Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пазизин, Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 93–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:22:38

УДК 519.7

Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов

© 2000 г. С. В. Пазизин

Рассматривается задача определения вероятности правильного декодирования сообщения из нулей и единиц в случае, когда ноль кодируется вектором, случайно равновероятно выбранным из множества двоичных векторов длины m четного веса, а единица кодируется вектором, случайно равновероятно выбранным из множества двоичных векторов длины m нечетного веса. Показано, что результаты, полученные для исходной модели с аддитивным нормальным шумом, могут значительно отличаться от результатов для упрощенной двоичной модели.

В [1] рассматривался следующий способ кодирования: передаваемые сообщения $s_1, s_2, \dots$ из $\{0, 1\}$ кодируются векторами, выбранными случайно равновероятно и независимо из соответствующих множеств $V_m^{(s_1)}, V_m^{(s_2)}, \dots$, где $V_m^{(0)}$ — множество векторов из V_m четного веса, а $V_m^{(1)}$ из V_m нечетного веса. Здесь и далее через V_m обозначается множество всех двоичных векторов длины m .

Пусть при передаче сообщения $s \in \{0, 1\}$ наблюдается вектор

$$\mathbf{Y} = (\alpha X_1 + \xi_1, \dots, \alpha X_m + \xi_m),$$

где $\alpha > 0$, $X_1, \dots, X_m$ — случайный вектор с равновероятным распределением на $V_m^{(s)}$, а $\xi_1, \dots, \xi_m$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Будем предполагать, что имеется n независимых наблюдений $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$ случайного вектора $\mathbf{Y}$, то есть мы n раз наблюдаем передачу сигнала s .

Осуществив одноразрядную дискретизацию наблюдений, можно перейти от модели с аддитивным нормальным шумом к модели двоичного симметричного канала без памяти с вероятностью правильной передачи $(1 + \theta)/2$, где $\theta = 2\Phi(\alpha/2) - 1$ и $\Phi(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В этом случае произойдет замена наблюдений $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$ редуцированными наблюдениями $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$, полученными по правилу

$$\hat{Y}_i^{(t)} = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i^{(t)} > \alpha/2, \\ 0, & \text{если } Y_i^{(t)} \leq \alpha/2, \end{cases}$$

для $i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, n$.

Цель работы — сравнить вероятности правильного декодирования с помощью оптимальной процедуры для исходных наблюдений и редуцированных (двоичных) наблюдений.

Так как распределение наблюдений в обеих моделях однозначно определяется передаваемым сообщением, задача декодирования сводится к статистической задаче проверки двух простых гипотез

$$H_1: s = 1, \quad H_2: s = 0$$

о распределении имеющихся наблюдений ($\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$ в исходной модели и $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$ в двоичной модели). Если априорное распределение s на $\{0, 1\}$ равновероятно, то вероятность ошибки будет минимальной при декодировании по методу максимума правдоподобия.

Обозначим через μ_n вероятность правильного декодирования передаваемого сообщения s по методу максимума правдоподобия в исходной модели наблюдений, а через $\hat{\mu}_n$ — в двоичной модели наблюдений.

Значение $\hat{\mu}_n$ при $n \rightarrow \infty, \theta = \theta(n) \rightarrow 0$ и фиксированном m можно найти, воспользовавшись теоремой 2 из [1] об асимптотическом поведении логарифма отношения правдоподобия (ЛОП) в задаче проверки гипотез H_1 и H_2 по наблюдениям $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$. Кроме того, асимптотические оценки $\hat{\mu}_n$ можно было бы получить, воспользовавшись результатами работы [2], в которой рассматривается более общий случай проверки двух простых гипотез о распределении векторных наблюдений при малом отношении сигнал/шум. Однако, в данном конкретном случае легко найти выражение для $\hat{\mu}_n$, справедливое при любых соотношениях между θ, n и m , попутно получив нужные асимптотические оценки.

Теорема 1. Статистика

$$T_n = T_n(\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}) = \sum_{t=1}^n (-1)^{\hat{Y}_1^{(t)} \oplus \dots \oplus \hat{Y}_m^{(t)}}$$

является достаточной в задаче проверки гипотез H_1 и H_2 по наблюдениям $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$.

Среднее и дисперсия статистики T_n при гипотезе $H_\varepsilon, \varepsilon = 1, 2$, равны соответственно

$$\mathbf{E}_\varepsilon T_n = (-1)^\varepsilon \theta^m n, \quad \mathbf{D}_\varepsilon T_n = n(1 - \theta^{2m}).$$

Если $n \rightarrow \infty$ и $\mathbf{D}_\varepsilon T_n \rightarrow \infty$, то при гипотезе $H_\varepsilon, \varepsilon = 1, 2$, распределение статистики

$$\tilde{T}_n = \frac{(T_n - \mathbf{E}_\varepsilon T_n)}{\sqrt{\mathbf{D}_\varepsilon T_n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

Доказательство. Согласно критерию факторизации (см. [3], с. 129) достаточность статистики T_n в задаче проверки гипотез H_1 и H_2 по наблюдениям $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$ вытекает из справедливости представления

$$p_2(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = p_1(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \left(\frac{1 + \theta^m}{1 - \theta^m} \right)^{T_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)},$$

где

$$p_\varepsilon(y_1, \dots, y_n) = \mathbf{P}_\varepsilon\{\hat{\mathbf{Y}}^{(1)} = y_1, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)} = y_n\}, \quad y_1, \dots, y_n \in V_m, \quad \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Соотношения для среднего и дисперсии T_n очевидны ввиду независимости наблюдений $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$ и справедливости для всех $t = 1, \dots, n$ равенства

$$\mathbf{E}_\varepsilon(-1)^{\hat{Y}_1^{(t)} \oplus \dots \oplus \hat{Y}_m^{(t)}} = (-1)^\varepsilon \theta^m.$$

Для доказательства асимптотической нормальности статистики $\tilde{T}_n$ при $n \rightarrow \infty$ и $\mathbf{D}_\varepsilon T_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon = 1, 2$, достаточно представить $\tilde{T}_n$ в виде суммы

$$\tilde{T}_n = \sum_{t=1}^n \xi_t,$$

где

$$\xi_t = \frac{(-1)^{\hat{Y}_1^{(t)} \oplus \dots \oplus \hat{Y}_m^{(t)}} - (-1)^\varepsilon \theta^m}{\sqrt{n(1 - \theta^{2m})}},$$

и убедиться, что выполнено условие Линдеберга (см. [4], с. 185).

Так как статистика T_n является достаточной в задаче проверки гипотез H_1 и H_2 по наблюдениям $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n)}$, для вероятности правильного декодирования по методу максимального правдоподобия справедливо выражение

$$\hat{\mu}_n = \mathbf{P}_1\{T_n < 0\} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_1\{T_n = 0\},$$

благодаря которому доказательство следующих двух следствий теоремы 1 становится очевидным.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} (1 - \theta^m)^k (1 + \theta^m)^{n-k} \\ - I\{n/2 = [n/2]\} \binom{n}{[n/2]} \frac{(1 - \theta^{2m})^{[n/2]}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Следствие 2. *Если $n \rightarrow \infty$ и $n\theta^{2m} = c$, где c — положительная постоянная, то*

$$\hat{\mu}_n \rightarrow \Phi(\theta^m \sqrt{n}).$$

Вернемся к рассмотрению исходной модели с аддитивным нормальным шумом.

Заметим, что плотность распределения вектора наблюдений $\mathbf{Y}$ при гипотезе H_ε , $\varepsilon = 1, 2$, имеет следующий вид

$$p_\varepsilon(\mathbf{y}) = 2^{1-m} (2\pi)^{-m/2} \sum_{\mathbf{a} \in V_m^{(2-\varepsilon)}} \prod_{i=1}^m \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha a_i)^2}{2} \right\},$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, и справедливо представление

$$p_2(\mathbf{y}) - p_1(\mathbf{y}) = 2^{1-m}(2\pi)^{-m/2} \prod_{i=1}^m (\exp\{-y_i^2/2\} - \exp\{-(y_i - \alpha)^2/2\}). \quad (1)$$

Воспользовавшись (1), легко показать, что вероятность правильного декодирования передаваемого сообщения по методу максимума правдоподобия при $n = 1$ имеет вид

$$\mu_1 = \mathbf{P}_1 \left\{ \prod_{i=1}^m \left(\alpha/2 - Y_i^{(1)} \right) < 0 \right\} = \mathbf{P}_1 \{ \hat{Y}_1^{(1)} \oplus \dots \oplus \hat{Y}_m^{(1)} = 1 \}$$

и совпадает с $\hat{\mu}_1 = (1 + \theta^m)/2$, где $\theta = 2\Phi(\alpha/2) - 1$.

Исследуем предельное распределение ЛОП

$$L_n = \sum_{t=1}^n \ln \frac{p_2(\mathbf{Y}^{(t)})}{p_1(\mathbf{Y}^{(t)})}$$

в схеме серий при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha = \alpha(n)$.

Теорема 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и m фиксировано. Тогда при гипотезе H_ε , $\varepsilon = 1, 2$,

(1) распределение случайной величины

$$\tilde{L}_n = \frac{(L_n - \mathbf{E}_\varepsilon L_n)}{\sqrt{\mathbf{D}_\varepsilon L_n}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному распределению;

(2) для среднего и дисперсии статистики L_n справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\mathbf{E}_\varepsilon L_n \sim (-1)^\varepsilon 2n \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2m}, \quad \mathbf{D}_\varepsilon L_n \sim 4n \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2m}.$$

Здесь и далее, соотношение $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Оценим среднее и дисперсию $\xi = \ln(p_2(\mathbf{Y})/p_1(\mathbf{Y}))$ при гипотезе H_1 . Воспользовавшись разложением логарифма по формуле Тейлора, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \xi &\sim -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^m} \frac{(p_2(\mathbf{y}) - p_1(\mathbf{y}))^2}{p_1(\mathbf{y})} d\mathbf{y}, \\ \mathbf{E}_1 \xi^2 &\sim \int_{\mathbf{R}^m} \frac{(p_2(\mathbf{y}) - p_1(\mathbf{y}))^2}{p_1(\mathbf{y})} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Воспользовавшись (1) и заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\exp\{-y^2/2\} - \exp\{-(y - \alpha)^2/2\})^2}{\exp\{-y^2/2\}} dy \\ = \frac{\exp\{\alpha^2\}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y - 2\alpha)^2}{2}\right\} dy - 1 \sim \alpha^2, \end{aligned}$$

находим, что

$$\int_{\mathbf{R}^m} \frac{(p_2(\mathbf{y}) - p_1(\mathbf{y}))^2}{p_1(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \sim 2^{2-2m} \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\exp\{-y^2/2\} - \exp\{-(y-\alpha)^2/2\})^2}{\exp\{-y^2/2\}} dy \sim \alpha^{2m} 2^{2-2m}.$$

В итоге согласно (2) получаем, что

$$\mathbf{E}_1 \xi \sim -2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}, \quad \mathbf{D}_1 \xi \sim 4 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}.$$

Отсюда и из независимости наблюдений $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$ вытекает, что

$$\mathbf{E}_1 L_n = n \mathbf{E}_1 \xi \sim -2n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}, \quad \mathbf{D}_1 L_n = n \mathbf{D}_1 \xi \sim 4n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}. \quad (3)$$

Для доказательства нормальности L_n в континуальном случае, когда $n\alpha^{2m}$ — положительная постоянная, можно использовать результаты [5], однако, непосредственная проверка условия Ляпунова

$$n \mathbf{E}_1 \xi^4 = o((\mathbf{D}_1 L_n)^2) \quad (4)$$

позволяет наиболее коротким путем доказать асимптотическую нормальность $\bar{L}_n$ в случае, когда $n\alpha^{2m} \rightarrow 0$ или $n\alpha^{2m} \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись разложением логарифма по формуле Тейлора и соотношением (1), оценим для $\varepsilon = 1, 2$ величину

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\varepsilon \xi^4 &\sim \mathbf{E}_\varepsilon (p_2(\mathbf{Y})/p_1(\mathbf{Y}) - 1)^4 \\ &\sim 2^{4-4m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\exp\{-y_i^2/2\} - \exp\{-(y_i - \alpha)^2/2\}}{\exp\{-y_i^2/2\}} \right)^4 p_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &\sim 2^{4-4m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^m (\alpha y_i - \alpha^2/2)^4 p_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &\sim 2^{4-4m} \alpha^{4m} \sum_{\mathbf{a} \in V_m^{(2-\varepsilon)}} \prod_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} y_i^4 \exp\left\{-\frac{(y_i - \alpha a_i)^2}{2}\right\} dy_i. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\mathbf{E}_\varepsilon \xi^4 = O(\alpha^{4m}), \quad \varepsilon = 1, 2. \quad (5)$$

Отсюда, с учетом (3), следует (4). Поэтому при гипотезе H_1 статистика ЛОП асимптотически нормальна (при соответствующей нормировке и центрировке).

Если $n\alpha^{2m}$ — положительная постоянная, то, согласно [6], из асимптотической нормальности ЛОП при гипотезе H_1 с параметрами (3) вытекает асимптотическая нормальность ЛОП при гипотезе H_2 с параметрами

$$\mathbf{E}_2 L_n = n \mathbf{E}_1 \xi \sim 2n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}, \quad \mathbf{D}_2 L_n = n \mathbf{D}_1 \xi \sim 4n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2m}. \quad (6)$$

В силу независимости наблюдений выполнение соотношений (6) не зависит от поведения величины $n\alpha^{2m}$. Отсюда и из (5) вытекает выполнение условия Ляпунова при гипотезе H_2 . Следовательно, статистика $\tilde{L}_n$ асимптотически нормальна в условиях гипотезы H_2 и в случае, когда $n\alpha^{2m} \rightarrow 0$ или $n\alpha^{2m} \rightarrow \infty$.

Следствие 3. Если $n \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и m фиксировано, то

$$\mu_n \rightarrow \Phi((\alpha/2)^m \sqrt{n}).$$

Сравним при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$ оценки вероятности правильного декодирования, полученные для исходной модели с аддитивным нормальным шумом и для модели двоичного симметричного канала без памяти с вероятностью правильной передачи $\Phi(\alpha/2)$. В первом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \Phi(u_1),$$

где $u_1 = (\alpha/2)^m \sqrt{n}$, а во втором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n = \Phi(u_2),$$

где $u_2 = (\alpha/\sqrt{2\pi})^m \sqrt{n}$.

Рассмотрим отношение $(u_2/u_1)^2$, которое принято называть коэффициентом относительной асимптотической эффективности. Легко заметить, что в данном случае

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^m.$$

С другой стороны, известно, что при передаче детерминированных сигналов по каналу с аддитивным независимым нормальным шумом коэффициент относительной асимптотической эффективности равен $2/\pi$ (см., например, [7]).

Полученные результаты показывают, что переход к двоичным сигналам, часто используемый при анализе детерминированных сигналов на фоне независимого шума, при анализе случайных сигналов может привести к существенному снижению вероятности правильной классификации передаваемого сигнала.

Список литературы

1. Ошкин И. Б., Проскурин Г. В., Нижние оценки вероятности различения подмножеств единичного куба. *Пробл. передачи информ.* (1994) 30, №3, 15–22.
2. Пазизин С. В., Обнаружение и прием последовательности сигналов, искаженных случайной помехой и независимым шумом. *Пробл. передачи информ.* (1998) 34, №1, 46–55.
3. Боровков А. А., *Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез*. Наука, Москва, 1984.
4. Боровков А. А., *Теория вероятностей*. Наука, Москва, 1986.
5. Oosterhoff J., Van Zwet W. R., A note on contiguity and Hellinger distance. In: *Contribution to Statistics*. Academia, Prague, 1979, pp. 157–166.
6. Русас Дж., *Контигуальность вероятностных мер*. Мир, Москва, 1975.
7. Арбеков И. М., Оптимальная дискретизация наблюдений слабых сигналов при ограничении на скорость квантования. *Пробл. передачи информ.* (1998) 34, №1, 69–76.

Статья поступила 7.06.1999.