Gamma(\alpha(a), c)),$$

то есть

$$H(\alpha(a), B(\alpha(a), b)) = \Gamma(\alpha(a), F(a, b)). \quad (2)$$

Тогда будем говорить, что тройка (α, B, Γ) является правым скрещенным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_1$ в алгебру $\mathcal{A}_2$.

Определение 3. Аналогично определяется понятие левого скрещенного гомоморфизма. Пусть тройка (A, β, Γ) , состоящая из набора отображений

$$\beta: B_1 \rightarrow B_2, \quad A: B_2 \times A_1 \rightarrow A_2, \quad \Gamma: B_2 \times C_1 \rightarrow C_2,$$

задает отображение T оператора $D(F)$ алгебры $\mathcal{A}_1$ в оператор $D(H)$ алгебры $\mathcal{A}_2$ следующим образом:

$$T(a, b, c) = (A(\beta(b), a), \beta(b), \Gamma(\beta(b), c)),$$

то есть

$$H(A(\beta(b), a), \beta(b)) = \Gamma(\beta(b), F(a, b)).$$

Тогда будем говорить, что тройка (A, β, Γ) является левым скрещенным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_1$ в алгебру $\mathcal{A}_2$.

Если в выше приведенных определениях скрещенных гомоморфизмов отображения α, β биективны и биективны отображения B, A, Γ по второму аргументу при фиксированном первом, то такие скрещенные гомоморфизмы являются соответственно правым и левым скрещенным изоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_1$ и алгебры $\mathcal{A}_2$. Если, кроме того, отображения B, A, Γ не зависят от множеств соответственно A_2, B_2 и A_2 (или B_2), то мы как частный случай получаем определение изоморфизма многоосновных универсальных алгебр с частичными операциями.

В дальнейшем будем рассматривать только правые скрещенные гомоморфизмы и изоморфизмы. Поэтому мы, как правило, будем опускать прилагательное правое для связанных с ним понятий. Все полученные результаты для правых скрещенных гомоморфизмов и изоморфизмов естественным образом переносятся на левые скрещенные гомоморфизмы и изоморфизмы. Ситуация аналогична и для других далее вводимых понятий.

2. Скрещенные конгруэнции

Определение 4. Совокупность отношений эквивалентности

$$\varepsilon = (\varepsilon_A, \{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\})$$

на основных множествах A, B, C соответственно будем называть правой скрещенной конгруэнцией на алгебре $(A, B, C; F)$, если выполняется условие: для любых классов эквивалентности $[a]_{\varepsilon_A}$ и $[b]_{\varepsilon_{[a]}}$ существует класс $[c]_{\gamma_{[a]}}$ такой, что имеет место включение

$$F([a]_{\varepsilon_A}, [b]_{\varepsilon_{[a]}}) \subset [c]_{\gamma_{[a]}}. \quad (3)$$

Аналогично определяется левая скрещенная конгруэнция.

Иногда вместо символов, обозначающих отношения эквивалентности, мы будем указывать соответствующие классы эквивалентности, что не должно вызвать недоумений.

Пусть

$$T = (\alpha, B, \Gamma): \mathcal{A} = (A, B, C; F) \rightarrow \mathcal{A}' = (A', B', C'; F')$$

— скрещенный гомоморфизм. Под $\ker T$ будем понимать набор эквивалентностей

$$(\varepsilon_A, \{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}),$$

заданных следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A: a, a' \in A, a \sim a' &\iff \alpha(a) = \alpha(a'); \\ \varepsilon_{[a]}: b, b' \in B, b \sim b' &\iff B(\alpha(a), b) = B(\alpha(a), b'); \\ \gamma_{[a]}: c, c' \in C, c \sim c' &\iff \Gamma(\alpha(a), c) = \Gamma(\alpha(a), c'). \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\ker T$ является скрещенной конгруэнцией на алгебре $\mathcal{A}$.

Для любой скрещенной конгруэнции ε на алгебре $\mathcal{A}$ можно построить фактор-алгебру $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\varepsilon$. Опишем эту процедуру. В качестве основных множеств для фактор-алгебры $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\varepsilon$ возьмем множества

$$\widetilde{A} = A/\varepsilon_A, \quad \widetilde{B} = \{UB/\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \quad \widetilde{C} = \{UC/\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}.$$

Определим теперь на этих множествах частичную операцию $\tilde{F}$ следующим образом. Операция $\tilde{F}$ задается только на парах вида $([a]_{\varepsilon_A}, [b]_{\varepsilon_{[a]}})$. Поскольку ε — скрещенная конгруэнция, для любой такой пары найдется единственный класс $[c]_{\gamma_{[a]}}$ такой, что выполняется соотношение (3). Положим

$$\tilde{F}([a]_{\varepsilon_A}, [b]_{\varepsilon_{[a]}}) = [c]_{\gamma_{[a]}}.$$

Алгебру $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}; \tilde{F})$ назовем фактор-алгеброй алгебры $\mathcal{A}$ по скрещенной конгруэнции ε .

Определим естественный скрещенный гомоморфизм $\tilde{T} = (\tilde{\alpha}, \tilde{B}, \tilde{\Gamma})$ из алгебры $\mathcal{A}$ в фактор-алгебру $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\varepsilon$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}: A &\rightarrow \tilde{A}, & \tilde{\alpha}(a) &= [a]; \\ \tilde{B}: \tilde{A} \times B &\rightarrow \tilde{B}, & \tilde{B}([a], b) &= [b]_{\varepsilon_{[a]}}; \\ \tilde{\Gamma}: \tilde{A} \times C &\rightarrow \tilde{C}, & \tilde{\Gamma}([a], c) &= [c]_{\gamma_{[a]}}. \end{aligned}$$

При так определенных отображениях $\tilde{\alpha}, \tilde{B}, \tilde{\Gamma}$ для любых $a \in A, b \in B$ выполняется равенство

$$\tilde{F}(\tilde{\alpha}(a), \tilde{B}(\tilde{\alpha}(a), b)) = \tilde{\Gamma}(\tilde{\alpha}(a), F(a, b)).$$

Следовательно, $\tilde{T} = (\tilde{\alpha}, \tilde{B}, \tilde{\Gamma})$ на самом деле является скрещенным гомоморфизмом.

Пусть

$$T = (\alpha, B, \Gamma): \mathcal{A} = (A, B, C; F) \rightarrow \mathcal{A}' = (A', B', C'; F')$$

— скрещенный гомоморфизм. Образом $\text{Im}(\alpha, B, \Gamma)$ гомоморфизма T будем называть алгебру $\mathcal{A}'_0 = (A'_0, B'_0, C'_0; F')$, где

$$\begin{aligned} A'_0 &= \text{Im } \alpha = \{a' \in A': \exists a \in A, \alpha(a) = a'\}, \\ B'_0 &= \bigcup_{a \in A} \text{Im } B(\alpha(a), \cdot) = \bigcup_{a' \in A'_0} \text{Im } B(a', \cdot) \\ &= \bigcup_{a' \in A'_0} \{b' \in B': \exists b \in B, B(a', b) = b'\}, \\ C'_0 &= \bigcup_{a \in A} \text{Im } \Gamma(\alpha(a), \cdot) = \bigcup_{a' \in A'_0} \text{Im } \Gamma(a', \cdot) \\ &= \bigcup_{a' \in A'_0} \{c' \in C': \exists c \in C, \Gamma(a', c) = c'\}, \end{aligned}$$

а операция F' на алгебре $\mathcal{A}'_0$ индуцируется с алгебры $\mathcal{A}'$.

Лемма 1. Скрещенный гомоморфизм алгебры $(A, B, C; F)$ в некоторую алгебру существует тогда и только тогда, когда на основных множествах A, B и C соответственно определены отношения эквивалентности ε_A ,

$$\{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \quad \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\},$$

образующие скрещенную конгруэнцию на алгебре $(A, B, C; F)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Если существует скрещенный гомоморфизм $T = (\alpha, B, \Gamma)$ алгебры $(A, B, C; F)$ в некоторую алгебру, то в качестве скрещенной конгруэнции на алгебре $(A, B, C; F)$ можно взять $\ker T$.

Докажем достаточность. Если существует скрещенная конгруэнция ε на алгебре $\mathcal{A} = (A, B, C; F)$, тогда построим фактор-алгебру $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\varepsilon$ и возьмем естественный скрещенный гомоморфизм $\tilde{T} = (\tilde{\alpha}, \tilde{B}, \tilde{\Gamma})$ из $\tilde{\mathcal{A}}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$.

Теорема 1. Образ скрещенного гомоморфизма $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ изоморфен фактор-алгебре $\mathcal{A}/\ker T$.

Доказательство. Построим гомоморфизм $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ из фактор-алгебры $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\ker T$ в алгебру $\text{Im}(\alpha, B, \Gamma) = (A'_0, B'_0, C'_0; F')$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0: \tilde{A} &\rightarrow A'_0, & \tilde{\alpha}_0([a]) &= \alpha(a); \\ \tilde{\beta}_0: \tilde{B} &\rightarrow B'_0, & \tilde{\beta}_0([b]\varepsilon_{[a]}) &= B(\alpha(a), b); \\ \tilde{\gamma}_0: \tilde{C} &\rightarrow C'_0, & \tilde{\gamma}_0([c]\gamma_{[a]}) &= \Gamma(\alpha(a), c).\end{aligned}$$

Согласно определению $\ker T$ и $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\ker T$ отображения $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0$ корректно определены. Используя равенство (2) для скрещенного гомоморфизма (α, B, Γ) , непосредственно можно убедиться, что для любой пары $[a] \in \tilde{A}, [b]\varepsilon_{[a]} \in \tilde{B}$ выполняется соотношение

$$F'(\tilde{\alpha}_0([a]), \tilde{\beta}_0([b]\varepsilon_{[a]})) = \tilde{\gamma}_0(\tilde{F}([a], [b]\varepsilon_{[a]})),$$

то есть $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ является гомоморфизмом. Нетрудно проверить, что построенные отображения $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0$ удовлетворяют условиям из определения изоморфизма, и гомоморфизм $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ биективно отображает оператору $D(\tilde{F})$ алгебры $\tilde{\mathcal{A}}$ на оператору $D(F')$ алгебры $\mathcal{A}'_0 = (A'_0, B'_0, C'_0; F')$. Следовательно, $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ — изоморфизм.

Согласно лемме 1 и теореме 1 описание всех скрещенных конгруэнций на алгебре $\mathcal{A} = (A, B, C; F)$ эквивалентно описанию с точностью до изоморфизма ее скрещенно гомоморфных образов. Поэтому далее мы будем исследовать скрещенные конгруэнции, так как в этом случае мы ограничиваемся исследованием свойств операций алгебры.

3. Алгоритм решения уравнений над алгебрами

Известны алгоритмы решения систем уравнений над алгебрами, использующие существование гомоморфизмов (см., например, [4, 5, 6, 7]). Аналогичным образом можно использовать и скрещенные гомоморфизмы. Рассмотрим, например, уравнение над алгеброй $(A, B, C; F)$ с одной бинарной операцией F относительно неизвестных $a \in A$ и $b \in B$ вида

$$F(a, b) = c, \quad c \in C. \quad (4)$$

Пусть на алгебре $(A, B, C; F)$ существует некоторая скрещенная конгруэнция

$$\varepsilon = (\varepsilon_A, \{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}).$$

Тогда, используя ее, можно свести решение уравнения (4) к решению уравнения в скрещенной фактор-алгебре вида

$$\tilde{F}([a], [b]\varepsilon_{[a]}) = [c]\gamma_{[a]}. \quad (5)$$

Уравнение (5) может решаться проще уравнения (4), хотя бы за счет меньшей мощности множества неизвестных. Например, простейшим алгоритмом решения уравнения (4) с использованием скрещенной конгруэнции ε является алгоритм перебора представителей классов эквивалентности $[a]$, $[b]\varepsilon_{[a]}$ на первом этапе и перебора элементов внутри классов эквивалентности, для которых выполняется соотношение (5), на втором этапе. Вычислительная сложность решения уравнения (4) данным алгоритмом составляет величину

$$Q(\varepsilon) = \sum_{[a] \in A/\varepsilon_A} |B/\varepsilon_{[a]}| + \sum |[a]| |b_s]\varepsilon_{[a]}|, \quad (6)$$

где суммирование во втором слагаемом производится по представителям классов a , b_s таким, что

$$F([a], [b_s]\varepsilon_{[a]}) \subset [c]\gamma_{[a]}.$$

Таким образом, принцип использования скрещенных гомоморфизмов и скрещенных конгруэнций для решения систем уравнений над алгебрами, аналогичен принципу использования традиционных гомоморфизмов и конгруэнций [4, 8]. Вместе с тем, за счет большей общности понятия скрещенной конгруэнции, алгоритм решения уравнений с их использованием может быть более эффективным по сравнению с алгоритмом, использующим традиционные гомоморфизмы многоосновных универсальных алгебр. Об этом свидетельствует нижеследующий пример. Для его построения нам потребуются некоторые результаты работы [8].

Пусть $\delta: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A_0$ — некоторая операция;

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Отображение $L_{\delta,i}(\mathbf{a}): A_i \rightarrow A_0$ вида

$$L_{\delta,i}(\mathbf{a}) = \delta(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

называется i -й трансляцией операции алгебры $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \delta)$ относительно $\mathbf{a}$ [9].

Говорят [8], что множество отображений $G = \{g \mid g: A \rightarrow B\}$ 2-транзитивно, если для любых пар $(a_1, a_2) \in A$, $(b_1, b_2) \in B$, $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, существует отображение $g \in G$ такое, что $g(a_1) = b_1$ и $g(a_2) = b_2$.

Предложение 1. ([8]) Пусть $(\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$ — конгруэнция на алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \delta)$, у которой отношение эквивалентности $\varepsilon(A_0)$ разбивает множество A_0 не менее чем в 2 класса эквивалентности. Тогда, если для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ множество i -х трансляций 2-транзитивно, то все классы $[a]\varepsilon(A_i)$ одноклассовы.

Вычислительная сложность алгоритма решения системы уравнений (4) с использованием конгруэнции $\varepsilon = (\varepsilon(A), \varepsilon(B), \varepsilon(C))$ на алгебре $(A, B, C; F)$ оценивается величиной [4]

$$\bar{Q}(\varepsilon) = |A/\varepsilon(A)| |B/\varepsilon(B)| + \sum |[a_s]\varepsilon(A)| |[b_r]\varepsilon(B)|, \quad (7)$$

где суммирование производится по представителям классов a_s, b_r таким, что

$$F([a_s]\varepsilon(A), [b_r]\varepsilon(B)) \subset [c]\varepsilon(C).$$

Таким образом, если отношение эквивалентности $\varepsilon(B)$ тривиально, то вычислительная сложность данного алгоритма решения системы (4) включает перебор всех элементов множества B .

Рассмотрим алгебру $(S_B, B, B; F)$, у которой S_B — элементы симметрической группы подстановок множества B , $|B|$ — не простое число, а операция F определяется соотношением

$$F(g, b) = g(b), \quad g \in S_B, \quad b \in B.$$

Множество 2-х трансляций операции F совпадает с симметрической группой S_B . Поэтому согласно предложению 1 для любой конгруэнции $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ на алгебре $(S_B, B, B; F)$ такой, что ε_3 разбивает множество B не менее чем в 2 класса эквивалентности, отношение эквивалентности ε_2 тривиально. В частности, как нетрудно видеть, нетривиальными конгруэнциями на рассматриваемой алгебре будут следующие отношения эквивалентности:

$\varepsilon_2 = id$ — отношение равенства;

ε_1 — отношение правой смежности группы S_B по некоторой интранзитивной подгруппе G ;

ε_3 — отношение принадлежности к орбите (множеству транзитивности) группы G .

Вместе с тем на данной алгебре существуют скрещенные конгруэнции, позволяющие построить более эффективный алгоритм решения рассматриваемого уравнения. А именно, пусть H — некоторая импримитивная группа подстановок множества B , а σ — отношение эквивалентности на B , соответствующее разбиению B на блоки импримитивности. Тогда искомая скрещенная конгруэнция имеет вид

$$\varepsilon = (\tau_H, \{\sigma_{[g]} = g^{-1}(\sigma) : [g] \in S_B/\tau_H\}, \{\sigma_{[g]} = \sigma : [g] \in S_B/\tau_H\}),$$

где τ_H — отношение правой смежности в S_B по подгруппе H , $g^{-1}(\sigma)$ — отношение эквивалентности на B , определяемое следующим образом: $(a, b) \in g^{-1}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $(g^{-1}(a), g^{-1}(b)) \in \sigma$.

Заметим, что для всех элементов $g \in S_B$ из одного смежного класса относительно τ_H отношения эквивалентности $g^{-1}(\sigma)$ совпадают, поэтому скрещенная конгруэнция определена корректно.

Приведенный пример одновременно свидетельствует, что предложение 1 в определенном смысле не распространяется на скрещенные конгруэнции, так как даже максимальное значение транзитивности множества 2-х трансляций не гарантирует отсутствия скрещенных конгруэнций $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ с нетривиальными отношениями эквивалентности ε_2 . Этот пример также показывает, что скрещенные конгруэнции не сводятся к обычным, рассмотренным в работах [3, 4].

В [8] было показано, что оптимальное решение уравнений (с точки зрения минимизации вычислений) методом, использующим гомоморфизмы соответствующей многоосновной универсальной алгебры, следует искать среди ее максимальных конгруэнций. Аналогичный результат можно получить и для скрещенных конгруэнций.

Введем понятие максимальной скрещенной конгруэнции. Заметим, что если на алгебре $(A, B, C; F)$ существует скрещенная конгруэнция

$$\varepsilon = (\varepsilon_A, \{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}),$$

и на основных множествах A , B и C соответственно определена совокупность отношений эквивалентности

$$\nu = (\nu_A, \{\nu_{[a]}: [a] \in A/\nu_A\}, \{\mu_{[a]}: [a] \in A/\nu_A\}),$$

такая, что для любого a выполняются условия

$$\nu_A \subset \varepsilon_A, \quad \nu_{[a]} \subset \varepsilon_{[a]}, \quad \gamma_{[a]} \subset \mu_{[a]},$$

то ν — также скрещенная конгруэнция. Будем в этом случае говорить, что ν — следствие ε . Отношение следствия задает на множестве всех скрещенных конгруэнций $\text{CrCon}(A, B, C; F)$ алгебры $(A, B, C; F)$ отношение частичного порядка.

Определение 5. Максимальные элементы в множестве $\text{CrCon}(A, B, C; F)$, т.е. скрещенные конгруэнции, не являющиеся следствиями, будем называть максимальными скрещенными конгруэнциями.

Предложение 2. Пусть

$$\varepsilon = (\varepsilon_A, \{\varepsilon_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\}, \{\gamma_{[a]}: [a] \in A/\varepsilon_A\})$$

— максимальная скрещенная конгруэнция на алгебре $(A, B, C; F)$, а

$$\nu = (\nu_A, \{\nu_{[a]}: [a] \in A/\nu_A\}, \{\mu_{[a]}: [a] \in A/\nu_A\}),$$

— некоторое следствие из ε . Тогда $Q(\varepsilon) \leq Q(\nu)$.

Таким образом, оптимальное (с точки зрения минимизации сложности вычислений $(Q(\varepsilon))$) решение уравнения (4) методом, использующим скрещенные конгруэнции алгебры $(A, B, C; F)$, следует искать среди ее максимальных конгруэнций.

Доказательство. Так как $\nu_A \subset \varepsilon_A$ и $\nu_{[a]} \subset \varepsilon_{[a]}$, справедливы неравенства

$$|A/\varepsilon_A| \leq |A/\nu_A|, \quad |B/\varepsilon_{[a]}| \leq |B/\nu_{[a]}|,$$

и, следовательно,

$$\sum_{[a] \in A/\varepsilon_A} |B/\varepsilon_{[a]}| \leq \sum_{[a] \in A/\nu_A} |B/\nu_{[a]}|.$$

Пусть для некоторого $(a, b) \in A \times B$

$$F([a]\varepsilon_A, [b]\varepsilon_{[a]}) \subset [c]\gamma_{[a]}.$$

Тогда, так как $\gamma_{[a]} \subset \mu_{[a]}$, справедливо включение

$$F([a]\varepsilon_A, [b]\varepsilon_{[a]}) \subset [c]\mu_{[a]}.$$

Следовательно, элементы a , b входят в некоторые классы с представителями соответственно a_i , b_j , для которых $F([a_i]\nu_A, [b_j]\nu_{[a]}) \subset [c]\mu_{[a]}$. Таким образом, и второе слагаемое в выражении (6) для $Q(\varepsilon)$ не больше второго слагаемого в выражении (6) для $Q(\nu)$. Предложение доказано.

Получающиеся при реализации программных алгоритмов n -арные операции, $n > 2$, представляют собой, как правило, суперпозицию некоторых бинарных операций. Нетрудно видеть, что алгоритм решения уравнений для таких операций с использованием скрещенных конгруэнций можно построить на основе скрещенных конгруэнций алгебр с бинарными операциями, составляющими указанную суперпозицию. Пусть, например, n -арная операция

$$F: C_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow C_n$$

является суперпозицией $n - 1$ бинарных операций

$$F_i: C_i \times A_{i+1} \rightarrow C_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

вида

$$F(c_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = F_{n-1}(\dots F_2(F_1(c_1, a_2), a_3) \dots, a_n),$$

а на алгебрах $(C_i, A_{i+1}, C_{i+1}; F_i)$ существуют скрещенные конгруэнции

$$E_i = (\varepsilon_i(C_i), \{\varepsilon_{i,[c]}: [c] \in C_i/\varepsilon_i(C_i)\}, \{\gamma_{i,[c]}: [c] \in C_i/\varepsilon_i(C_i)\})$$

такие, что для любого $i = 1, \dots, n - 1$ и любого $[c] \in C_i/\varepsilon_i(C_i)$ справедливо включение $\gamma_{i,[c]} \subset \varepsilon_{i+1}(C_{i+1})$. Тогда использование указанных конгруэнций для решения уравнения

$$F(x_1, \dots, x_n) = b \tag{8}$$

сводится к последовательному применению вышеописанного алгоритма решения уравнения (4), то есть сводится к решению уравнений в суперпозициях скрещенных фактор-алгебр вида

$$F([x_1]\varepsilon_1(C_1), [x_2]\varepsilon_{1,[x_1]}, [x_3]\varepsilon_{2,[y_1]}, \dots, [x_n]\varepsilon_{n-1,[y_{n-2}]} \subset [b]\gamma_{n-1,[y_{n-2}]},$$

где $\gamma_{i,[c]} \subset \varepsilon_{i+1}(C_{i+1})$ и

$$F_1([x_1]\varepsilon_1(C_1), [x_2]\varepsilon_{1,[x_1]}) \subset [y_1]\varepsilon_2(C_2),$$

...

$$F_i([y_{i-1}]\varepsilon_i(C_i), [x_{i+1}]\varepsilon_{i,[y_{i-1}]}) \subset [y_i]\varepsilon_{i+1}(C_{i+1}),$$

...

$$F_{n-1}([y_{n-2}]\varepsilon_{n-1}(C_{n-1}), [x_n]\varepsilon_{n-1,[y_{n-2}]} \subset [b]\gamma_{n-1,[y_{n-2}]}.$$

4. Скрещенные конгруэнции некоторых универсальных алгебр

4.1. Скрещенные конгруэнции квазигрупп, изотопных группам

Определение 6. Возьмем некоторое подмножество X в группе $G(\cdot)$. Правой X -конгруэнцией на группе $G(\cdot)$ будем называть тройку $(X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$, где $\varepsilon_Y, \varepsilon_Z$ — отношения эквивалентности на множестве G такие, что для любого класса эквивалентности Y_m относительно ε_Y найдется класс эквивалентности Z_k относительно ε_Z , для которого будет выполнено соотношение

$$X \cdot Y_m \subset Z_k. \tag{9}$$

Аналогично можно определить левые X -конгруэнции. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только правые X -конгруэнции (без уточнения, что они правые). Полученные результаты естественным образом распространяются на левые X -конгруэнции.

Определение 7. Заметим, что если на группе $G(\cdot)$ существует X -конгруэнция $\varepsilon = (X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ и определены отношения эквивалентности $\varepsilon'_Y, \varepsilon'_Z$ такие, что выполняются условия

$$\varepsilon'_Y \subset \varepsilon_Y, \quad \varepsilon_Z \subset \varepsilon'_Z,$$

то $\varepsilon' = (X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ — также X -конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Будем в этом случае говорить, что ε' — следствие ε . X -конгруэнцию, не являющуюся следствием, будем называть максимальной X -конгруэнцией.

Лемма 2. Если X -конгруэнция $\varepsilon = (X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ на группе $G(\cdot)$ максимальна, то вместо включения (9) выполняется равенство

$$X \cdot Y_m = Z_k.$$

Доказательство. В самом деле, если для каких-то классов эквивалентности Y_m, Z_k имеет место строгое включение $X \cdot Y_m \subset Z_k$, то найдется хотя бы еще один класс $Y_{m'}$, для которого также выполнено включение $X_i \cdot Y_{m'} \subset Z_k$. Построим новую конгруэнцию $\tilde{\varepsilon}$ из ε , объединив в ε два класса $Y_{m'}$ и Y_m в один класс $\tilde{Y}_{m''}$. Поскольку конгруэнция $\tilde{\varepsilon}$ строго больше конгруэнции ε , конгруэнция ε не максимальна, что противоречит условию леммы.

Лемма 3. Если X -конгруэнция $\varepsilon = (X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ на группе $G(\cdot)$ максимальна, то умножение на X слева устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью классов Y_m и Z_k .

Доказательство. Очевидно, что умножение на X — это сюръективное отображение. Покажем, что оно также является инъективным. В самом деле, если бы это было не так, то нашлись бы два класса Y_m и $Y_{m'}$ такие, что $X \cdot Y_m = X \cdot Y_{m'} = Z_k$, и, следовательно, конгруэнция ε не была бы максимальной. Таким образом, показана инъективность умножения на X и вместе с тем биективность.

Следствие 1. X -конгруэнция $\varepsilon = (X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ на группе $G(\cdot)$ максимальна тогда и только тогда, когда умножение на X слева устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью классов Y_m и Z_k .

Лемма 4. При необходимости перенумеровав классы Y_m , можно считать, что для максимальной X -конгруэнции $(X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ выполняется равенство

$$X \cdot Y_k = Z_k,$$

при этом $|Y_k| = |Z_k|$.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы следует из леммы 3. Докажем, что $|Y_k| = |Z_k|$. Из равенства $X \cdot Y_k = Z_k$ следует, что $|Y_k| \leq |Z_k|$, но с другой стороны

$$\sum_k |Y_k| = \sum_k |Z_k| = |G|.$$

Поэтому для любого k выполняется равенство $|Y_k| = |Z_k|$.

Предложение 3. Пусть $(X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ — X -конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Тогда для любого элемента $g \in X$ и подгруппы $H = gr(X \cdot g^{-1}) \subset G(\cdot)$ справедливы следующие утверждения:

- (1) X включается в некоторый правый смежный класс $H \cdot g$;
- (2) любое множество Z_k представляется в виде объединения некоторых правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H .

Доказательство. Пусть $x_1 \in X$, $z_1 \in Z_k$. Выберем класс Y_m , включающий элемент $x_1^{-1} \cdot z_1$. Тогда

$$X \cdot Y_m \cap Z_k \ni z_1,$$

и, согласно определению X -конгруэнции, $X \cdot Y_m \subset Z_k$. Следовательно, для любого $x_2 \in X$

$$x_2 \cdot x_1^{-1} \cdot z_1 \in Z_k,$$

и, повторяя выше приведенные рассуждения, получаем, что

$$x_3 \cdot x_1^{-1} \cdot x_2 \cdot x_1^{-1} \cdot z_1 \in Z_k,$$

для любого $x_3 \in X$. Аналогично показывается, что

$$x_s \cdot x_1^{-1} \cdot \dots \cdot x_2 \cdot x_1^{-1} \cdot z_1 \in Z_k,$$

для $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$. Следовательно, Z_k включает правый смежный класс группы $G(\cdot)$ по подгруппе $H = gr(X \cdot x_1^{-1})$, т.е. $H \cdot z_1 \subset Z_k$. В силу произвольности $z_1 \in Z_k$ получаем, что класс Z_k представляется в виде объединения некоторых правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H .

Нетрудно заметить также, что $X \subset H \cdot x_1$. Положим теперь $g = x_1$. Предложение доказано.

Из предложения 3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $(X_i, Y_m^{(i)}, Z_k^{(i)})$ — скращенная конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Тогда для любого i существует подгруппа $H_i \subset G(\cdot)$ такая, что X_i включается в некоторый правый смежный класс $H_i \cdot g$ и любой класс $Z_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов по подгруппе H_i .

Лемма 5. Пусть для трех подмножеств X, Y, Z группы $G(\cdot)$ таких, что $|Y| = |Z|$, выполняется равенство $X \cdot Y = Z$. Тогда верно равенство $Y = X^{-1} \cdot Z$, где $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$.

Доказательство. Поскольку при любом $x \in X$ выполняются соотношения $x \cdot Y \subset Z$ и $|x \cdot Y| = |Y| = |Z|$, то $x \cdot Y = Z$ и $Y = x^{-1} \cdot Z$. Отсюда следует утверждение леммы.

Следствие 2. Если $\varepsilon = (X, Y_k, Z_k)$ — максимальная X -конгруэнция на группе $G(\cdot)$, то набор множеств (X^{-1}, Z_k, Y_k) является максимальной X^{-1} -конгруэнцией, которую далее мы будем обозначать через ε^{-1} .

Лемма 6. Пусть $\varepsilon = (X, Y_k, Z_k)$ — максимальная X -конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Тогда существует пара сопряженных подгрупп $H \subset G(\cdot)$ и $Q \subset G(\cdot)$, т.е. $g^{-1} \cdot H \cdot g = Q$, таких, что

- (1) X включается в правый смежный класс $H \cdot g$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе H , а X^{-1} включается в правый смежный класс $Q \cdot g^{-1}$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q ;
- (2) любой класс $Z_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H , и любой класс $Y_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q .

Доказательство. Поскольку (X, Y_k, Z_k) — максимальная X -конгруэнция, то, согласно следствию 2, (X^{-1}, Z_k, Y_k) — тоже максимальная X -конгруэнция. Применяя к ним предложение 3, получаем утверждение леммы.

Пусть ε — скрещенная конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Обозначим через $X_i, Y_m^{(i)}, Z_k^{(i)}$ соответствующие классы эквивалентности. Очевидно, что при любом фиксированном i совокупность множеств $(X_i, Y_m^{(i)}, Z_k^{(i)})$ образуют X_i -конгруэнцию на группе $G(\cdot)$, которую мы обозначим через ε_i . Заметим, что если скрещенная конгруэнция ε максимальна, то будут максимальными все X_i -конгруэнции ε_i . Тогда для каждого i , согласно следствию 2, можно построить максимальную X_i^{-1} -конгруэнцию. Применяя лемму 6 к каждой максимальной X_i -конгруэнции ε_i , получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon = (X_i, Y_k^{(i)}, Z_k^{(i)})$ — максимальная скрещенная конгруэнция на группе $G(\cdot)$. Тогда для любого i существует пара сопряженных подгрупп $H_i \subset G(\cdot)$ и $Q_i \subset G(\cdot)$, т.е. $g_i^{-1} \cdot H_i \cdot g_i = Q_i$, таких, что

- (1) X_i включается в правый смежный класс $H_i \cdot g_i$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i , а X_i^{-1} включается в правый смежный класс $Q_i \cdot g_i^{-1}$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q_i ;
- (2) любой класс $Z_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i , и любой класс $Y_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q_i .

Опишем процедуру построения X -конгруэнции $(X, Y_k^{(g)}, Z_k^{(g)})$, которую мы будем называть порождающей и обозначать через $\varepsilon^{(g)}$ (смысл названия будет ясен из теоремы 3). Для этого нам понадобится следующее определение.

Определение 8. Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность множеств A_s , $\mathfrak{A} = \{A_s\}$. Связной компонентой совокупности $\mathfrak{A}$ будем называть множество A , являющееся объединением некоторых множеств A_s и удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) любое множество A_s либо целиком лежит в A , либо не пересекается с A ;
- (2) для любых двух множеств A_s и $A_{s'}$, лежащих в A , найдется последовательность множеств

$$A_{s_1} = A_s, A_{s_2}, \dots, A_{s_{m-1}}, A_{s_m} = A_{s'},$$

также лежащих в A , такая, что $A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, m-1$.

Ясно, что любые две связные компоненты совокупности $\mathfrak{A}$ не пересекаются, и объединение всех $A_s \in \mathfrak{A}$ разбивается на связные компоненты совокупности $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим покрытие группы $G(\cdot)$ совокупностью множеств $X \cdot y$, где y пробегает всю группу G . Группа G разбивается на связные компоненты этой совокупности. Теперь в качестве $Z_k^{(g)}$ возьмем k -ю связную компоненту, а в качестве $Y_k^{(g)}$ возьмем множество $Y_k^{(g)} = \{y: X \cdot y \subset Z_k^{(g)}\}$. Согласно следствию 1, порождающая X -конгруэнция максимальна.

Предложение 5. Для порождающей X -конгруэнции $\varepsilon^{(g)}$ на группе $G(\cdot)$ существует подгруппа $H \subset G(\cdot)$ такая, что

- (1) X включается в некоторый правый смежный класс $H \cdot y$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе H ;
- (2) любое множество $Z_k^{(g)}$ является правым смежным классом группы $G(\cdot)$ по подгруппе H .

Доказательство. Согласно предложению 3 существует подгруппа $H \subset G(\cdot)$ такая, что X включается в некоторый правый смежный класс $H \cdot y$. А любое Z_k представляется в виде объединения некоторых правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H , т.е. $\varepsilon(H) \subset \varepsilon_Z^{(g)}[X]$, где $\varepsilon(H)$ — отношение эквивалентности на группе $G(\cdot)$, задаваемое разбиением на правые смежные классы по подгруппе H , а $\varepsilon_Z^{(g)}[X]$ — Z -я компонента X -конгруэнции $\varepsilon^{(g)}$. Рассмотрим теперь порождающую $(H \cdot y)$ -конгруэнцию $\varepsilon^{(g)}[H \cdot y]$. Поскольку $X \subset H \cdot y$,

$$\varepsilon_Z^{(g)}[X] \subset \varepsilon_Z^{(g)}[H \cdot y] = \varepsilon(H).$$

Следовательно, $\varepsilon_Z^{(g)}[X] = \varepsilon(H)$.

Пусть множество индексов J , которыми заиндексированы классы $Z_k^{(g)}$, разбито на множества

$$J_1, \dots, J_s.$$

Образуем новую X -конгруэнцию (X, Y_i, Z_i) следующим образом:

$$Z_i = \bigsqcup_{k \in J_i} Z_k^{(g)}, \quad Y_i = \bigsqcup_{k \in J_i} Y_k^{(g)}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Согласно следствию 1, X -конгруэнция (X, Y_i, Z_i) максимальна. Такую процедуру получения из порождающей конгруэнции $\varepsilon^{(g)}$ новых максимальных X -конгруэнций назовем объединением классов эквивалентности в $\varepsilon^{(g)}$.

Теорема 3. Любая максимальная X -конгруэнция $\varepsilon = (X, Y_i, Z_i)$ может быть получена из порождающей X -конгруэнции $\varepsilon^{(g)}$ объединением классов эквивалентности.

Доказательство. Покажем, что любой класс $Z_k^{(g)}$ целиком лежит в каком-то классе Z_i . Отсюда будет следовать, что $Y_k^{(g)}$ также целиком лежит в соответствующем классе Y_i .

Возьмем любые две точки z', z'' из $Z_k^{(g)}$, пусть они принадлежат множествам $X \cdot y', X \cdot y'' \subset Z_k^{(g)}$ соответственно. Если $X \cdot y' \cap X \cdot y'' \neq \emptyset$, то оба множества $X \cdot y', X \cdot y''$ обязаны целиком лежать в каком-то классе Z_i . Следовательно, $z', z'' \in Z_i$. Если же $X \cdot y' \cap X \cdot y'' = \emptyset$, то, согласно процедуре построения множеств $Z_k^{(g)}$, найдется последовательность множеств

$$X \cdot y_1 = X \cdot y', X \cdot y_2, \dots, X \cdot y_{s-1}, X \cdot y_s = X \cdot y'',$$

также лежащих в $Z_k^{(g)}$, такая, что

$$X \cdot y_i \cap X \cdot y_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Каждое следующее множество в этой последовательности целиком лежит в том же классе Z_i , что и предыдущее, поэтому $X \cdot y', X \cdot y'' \subset Z_i$. Следовательно, в этом случае также $z', z'' \in Z_i$.

Итак, любой класс Z_i является объединением каких-то классов $Z_k^{(g)}$, в свою очередь соответствующий класс Y_i является объединением соответствующих классов $Y_k^{(g)}$.

Определение 9. Напомним [10], что квазигруппа $G(*)$ называется изотопной группой $G(\cdot)$, если существуют такие подстановки α, β, γ на множестве G , что для всех $x, y \in G$

$$x * y = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y).$$

Легко видеть, что имеет место следующая лемма.

Лемма 7. Пусть квазигруппа $G(*)$ изотопна группе $G(\cdot)$ при изотопии (α, β, γ) и $\varepsilon = (X_i, Y_k^{(i)}, Z_k^{(i)})$ — максимальная скрещенная конгруэнция на квазигруппе $G(*)$. Тогда $\tilde{\varepsilon} = (\alpha(X_i), \beta(Y_k^{(i)}), \gamma(Z_k^{(i)}))$ — максимальная скрещенная конгруэнция на группе $G(\cdot)$.

Из теоремы 2 и леммы 7 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\varepsilon = (X_i, Y_k^{(i)}, Z_k^{(i)})$ — максимальная скрещенная конгруэнция на квазигруппе $G(*)$, изотопной группе $G(\cdot)$ при изотопии (α, β, γ) . Тогда для любого i существует пара сопряженных подгрупп $H_i \subset G(\cdot)$ и $Q_i \subset G(\cdot)$, т.е. $g_i^{-1} \cdot H_i \cdot g_i = Q_i$, таких, что

- (1) $\alpha(X_i)$ включается в правый смежный класс $H_i \cdot g_i$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i , а $\alpha(X_i)^{-1}$ включается в правый смежный класс $Q_i \cdot g_i^{-1}$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q_i ;
- (2) любое множество $\gamma(Z_k^{(i)})$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i , а любое множество $\beta(Y_k^{(i)})$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе Q_i .

4.2. Конгруэнции и скращенные конгруэнции квазигрупп, скращенно изотопных группам

Теорема 5. Пусть квазигруппа $G(*)$ скращенно изотопна группе $G(\cdot)$ при скращенной изотопии (e, B, e) , где e — тождественная подстановка на множестве G . Рассмотрим скращенную конгруэнцию $\varepsilon = (X_i, Y_m^{(i)}, Z_k^{(i)})$ на квазигруппе $G(*)$, согласованную со скращенной изотопией (e, B, e) , это означает, что для любой пары классов $X_i, Y_m^{(i)}$ найдется класс $Z_k^{(i)}$, удовлетворяющий соотношению $X_i \cdot B(X_i, Y_m^{(i)}) \subset Z_k^{(i)}$. Тогда для каждого i существует подгруппа $H_i \subset G(\cdot)$ такая, что

- (1) X_i включается в некоторый правый смежный класс $H_i \cdot g$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i ;
- (2) любое множество $Z_k^{(i)}$ представляется в виде объединения правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_i .

При этом, если для фиксированного i разбиение множества G на классы $Z_k^{(i)}$ состоит не менее чем из 2 элементов, то подгруппа H_i — собственная.

Доказательство. Рассмотрим совокупность множеств $B_m^{(i)} = B(X_i, Y_m^{(i)})$. Поскольку Y является обратимой справа операцией, при любом фиксированном i множества $B_m^{(i)}$ образуют покрытие множества G , т.е.

$$\bigcup_m B_m^{(i)} = G.$$

Обозначим через $\bar{B}_s^{(i)}$ связные компоненты этого покрытия. Тогда совокупность множеств $(X_i, \bar{B}_s^{(i)}, Z_k^{(i)})$ образует скращенную конгруэнцию на группе $G(\cdot)$. Применяя предложение 3, получаем утверждение теоремы.

Эта теорема легко может быть переформулирована и для скращенных изотопий общего вида. В общем случае строение классов $Y_m^{(i)}$ скращенных конгруэнций квазигрупп, скращенно изотопных группам, зависит от вида операции B . Об этом свидетельствует следующий пример.

Рассмотрим квазигруппу $G(\Phi)$, скращенно R -изотопную абелевой группе $G(\cdot)$ вида

$$\Phi(x, y) = x \cdot B(x, y),$$

такую, что операция B на множестве G есть квазигруппа, L -изотопная некоторой группе $G(*)$, т.е.

$$\Phi(x, y) = x \cdot \gamma^{-1}(A(x, y) * \beta(y)), \quad (10)$$

где $S = (A, \beta, \gamma)$ — L -изотопия.

Такие квазигруппы существуют. Например, если в преобразовании F , определенном во введении формулой (1), функция f является операцией квазигруппы $V_n(f)$, изотопной группе $V_n(o)$, то нетрудно показать, что операция F имеет вид (10)

$$\begin{aligned} F((L_{i-1}, R_{i-1}), (K_i, K_{i+1})) \\ = (L_{i-1}, R_{i-1}) \oplus \bar{\gamma}^{-1}(A((L_{i-1}, R_{i-1}), (K_i, K_{i+1})) \bar{o} \bar{\beta}(K_i, K_{i+1})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A((L_{i-1}, R_{i-1}), (K_i, K_{i+1})) &= \bar{\alpha}(R_{i-1}, L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i)), \\ f(a, b) &= \gamma^{-1}(\alpha(a) \circ \beta(b)), \\ \bar{\gamma}^{-1}(a, b) &= (\gamma^{-1}(a), \gamma^{-1}(b)), \\ \bar{\beta}(a, b) &= (\beta(a), \beta(b)), \\ \bar{\alpha}(a, b) &= (\alpha(a), \alpha(b)), \\ (a, b) \circ (c, d) &= (a \circ c, b \circ d), \quad a, b, c, d \in V_n. \end{aligned}$$

Пусть (X_i, Y_j, Z_k) — конгруэнция на квазигруппе $G(\Phi)$, согласованная с двумя скрещенными изотопиями (e, B, e) и (A, β, γ) . Это означает, что для любых классов X_i, Y_j существует класс Z_k , удовлетворяющий соотношению

$$X_i \cdot \gamma^{-1}(A(X_i, Y_j) * \beta(Y_j)) \subset Z_k.$$

Положим $B_j^i = \gamma^{-1}(A(X_i, Y_j) * \beta(Y_j))$.

Лемма 8. При любом фиксированном i имеет место равенство

$$\bigcup_j B_j^i = G.$$

При любом фиксированном j имеет место равенство

$$\bigcup_i B_j^i = G.$$

Доказательство. При любом фиксированном x из того, что B — квазигруппа, вытекает равенство

$$\bigcup_{y \in G} B(x, y) = G.$$

Из этого равенства следует первое утверждение леммы.

Докажем теперь второе утверждение. Заметим, что равенство $\bigcup_i B_j^i = G$ эквивалентно равенству $\bigcup_i \gamma(B_j^i) = G$. Возьмем любой элемент $g \in G$ и любой элемент $y \in Y_j$. Рассмотрим уравнение $A(x, y) = [\beta(y)]^{-1} * g$ относительно x . Поскольку A обратима слева, существует $x \in X_i$, удовлетворяющий этому уравнению. Таким образом, для любого $g \in G$ найдется некоторое множество $\gamma(B_j^i)$ такое, что $g \in \gamma(B_j^i)$.

Лемма 9. Пусть даны

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i, \quad \bigsqcup_{k \in K} Z_k,$$

два разбиения произвольной конечной группы $G(\cdot)$ на классы эквивалентности, совокупность множеств B_j^i , образующих при фиксированном i покрытие группы G , т.е.

$$G = \bigcup_j B_j^i,$$

и для любой пары X_i, B_j^i найдется класс Z_k такой, что $X_i \cdot B_j^i \subset Z_k$.

Тогда классы эквивалентности X_i являются подмножествами в правых смежных классах группы $G(\cdot)$ по некоторой подгруппе H , а классы эквивалентности Z_k представляют собой объединение некоторых правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H .

Доказательство. Пусть $x_1 \in X_{i_1}$, $z_1 \in Z_k$. Выберем подмножество $B_j^{i_1}$, включающее элемент $x_1^{-1} \cdot z_1$. Тогда

$$X_{i_1} \cdot B_j^{i_1} \cap Z_k \ni z_1,$$

т.е. $X_{i_1} \cdot B_j^{i_1} \subset Z_k$. Следовательно, для любого $x_2 \in X_{i_1}$

$$x_2 \cdot x_1^{-1} \cdot z_1 \in Z_k.$$

Последовательно повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем, что для любой последовательности пар $x_1, x_2 \in X_{i_1}, x_3, x_4 \in X_{i_2}, \dots, x_{2s-1}, x_{2s} \in X_{i_s}$ имеет место соотношение $x_{2s} \cdot x_{2s-1}^{-1} \cdot \dots \cdot x_4 \cdot x_3^{-1} \cdot x_2 \cdot x_1^{-1} \in Z_k$. Следовательно, класс Z_k содержит правый смежный класс $H \cdot z_1$ группы $G(\cdot)$ по подгруппе

$$H = \text{gr}\langle X_i \cdot x_t^{-1}; x_t \in X_i, i \in I \rangle.$$

Таким образом, любой класс Z_k в силу произвольности элемента $z_1 \in Z_k$ является объединением некоторых правых смежных классов группы $G(\cdot)$ по подгруппе H .

Легко также видеть, что любой класс X_i является подмножеством смежного класса $H \cdot x$, $x \in X_i$.

Лемма 10. Пусть в условиях предыдущей леммы 9 группа $G(\cdot)$ абелева, и классы Z_k являются подмножествами в некоторых смежных классах группы $G(\cdot)$ по некоторой подгруппе H_0 . Тогда $H \subset H_0$ и множества B_j^i являются подмножествами в смежных классах группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_0 .

Доказательство. Из соотношения $X_i \cdot B_j^i \subset Z_k$ вытекает, что $B_j^i \subset X_i^{-1} \cdot Z_k$, но

$$X_i^{-1} \subset H \cdot x^{-1} \subset H_0 \cdot x^{-1}, \quad x \in X_i, \quad Z_k \subset H_0 \cdot z, \quad z \in Z_k,$$

поэтому $B_j^i \subset H_0 \cdot x^{-1} \cdot z$.

Заметим, что указанные в лемме 10 скрещенные конгруэнции представляют интерес с точки зрения построения алгоритмов решения уравнений вида (8) над алгебрами, n -арные операции которых представляют собой суперпозиции рассматриваемых квазигрупп.

Следствие 3. Если в условиях леммы 10 подгруппа H_0 собственная, то при любом j разбиение покрытия

$$G = \bigcup_i B_j^i$$

на связанные компоненты не тривиально.

Рассмотрим совокупность множеств $(A_j^i, \beta(Y_j), B_j^i)$, где $A_j^i = A(X_i, Y_j)$. Эти множества связаны соотношением

$$A_j^i * \beta(Y_j) = \gamma(B_j^i). \quad (11)$$

Заметим, что поскольку A обратима слева, при любом фиксированном j объединение $\bigcup_i A_j^i$ является покрытием группы $G(*)$. Обозначим через $\bar{B}_j^s$ связные компоненты покрытия $G = \bigcup_i B_j^i$, а через $\bar{A}_j^s$ соответствующие связные компоненты покрытия $G = \bigcup_i A_j^i$. Пусть, как и в условиях леммы 10, существует подгруппа $H_0 \subset G(\cdot)$ такая, что классы Z_k являются подмножествами в некоторых смежных классах группы $G(\cdot)$ по подгруппе H_0 . Тогда любое множество B_j^i , а значит, и любая связная компонента $\bar{B}_j^s$, содержится в некотором смежном классе $H_0 \cdot b_k$. Следовательно, учитывая равенство (11), можно утверждать, что совокупность множеств $(\bar{A}_j^s, \beta(Y_j), \gamma(H_0 \cdot b_k))$ удовлетворяет условиям леммы 9. Теперь применяя эту лемму, получаем следующее утверждение.

Предложение 6. В условиях леммы 10 существует подгруппа $Q \subset G(*)$ такая, что множество $\beta(Y_j)$ является подмножеством в некотором левом смежном классе $y_j * Q$, т.е. $\beta(Y_j) \subset y_j * Q$, и множество $\gamma(\bar{B}_j^i)$ является объединением некоторых левых смежных классов группы $G(*)$ по подгруппе Q .

Предложение 7. Если конгруэнция (X_i, Y_j, Z_k) такова, что H_0 из леммы 10 — собственная подгруппа в $G(\cdot)$, то сопутствующие подгруппы $H(\cdot)$ и $Q(*)$ также собственные соответственно в $G(\cdot)$ и $G(*)$.

Доказательство. Поскольку $H \subset H_0$, то $H(\cdot)$ — также собственная подгруппа в $G(\cdot)$.

Согласно следствию 3, если H_0 собственная подгруппа, то при любом j в покрытии $\bigcup_i \gamma(B_j^i)$ по крайней мере две связные компоненты $\gamma(\bar{B}_j^s)$. Тогда из второго пункта предложения 6 следует, что $Q(*)$ не может совпадать со всей группой $G(*)$.

Список литературы

1. Белоусов В. Д., Скрещенные изотопии квазигрупп. *Квазигруппы и их системы, Математические исследования.* (1990) **113**, 14–20.
2. Schneier B., *Applied Cryptography. Protocols, Algorithms and Source Code* in C. Wiley, New York, 1996.
3. Higgins Ph. J., Algebras with a scheme of operators. *Math. Nachr.* (1963) **27**, 115–132.
4. Горчинский Ю. Н., О гомоморфизмах многоосновных универсальных алгебр в связи с криптографическими применениями. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 67–84.
5. Hellman M., Merkle R., Schroepel R., Waschington L., Diffie W. Results of an initial attempt to cryptanalyze the NBS Data Encryption Standard. *Inform. Syst. Lab. Rep. SEL 76042*, Stanford Univ., 1976.
6. Meyer C. H., Ciphertext/plaintext and ciphertext/key dependencies vs. number of rounds for the data encryption standard. In: *AFJPS Conf. Proc.* 1978, p. 47.
7. Chaurn D., Evertse J. H., Cryptanalysis of DES with reduced number of rounds. Sequences of linear factors in block ciphers *Lect. Notes in Comput. Sci.* (1986) **218**, 192–211.
8. Шапошников И. Г., О конгруэнциях конечных многоосновных универсальных алгебр *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 48–62.
9. Кон П., *Универсальная алгебра.* Мир, Москва, 1968.
10. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп.* Наука, Москва, 1967.

Статья поступила 14.04.1999.