Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Стаматович, О распознавании лабиринтов автоматами, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 51–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:26:41

О распознавании лабиринтов автоматами

© 2000 г. Б. Стаматович

Изучается проблема существования автоматов, распознающих некоторые прямоугольные лабиринты. Доказывается отсутствие распознающего автомата для простых прямоугольных лабиринтов, что не имеет места для мозаичных лабиринтов. Приведен пример бесконечного класса π -лабиринтов, который не распознается автоматом.

1. Основные понятия и результаты

Основные понятия и обозначения из теории автоматов и теории графов, которыми мы пользуемся, совпадают с принятыми, соответственно, в [2, 3] и [4], и здесь не определяются.

Пусть X_α , $\alpha \in I$, — некоторое множество. Тогда через Pr_α обозначим отображение проектирования произведения $\prod_{\beta \in I} X_\beta$ на α -й сомножитель X_α .

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый граф, где V — множество его вершин и E — множество его дуг. Множество вершин V и множество дуг E графа L будем обозначать через $V(L)$ и $E(L)$.

Пусть Y — некоторое множество. Если задана некоторая функция $f: E \rightarrow Y$, то пара (L, f) называется нагруженным графом, множество Y — множеством меток, а f — разметкой (дуг) графа L . Элемент $f(e) \in Y$, где $e \in E$, называется меткой дуги e в нагруженном графе (L, f) .

Если в графе $L = (V, E)$ вместе с дугой (v_1, v_2) содержится дуга (v_2, v_1) , то называем эту пару ребром и обозначаем $\langle v_1, v_2 \rangle$. Граф называется симметрическим, если при $(v_1, v_2) \in E$ имеет место $\langle v_1, v_2 \rangle \subseteq E$.

Обозначим через D множество векторов $\{e, n, w, s\}$, где e и n — соответственно базисные единичные векторы двумерного Евклидова пространства, а векторы w и s равны, соответственно, этим базисным векторам с противоположным направлением. Будем писать $e^{-1} = w$, $n^{-1} = s$, $w^{-1} = e$ и $s^{-1} = n$.

Нагруженный связный симметрический граф (L, f) ($L = (V, E)$, $f: E \rightarrow Y$) без кратных дуг и петель называется 2-лабиринтом, или в последующем просто лабиринтом, если выполнены следующие условия:

- (1) $|V| \geq 2$ и $Y = D$,
- (2) для любых $x, y \in E$, $x \neq y$, если $\text{Pr}_1(x) = \text{Pr}_1(y)$, то $f(x) \neq f(y)$,
- (3) для любых $u, v \in V$, если $(u, v) \in E$, то $f((u, v)) = (f((v, u)))^{-1}$.

В последующем в обозначении лабиринта (L, f) будем опускать f , считая, что в любом конкретном случае f задана. Часто вместо L будем писать $(L; u)$ или L_u , $u \in V$, если в L отмечена одна вершина u , при этом она называется входом или началом лабиринта L , а лабиринт L инициальным.

Через $|x|_L$ обозначим значение f на дуге x лабиринта L . Если из контекста ясно, о каком лабиринте идет речь, то вместо $|x|_L$ будем писать $|x|$. Пусть v — вершина лабиринта $L = (V, E)$. Множество меток $\{|x| \mid x \in E_v\}$, где $E_v = \{x \in E \mid \text{Pr}_1(x) = v\}$, обозначим через $[v]_L$.

Пусть M и N , $M \neq N$, — некоторые точки плоскости и $\overline{MN} = \alpha_1 e + \alpha_2 n$, e и n — единичные координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Будем говорить, что отрезок $\overline{MN}$ идет в направлении e , если $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 = 0$, в направлении n , если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 > 0$, в направлении w , если $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 = 0$ и в направлении s , если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 < 0$. Множество T отрезков на плоскости называется конфигурацией, если любые два разных отрезка из этого множества могут иметь не больше одной общей точки, причем, если она у них есть, то она обязательно является концевой для обоих отрезков.

Лабиринт $L = (V, E)$, где $V \subseteq R^2$, называем прямоугольным лабиринтом, если для любых $u, v \in V$ из $(u, v) \in E$ отрезок $\overline{uv}$ идет в направлении $|(u, v)|$, а множество отрезков $T = \{\overline{uv} \mid (u, v) \in E\}$ является конфигурацией. Фигура $\bigcup_{(u,v) \in E(L)} \overline{uv}$ в R^2 называется реализацией прямоугольного лабиринта L .

Пусть Z^2 — целочисленная решетка на плоскости. Проведем через вершины Z^2 все возможные прямые, параллельные осям координат. Полученная фигура является реализацией прямоугольного лабиринта, который обозначим через Z^2 . Под мозаичным лабиринтом будем понимать любую связную часть (нагруженную) лабиринта Z^2 . Под шахматным лабиринтом будем понимать любой связный подграф (нагруженный) лабиринта Z^2 .

Назовем лабиринты L_1 и L_2 слабо изоморфными, если существует биекция $g: V(L_1) \rightarrow V(L_2)$ такая, что $(u, v) \in E(L_1)$ тогда и только тогда, когда $(g(u), g(v)) \in E(L_2)$, причем, если один из них с отмеченным входом, то таким является и другой и выполняется соотношение $g(v_0^1) = v_0^2$, где v_0^1 — вход лабиринта L_1 , а v_0^2 — вход лабиринта L_2 . Если еще $|(u, v)|_{L_1} = |(g(u), g(v))|_{L_2}$ для любой дуги $(u, v) \in E(L_1)$, то L_1 и L_2 называются изоморфными. Мы не различаем изоморфные лабиринты и в таком случае пишем, что $L_1 = L_2$.

Введем функцию расстояния d в Z^2 следующим способом. Для любых двух точек $u, v \in Z^2$ положим

$$d(u, v) = ((\text{Pr}_1(u) - \text{Pr}_1(v))^2 + (\text{Pr}_2(u) - \text{Pr}_2(v))^2)^{1/2}.$$

Для любого конечного множества $V \subseteq Z^2$ обозначим

$$\text{diam}(V) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ — произвольные элементы множества Z^2 . Говорим, что a и b (слабо) соседние, если $d(a, b) < 2$ $d(a, b) = 1$. Последовательность

$$a = p_0, p_1, \dots, p_m = b$$

в Z^2 называется (слабой) цепью, связывающей точку a и точку b , если точки p_{i-1} и p_i являются (слабо) соседними для любого i , $1 \leq i \leq m$. Множество V , $V \subseteq Z^2$, называется (слабо) связным, если для любых $a, b \in V$ существует (слабая) цепь в V ,

связывающая их. Компонентой (слабой) связности множества V называется любое максимальное (слабо) связанное подмножество множества V .

Любое отображение $c: Z^2 \rightarrow E^2$, $E^2 = \{1, 0\}$, такое, что $P_c = c^{-1}(\{1\})$ является связным множеством, называется π -лабиринтом. Если p_0 — произвольная точка в P_c , тогда пара (c, p_0) называется π -лабиринтом с началом p_0 . Если множество P_c является (конечным) бесконечным, то π -лабиринт называется (конечным) бесконечным. Далее под π -лабиринтом будем понимать конечный π -лабиринт. Дырой π -лабиринта c называется произвольная компонента слабой связности множества $Z^2 \setminus P_c$.

Автомат $A_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ называется допустимым, если A — множество всех непустых подмножеств множества $D = \{e, n, w, s\}$, $B = D \cup \{0\}$ и $\psi(q, a) \in a \cup \{0\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in A$. В дальнейшем предполагаем, что все автоматы являются допустимыми. Поведением автомата A_{q_0} в лабиринте L_{v_0} называем последовательность

$$\pi(A_{q_0}; L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \dots,$$

где $(v_i, v_{i+1}) \in E(L_{v_0})$ или

$$v_i = v_{i+1}, \quad q_{i+1} = \varphi(q_i, [v_i]_L), \quad \psi(q_i, [v_i]_L) = |v_i, v_{i+1}|, \quad i = 0, 1, \dots$$

Через $\pi(A_{q_0}; L_{v_0}; s)$ обозначим начальный отрезок длины s последовательности $\pi(A_{q_0}; L_{v_0})$. Последовательность $|(v_0, v_1)|, |(v_1, v_2)|, \dots$ обозначим через $\text{Tr}(A_{q_0}, L_{v_0})$. Пусть

$$\text{Int}(A_{q_0}, L_{v_0}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{v_i\}.$$

Если $\text{Int}(A_{q_0}, L_{v_0}) = V(L_0)$, то говорим, что автомат A_{q_0} обходит лабиринт L_{v_0} . Если для любого $u \in V(L)$ автомат A_{q_0} обходит лабиринт L_u , то говорим, что автомат A_{q_0} сильно обходит лабиринт L .

V_1 -поведением автомата A_{q_0} , $v_0 \in V_1 \subseteq V$, назовем подпоследовательность $(q_{i_0}, v_{i_0}), (q_{i_1}, v_{i_1}), \dots$ поведения $\pi(A_{q_0}; L_{v_0})$, которая получается из $\pi(A_{q_0}; L_{v_0})$, когда из него выбрасываются все пары (q_i, v_i) , для которых $v_i \notin V_1$. Определим для любого $V_1 \subseteq V$ значения

$$\text{st}(\pi, V_1), \quad \text{pl}(\pi, V_1), \quad \text{dr}(\pi, V_1), \quad \text{tm}(\pi, V_1),$$

где $\pi = \pi(A_{q_0}; L_{v_0})$, следующим образом. Если существует такое t , $t > 0$, что $v_t \in V_1$ и для любого t' , $0 < t' < t$, $v_{t'} \notin V_1$, то

$$\begin{aligned} \text{st}(\pi, V_1) &= q_t, & \text{pl}(\pi, V_1) &= v_t, \\ \text{dr}(\pi, V_1) &= \psi(q_t, [v_t]_L), & \text{tm}(\pi, V_1) &= t, \end{aligned}$$

в противном случае $\text{st}(\pi, V_1), \text{pl}(\pi, V_1), \text{dr}(\pi, V_1), \text{tm}(\pi, V_1)$ не определены.

Пусть $Q_F = \{q_{F_0}, q_{F_1}\}$ и $Q_F \subseteq Q(A_{q_0})$. Будем говорить, что автомат A_{q_0} распознает лабиринт L_v , если при его запуске в лабиринт L_v в итоге происходит переход в заключительное состояние q_{F_1} , а при его запуске в лабиринт $L'_v \neq L_v$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0} . Пусть $\mathcal{C}$ — класс инициальных лабиринтов. Говорим, что автомат A_{q_0} распознает класс $\mathcal{C}$, если при его запуске в любой лабиринт L_v происходит переход в заключительное состояние q_{F_1} тогда только тогда, когда $L_v \in \mathcal{C}$ и для любого лабиринта $L_v \notin \mathcal{C}$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0} .

Пусть c — произвольный π -лабиринт. Рассмотрим граф $G_c = (P_c, X_c)$, у которого P_c — множество вершин, X_c — множество дуг и $\langle p_1, p_2 \rangle \in X_c$ тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 из P_c — соседние точки.

Пусть $\mathbf{V} = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$ — упорядоченный набор различных ненулевых элементов из Z^2 и $\mathbf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ — произвольный инициальный автомат такой, что $B = V'$, $V' \subseteq \{0, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$ и $A = (E^2)^k$. Пару $(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ назовем пешкой, $\mathbf{V}$ — полем зрения этой пешки. Пешка $(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ называется регулярной, если ψ такое, что для произвольного $q \in Q$ и

$$a = (a_1, \dots, a_k) = (1, a_2, \dots, a_k) \in (E^2)^k$$

из того, что $\psi(q, a) = p_i$ для некоторого i , $0 \leq i \leq k-1$, следует, что $a_{i+1} = 1$, $p_0 = 0$.

Пусть даны регулярная пешка $(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ и π -лабиринт (c, p_0) ,

$$\mathbf{V} = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1}), \quad \mathbf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0).$$

Набор $\mathbf{V}$ определяет для каждого $z \in Z^2$ набор

$$\mathbf{V}(z) = (z, z + p_1, z + p_2, \dots, z + p_{k-1}).$$

Тогда поведением пешки $(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ в π -лабиринте (c, p_0) называется последовательность

$$\pi(\mathbf{A}, \mathbf{V}; c, p_0): (z_0, q_0, a_0, b_0), (z_1, q_1, a_1, b_1), \dots,$$

где

$$\begin{aligned} z_0 &= p_0, & z_{i+1} &= z_i + b_i, & q_{i+1} &= \varphi(q_i, a_i), \\ a_i &= c[\mathbf{V}(z_i)] = (c(z_i), c(z_i + p_1), \dots, c(z_i + p_{k-1})), & b_i &= \psi(q_i, a_i). \end{aligned}$$

Ясно, что если пешка $(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ регулярна, то $z_t \in P_c$ для любого t , $t = 0, 1, \dots$

В дальнейшем будем рассматривать только регулярные пешки, для которых

$$\mathbf{V} = ((1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, -1), (0, 1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1))$$

и $B = D \cup \{0\}$.

Пусть $L = (V, E; v_0)$ — некоторый инициальный лабиринт. Если для некоторого взаимно однозначного отображения μ множества V в плоскость существует такой прямоугольный лабиринт вида $L_1 = (\mu(V), E_1; \mu(v_0))$, что лабиринты L и L_1 являются изоморфными, причем μ определяет этот изоморфизм, то говорим, что лабиринт L вложим. В случае, когда L вложим, отображение μ называется укладкой. Ясно, что если при фиксированном μ существует L_1 , то он единствен. Исходя из этого, под укладкой будем иногда понимать L_1 или даже $\bar{L}_1$. Далее ясно, что если лабиринт L является деревом, то он вложим.

Пусть лабиринт $L = (V, E)$ такой, что

$$V = V_x \cup V_y, \quad V_x \cap V_y = \emptyset, \quad |V_x| = |V_y| = k,$$

где $k \geq 2$ и $V_x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $V_y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Лабиринт L называется w -лестницей, $w \in \{e, n\}$, если существует укладка μ , такая что $\text{Pr}_m(\mu(x_i)) = \text{Pr}_m(\mu(x_j))$, $\text{Pr}_m(\mu(y_i)) = \text{Pr}_m(\mu(y_j))$, $\text{Pr}_n(\mu(x_s)) = \text{Pr}_n(\mu(y_s))$, $i \neq j$, $i, j, s \in$

$\{1, \dots, k\}$, и если $\text{Pr}_n(\mu(x_{i_1})) < \text{Pr}_n(\mu(x_{i_2})) < \dots < \text{Pr}_n(\mu(x_{i_k}))$, $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$, то

$$E = \{\langle x_{i_{j-1}}, x_{i_j} \rangle, \langle x_{i_j}, x_{i_{j+1}} \rangle \mid j = 2, \dots, k-1\} \\ \cup \{\langle y_{i_{j-1}}, y_{i_j} \rangle, \langle y_{i_j}, y_{i_{j+1}} \rangle \mid j = 2, \dots, k-1\} \cup \{\langle x_i, y_i \rangle \mid i = 1, \dots, k\},$$

где $(m, n) = (1, 2)$, если $w = n$, и $(m, n) = (2, 1)$, если $w = e$ (лабиринт L называем лестницей, если он e -лестница или n -лестница).

Пусть $L_1 = (V_1, E_1)$ и $L_2 = (V_2, E_2)$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, суть произвольные лабиринты, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ и $[x_1]_{L_1} \cap [x_2]_{L_2} = \emptyset$. Пусть $V'_2 = V_2 \setminus \{x_2\}$. Пусть лабиринт $L(x_1) = (V_2(x_1), E_2(x_1))$, где $V_2(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_1\} \times V'_2$, такой, что отображение

$$i: V_2 \rightarrow V_2(x_1), \quad i(x_2) = x_1, \quad i(x) = (x_1, x), \quad x \in V'_2,$$

определяет изоморфизм лабиринтов L_2 и $L(x_1)$. Тогда через

$$L_1 +_{x_1, x_2} L_2$$

обозначим лабиринт

$$(V_1 \cup V_2(x_1), E_1 \cup E_2(x_1)),$$

причем, если $u \in E_1$, то $|u| = |u|_{L_1}$, а если $u \in E_2(x_1)$, то $|u| = |u|_{L_2}$. Если в L_1 отмечен вход, то в лабиринте $L_1 +_{x_1, x_2} L_2$ отмечен тот же самый вход. Скажем, что лабиринт $L_1 +_{x_1, x_2} L_2$ получаем склеиванием вершин x_1 и x_2 лабиринтов L_1 и L_2 . В [2] показано, что если L_1, L_2 суть вложимые лабиринты такие, что L_2 является деревом, то лабиринт $L_1 +_{x_1, x_2} L_2$ вложим.

Пусть $\mathcal{S}$ есть множество лабиринтов $L = (V, E)$ таких, что L — лестница или существуют $x_1, \dots, x_s \in V$, лабиринты дерева $L_1, \dots, L_s$ и лабиринт-лестница L' такие, что

$$L = L' +_{x_1, x^1} L_1 +_{x_2, x^2} \dots +_{x_s, x^s} L_s,$$

где $x_1, \dots, x_s \in V(L')$, $x^i \in V(L_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Скажем, что лабиринт L является ε -вложимым, если существует укладка μ лабиринта L такая, что $\text{diam}(\mu(V(L))) < \varepsilon$. Ясно, что если лабиринт L есть дерево или лестница, то L является ε -вложимым для каждого $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. Если лабиринт $L = (V, E) \in \mathcal{S}$, то для каждого $v \in V$ не существует автомат, который распознает лабиринт L_v .

Теорема 2. Если $L = (V, E)$ — мозаичный лабиринт, то существует автомат, который распознает класс $\{L_v \mid v \in V\}$.

Пусть $\mathbf{P}$ — множество таких $K \subseteq \mathbb{Z}^2$, что K — связное конечное множество, для которого множество $\mathbb{Z}^2 \setminus K$ связно.

Если множество $K \in \mathbf{P}$, то границей ∂K множества K будем называть множество точек $z \in K$, для которых существует точка z'' в $\mathbb{Z}^2 \setminus K$ такая, что z и z''

Рис. 1.

слабо соседние. Вокруг каждой точки $z = (z_1, z_2) \in \partial K$ рассмотрим квадрат kv_z с единичной длиной сторон (см. рис. 1). Его стороны обозначим через $\alpha, \beta, \chi, \delta$:

$$\alpha = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid z_1 - 1/2 \leq x_1 \leq z_1 + 1/2, x_2 = z_2 + 1/2\},$$

$$\beta = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid z_1 - 1/2 \leq x_1 \leq z_1 + 1/2, x_2 = z_2 - 1/2\},$$

$$\chi = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = z_1 - 1/2, z_2 - 1/2 \leq x_2 \leq z_2 + 1/2\},$$

$$\delta = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = z_1 + 1/2, z_2 - 1/2 \leq x_2 \leq z_2 + 1/2\}.$$

Стороны $\alpha, \beta, \chi, \delta$ квадрата kv_z , $z \in K$, имеют такое свойство: сторона находится между точками множества K и множества $\mathbf{Z}^2 \setminus K$, если точки $(z_1, z_2 + 1)$, $(z_1, z_2 - 1)$, $(z_1 - 1, z_2)$, $(z_1 + 1, z_2)$ не принадлежат множеству K , соответственно. Пусть st_z — множество сторон квадрата kv_z , для которых сторона находится между точками множества K и множества $\mathbf{Z}^2 \setminus K$. Фигура

$$F_K = \bigcup_{z \in \partial K} st_z$$

представляет собой прямоугольный полигон.

Пусть $K \subset \mathbf{Z}^2$ — конечное связное множество. Самая нижняя и самая правая точка (НП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$ или $z_2 < a_2$, или, если $z_2 = a_2$, то $z_1 > a_1$. Самая нижняя и самая левая точка (НЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$ или $z_2 < a_2$, или, если $z_2 = a_2$, то $z_1 < a_1$. Самая высокая и самая правая точка (ВП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$ или $z_2 > a_2$, или, если $z_2 = a_2$, то $z_1 > a_1$. Самая высокая и самая левая точка (ВЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$ или $z_2 > a_2$, или, если $z_2 = a_2$, то $z_1 < a_1$.

Пусть $(S)^*$ — множество всех слов $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(k)$, $k \geq 4$, над алфавитом $S = \{-1, 1\}$. Определим отображение $f: \mathbf{P} \rightarrow (S)^*$ следующим образом. Пусть $P \in \mathbf{P}$. Обходя полигон F_P в положительном направлении, начиная от самой нижней и самой правой точки, пронумерим вершины полигона F_P , сопоставляя им -1 , если угол в вершине равен $\pi/2$, и 1 , если он равен $-\pi/2$.

Рис. 2.

Определим следующие семейства множеств (рис. 2):

$$\Phi_1 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(-1,1)^n - 1 - 1(1,-1)^k - 1), k, n \geq 0\},$$

$$\Phi_2 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(1,-1)^n - 1 - 1(1,-1)^k - 1), k, n \geq 0\},$$

$$\Phi_3 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(-1,1)^n - 1 - 1(-1,1)^k - 1), k, n \geq 0\},$$

$$\Phi_4 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(1,-1)^n - 1 - 1(-1,1)^k - 1), k, n \geq 0\},$$

где $(a,b)^n$ обозначает произведение $(ab)(ab) \dots (ab)$, состоящее из n сомножителей, $n \in \mathbf{N}$.

Если $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbf{Z}^2$, $j = 1, 2, 3, 4$, такие, что $y_2 = y_3$, $y_1 = y_4$ и $y_1 \leq y_2$, то пусть $A_{\Phi_1}^{z_1, z_2, z_3, z_4}$ — множество таких $K \in \Phi_1$, что z_1, z_2, z_3, z_4 — НП, ВП, ВЛ, НЛ точки множества K , соответственно, $i = 1, \dots, 4$.

Пусть $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{Z}^2$, $i = 1, 2, \dots, 16$, имеют следующее свойство 0:

$$\begin{aligned}
 y_9 &= y_{16} = y_{11} = y_2, \\
 x_9 &\leq x_{16} < x_{11} - 1, & x_{11} &\leq x_2, \\
 y_4 &> y_3 > y_2, \\
 x_7 &\leq x_{14} < x_{13} - 1, & x_{13} &\leq x_4, \\
 y_7 &> y_8 > y_9.
 \end{aligned}$$

Тогда $K_0^{\{z_i, i=1, \dots, 16\}}$ есть множество таких $K \in \mathbf{P}$, что

$$K = K_1^0 \cup K_2^0 \cup K_3^0 \cup K_4^0 \cup K_5^0 \cup K_6^0,$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1^0 &\in A_{\Phi_4}^{z_1, z_2, z_9, z_{10}}, & K_2^0 &\in A_{\Phi_2}^{z_2, z_3, z_{12}, z_{11}}, \\
 K_3^0 &\in A_{\Phi_3}^{z_3, z_4, z_{13}, z_{12}}, & K_4^0 &\in A_{\Phi_1}^{z_4, z_5, z_6, z_7}, \\
 K_5^0 &\in A_{\Phi_2}^{z_{15}, z_{14}, z_7, z_8}, & K_6^0 &\in A_{\Phi_3}^{z_{16}, z_{15}, z_8, z_9},
 \end{aligned}$$

Рис. 3.

и выполнены условия

$$\begin{aligned}
 (x_1 = x_{10}) &\Rightarrow (z_1 + (1, 1) \in K_1^0 \wedge z_1 + (-1, 1) \in K_1^0), \\
 (z_3 + (0, 1) \notin K_3^0 \wedge z_3 + (0, -1) \notin K_2^0) &\Rightarrow (z_3 + (-1, 1) \in K_3^0 \vee z_3 + (-1, -1) \in K_2^0), \\
 (x_5 = x_6) &\Rightarrow (z_5 + (1, -1) \in K_4^0 \wedge z_5 + (-1, -1) \in K_4^0), \\
 (z_8 + (0, 1) \notin K_5^0 \wedge z_8 + (0, -1) \notin K_6^0) &\Rightarrow (z_8 + (1, 1) \in K_5^0 \vee z_8 + (1, -1) \in K_6^0).
 \end{aligned}$$

Определим класс π -лабиринтов $\mathbf{C}_0$, полагая

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_0 = \{c: Z^2 \rightarrow E^2 \mid c^{-1}(\{1\}) = K \in K_0^{\{z_i, i=1, \dots, 16\}}, \\
 z_i \in Z^2, i = 1, \dots, 16, \text{ и выполняется условие } 0\}
 \end{aligned}$$

Теорема 3. *Не существует пешки, которая распознает класс π -лабиринтов*

$$(\mathbf{C}_0, \text{НП}) = \{(c, \text{рнп}) \mid c \in \mathbf{C}_0,$$

рнп — самая нижняя и самая правая точка множества $c^{-1}(\{1\})\}$.

2. Доказательство теоремы 1

Предположим, что лабиринт $L = (V, E)$ есть n -лестница. Пусть автомат

$$\mathbf{A}q_0 = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$$

распознает лабиринт $L = (V, E; v_0)$ для некоторого $v_0 \in V$. Если $v \in V$, то обозначим через $nm(v)$ число появлений вершины v в последовательности $\pi(\mathbf{A}q_0; L_{v_0}; t)$, где $t \geq 0$ такое, что $\varphi(q_t, [v_t]) = q_{F_1}$. Пусть $n = \max\{nm(v) \mid v \in V\}$. Пусть $u, v \in V$ такие, что $[u] = \{e, s\}$ и $[v] = \{w, s\}$ ($\langle u, v \rangle \in E$). Пусть

$$\begin{aligned}
 L' &= (V', E'), \quad V' = V \cup \{x, y\}, \\
 E' &= \langle u, y \rangle \cup \langle v, x \rangle \cup E \setminus \langle u, v \rangle, \quad [(u, y)] = e, \quad [(v, x)] = w.
 \end{aligned}$$

Пусть

$$L^y = L' \setminus \{x\}, \quad L^x = L' \setminus \{y\}$$

и

$$L_1 = \left(\left(\left(L'_{y,z^1} + L^{y^1}_k \right)_{y^1_k, z^2} + L^{y^2}_k \right)_{y^2_k, z^3} \dots + L^{y^{n+1}}_k \right),$$

где лабиринт $L^{y^i}_k$ изоморфен лабиринту L^y и получен переобозначением $f_i: V(L^y) \rightarrow V(L^{y^i}_k)$, при этом $f_i(y) = y^i_k$ и $f_i(v) = z^i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Пусть

$$\tilde{L} = \left(\left(\left(L_{x,w^1} + L^{x^1}_k \right)_{x^1_k, w^2} + L^{x^2}_k \right)_{x^2_k, w^3} \dots + L^{x^{n+1}}_k \right),$$

где лабиринт $L^{x^i}_k$ изоморфен лабиринту L^x и получен переобозначением $g_i: V(L^x) \rightarrow V(L^{x^i}_k)$, при этом $g_i(y) = x^i_k$ и $g_i(v) = w^i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Требуется показать, что лабиринт $\tilde{L}$ вложим.

Пусть μ — укладка лабиринта L такая, что

$$\mu(V(L)) = \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\},$$

$$\text{Pr}_1(x_i) = \text{Pr}_1(x_j), \text{Pr}_1(y_i) = \text{Pr}_1(y_j), \text{Pr}_2(x_s) = \text{Pr}_2(y_s), i \neq j, i, j, s \in \{1, \dots, k\},$$

и

$$\text{Pr}_2(x_1) < \text{Pr}_2(x_2) < \dots < \text{Pr}_2(x_k).$$

Предположим также, что $\text{Pr}_1(y_1) > \text{Pr}_1(x_1)$ (см. рис. 4а).

Пусть $x, y \in \mathbf{R}^2$ такие, что

$$\text{Pr}_2(y_k) = \text{Pr}_2(y) = \text{Pr}_2(x) = \text{Pr}_2(x_k), \quad \text{Pr}_1(x_k) < \text{Pr}_1(y) < \text{Pr}_1(x) < \text{Pr}_1(y_k).$$

Удалим отрезок $\overline{yx}$. Таким способом мы определили укладку лабиринта L' (см. рис. 4б).

Пусть μ' — укладка лабиринта L такая, что

$$\mu'(V(L)) = \{x^1_1, \dots, x^1_k, y^1_1, \dots, y^1_k\},$$

$$\text{Pr}_1(x^1_i) = \text{Pr}_1(x^1_j), \text{Pr}_1(y^1_i) = \text{Pr}_1(y^1_j), \text{Pr}_2(x^1_s) = \text{Pr}_2(y^1_s), i \neq j, i, j, s \in \{1, \dots, k\}$$

и

$$\text{Pr}_2(x^1_1) < \text{Pr}_2(x^1_2) < \dots < \text{Pr}_2(x^1_k).$$

Предположим, что $\text{Pr}_1(y^1_1) > \text{Pr}_1(x^1_1)$. Пусть $x \in \mathbf{R}^2$ такой, что

$$\text{Pr}_2(y^1_k) = \text{Pr}_2(y) = \text{Pr}_2(x^1_k), \quad \text{Pr}_1(x^1_k) < \text{Pr}_1(y) < \text{Pr}_1(y^1_k).$$

Удалим отрезок $\overline{yy^1_k}$. Пусть $z_1 \in \mathbf{R}^2$ такой, что

$$\text{Pr}_2(z^1_1) > \text{Pr}_2(y^1_k), \quad \text{Pr}_1(z^1_1) = \text{Pr}_1(y^1_k).$$

Удалим отрезок $\overline{y^1_{k-1}y^1_k}$ и добавим отрезок $\overline{y^1_{k-1}z^1_1}$. Этим способом мы определили укладку μ_1 лабиринта $L^{y^1}_k$ (см. рис. 4в) (вершину y можем сейчас обозначить через y^1_k) и можем предположить, что

$$\text{diam}(\mu^1(V(L^{y^1}_k))) < \min\{d(u, v) \mid u, v \in \mu(V(L))\}.$$

Рис. 4.

Сдвигая прямоугольный лабиринт $\overline{L^{y_k^1}}$ на вектор $\alpha = \overline{z^1 y}$, получим укладку лабиринта $L' + L^{y_k^1}$.

Лабиринт $L^{y_k^1}$ можем вложить в плоскость, как показано на рис. 4в, предполагая, что

$$\text{diam}(V(\overline{L^{y_k^1}})) < \text{diam} \left(V \left(\left(\left(\left(L' + L^{y_k^1} \right)_{y, z^1} \right)_{y_k^1, z^2} \right)_{y_k^2, z^3} \dots \left(L^{y_k^{i-1}} \right)_{y_k^{i-1}, z^{i-1}} \right) \right),$$

где $y_k^0 = y$, $i \in \{2, \dots, n+1\}$.

Этим способом мы получаем укладку лабиринта L_1 (см. рис. 4г).

Лабиринты $L^{x_k^i}$, изоморфные лабиринту L^x , можно вложить в плоскость так,

как показано на рис. 4д, предполагая, что

$$\text{diam}(V(\overline{L^{x_k^1}})) \leq \text{diam}(V(\overline{L^{y_k^1}})).$$

Плоская укладка лабиринта $\tilde{L}$ изображена на рис. 4е.

Автомат A_{q_0} останавливается в лабиринте $\tilde{L}$ и при этом

$$\text{Tr}(A_{q_0}; (L; v_0)) = \text{Tr}(A_{q_0}; (\tilde{L}; v_0)).$$

В случае, когда лабиринт L есть ϵ -лестница и $\bar{L}$ — одна из его реализаций, поворотом фигуры $\bar{L}$ на угол $\pi/2$ вокруг любой вершины $x \in V(\bar{L})$ получаем фигуру $\bar{L}'$, которая является реализацией n -лестницы.

В случае, когда

$$L = L'_{x_1, x^2} + L_1_{x_2, x_2} + \dots + L_s_{x_s, x^s},$$

доказательство аналогично, лишь с той разницей, что при укладывании лабиринта $\bar{L}$ дерево L_i и ему изоморфные деревья нужно укладывать так, что их диаметры достаточно малы, $1 \leq i \leq s$. Плоская укладка лабиринта L изображена на рис. 4ж (лабиринты деревьев L_i , $1 \leq i \leq s$, ϵ -вложимы для каждого $\epsilon > 0$, что изображается символом $\bullet$).

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Если $p = y_0(y_0y_1)y_1(y_1y_2)\dots y_{m-1}(y_{m-1}y_m)y_m$ — маршрут в графе $L = (V, E)$, обозначим через $d(p)$ длину маршрута p , а через $[p]_i$ — ребро $(y_{i-1}y_i)$ этого маршрута. Пусть

$$p_1 = v_1(v_1v_{i_1}^1)v_{i_1}^1 \dots v_{i_{s_1-1}}^1(v_{i_{s_1-1}}^1v_{i_{s_1}}^1)v_{i_{s_1}}^1,$$

...

$$p_n = v_n(v_nv_{i_1}^n)v_{i_1}^n \dots v_{i_{s_n-1}}^n(v_{i_{s_n-1}}^nv_{i_{s_n}}^n)v_{i_{s_n}}^n$$

суть маршруты в графе $L = (V, E)$ такие, что

$$\{v_p\} \bigcup_{j=1}^{s_p} v_{i_j}^p = V, \quad p \in \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $x_i \subseteq D$, $i \in \{1, \dots, l\}$ такие, что $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$, и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует $j \in \{1, \dots, l\}$ такое, что $[v_i]_L = x_j$. Пусть $f: P \rightarrow X$, где $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $X = \{x_1, \dots, x_l\}$, определено через $f(p_i) = [v_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $[f]x_i = \{p \in P \mid f(p) = x_i\}$. Пусть $||[f]x_i|| = n_i$ и $[f]x_i = \{p_1^i, \dots, p_{n_i}^i\}$, $i \in \{1, \dots, l\}$.

Пусть $A_{p_j} = (A, Q_j, B, \varphi_j, \psi_j, q_1^j)$ — инициальный автомат, где

$$Q_j = \{q_1^j, \dots, q_{s_j+1}^j, q_2^{-j}, \dots, q_{s_j+1}^{-j}\} \cup Q_F, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

такой, что

$$\begin{aligned}
 \varphi_j(q_k^j, [v_{i_{k-1}}^j]) &= q_{k+1}^j, & \psi_j(q_k^j, [v_{i_{k-1}}^j]) &= |v_{i_{k-1}}^j v_{i_k}^j|, \\
 \varphi_j(q_k^j, a) &= q_k^{-j}, & \psi_j(q_k^j, a) &= |v_{i_{k-1}}^j v_{i_k}^j|^{-1}, \quad a \neq [v_{i_{k-1}}^j], \quad k \in \{2, \dots, s_j\}, \\
 \varphi_j(q_1^j, [v_j]) &= q_2^j, & \psi_j(q_1^j, [v_j]) &= |v_j v_{i_1}^j|, \\
 \varphi_j(q_1^j, a) &= q_{F_0}, & \psi_j(q_1^j, a) &= 0, \quad a \neq [v_j], \\
 \varphi_j(q_{s_j+1}^j, [v_{i_{s_j}}^j]) &= q_{F_1}, & \psi_j(q_{s_j+1}^j, [v_{i_{s_j}}^j]) &= 0, \\
 \varphi_j(q_{s_j+1}^j, a) &= q_{s_j+1}^{-j}, & \psi_j(q_{s_j+1}^j, a) &= |v_{s_j-1}^j v_{s_j}^j|^{-1}, \quad a \neq [v_{i_{s_j}}^j], \\
 \varphi_j(q_k^{-j}, [v_{i_{k-2}}^j]) &= q_{k-1}^{-j}, & \psi_j(q_k^{-j}, [v_{i_{k-2}}^j]) &= |v_{i_{k-3}}^j v_{i_{k-2}}^j|^{-1}, \quad k \in \{4, \dots, s_j + 1\}, \\
 \varphi_j(q_3^{-j}, [v_{i_1}^j]) &= q_2^{-j}, & \psi_j(q_3^{-j}, [v_{i_1}^j]) &= |v_{i_1}^j v_j|^{-1}, \\
 \varphi_j(q_2^{-j}, a) &= q_{F_0}, & \psi_j(q_2^{-j}, a) &= 0.
 \end{aligned}$$

Заметим, что автомат $\mathbf{A}p_j$ распознает лабиринт $Lv_j = (V; v_j)$, и при этом, если мозаичный лабиринт L_v , $L_v \neq Lv_j$, то в обходе лабиринта L_v автомат $\mathbf{A}p_j$ вернется в вершину v , $j \in \{1, \dots, n\}$. Через $q_i(\mathbf{A}p_j)$ обозначим состояние $q_{|i|}^{\text{sign}(i)j}$ автомата

$$\mathbf{A}p_j, i \in \{1, \dots, s_j + 1, -2, \dots, -(s_j + 1)\}$$

(это обозначение используем и для состояния автомата $\mathbf{A}q_0$; автомат $\mathbf{A}q_0$ определим ниже).

Определим автомат $\mathbf{A}q_0 = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где

$$Q = \{q_0\} \bigcup_{j=1}^k Q_j \setminus \{q_1^j\},$$

следующим образом.

Пусть $m \in \{1, \dots, l\}$,

$$\begin{aligned}
 \varphi(q_0, x_m) &= q_2(\mathbf{A}p_1^m), & \psi(q_0, x_m) &= |[p_1^m]_1|_L, \\
 \varphi(q_0, a) &= q_{F_0}, & \psi(q_0, a) &= 0, \quad a \notin X, \\
 \varphi(q_{-2}(\mathbf{A}p_i^m), x_m) &= q_2(\mathbf{A}p_{i+1}^m), & \psi(q_0, x_m) &= |[p_{i+1}^m]_1|_L, \quad i \in \{1, \dots, n_m - 1\}, \\
 \varphi(q_{-2}(\mathbf{A}p_{n_m}^m), x_m) &= q_b(q_{-2}(\mathbf{A}p_{n_m}^m), x_m), & \psi(q_{-2}(\mathbf{A}p_{n_m}^m), x_m) &= \psi_b(q_{-2}(\mathbf{A}), x_m),
 \end{aligned}$$

где b такое, что $p_b = p_{n_m}^m$,

$$\varphi(q_j^i, a) = \varphi_i(q_j(\mathbf{A}p_i), a), \quad \psi(q_j^i, a) = \psi_i(q_j(\mathbf{A}p_i), a),$$

для $j \in \{2, \dots, s_i + 1, -3, \dots, -(s_i + 1)\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть $z \in K \subseteq \mathbf{Z}^2$. Положим

$$z_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & z + (i, j) \in K, \\ 0, & z + (i, j) \notin K, \end{cases}$$

$i, j \in \{0, 1, -1\}$. Ясно что $z_{(0,0)} = 1$. Пусть

$$O(z) = (z_{(1,-1)}, z_{(1,0)}, z_{(1,1)}, z_{(0,-1)}, z_{(0,1)}, z_{(-1,-1)}, z_{(-1,0)}, z_{(-1,1)}) \in \{0, 1\}^8$$

— окрестность точки $z \in K$ и

$$O(z) = \{z + (i, j) \mid z_{(i,j)} = 1, \quad i, j \in \{0, 1, -1\}\}.$$

Пусть

$$a = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq D, \quad 1 \leq p \leq 4, \quad \lambda \in N, \quad \lambda > 2.$$

Через $L(a, x_0, \lambda)$ обозначим следующее семейство инициальных π -лабиринтов $L = (V(L), x_0)$, где

$$V(L) = [x_0, x_0 + \lambda w_1] \cup \dots \cup [x_0, x_0 + \lambda w_p] \cup O(x_0 + \lambda w_1) \cup \dots \cup O(x_0 + \lambda w_p),$$

и $O(x_0 + \lambda w_i)$ такие, что

$$\text{если } w_i = e, \text{ то } O(x_0 + \lambda w_i) = (*, *, *, *, *, 0, 1, 0),$$

$$\text{если } w_i = n, \text{ то } O(x_0 + \lambda w_i) = (0, *, *, 1, *, 0, *, *),$$

$$\text{если } w_i = w, \text{ то } O(x_0 + \lambda w_i) = (0, 1, 0, *, *, *, *, *),$$

$$\text{если } w_i = s, \text{ то } O(x_0 + \lambda w_i) = (*, *, 0, *, 1, *, *, 0), \text{ где } * \in \{0, 1\}.$$

Точки $x_0 + jw_i$ обозначим через w_i^j , $j \in \{0, 1, \dots, \lambda\}$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Через $L(a, x_0, \lambda, O_1, \dots, O_p)$ обозначим инициальный π -лабиринт из семейства $L(a, x_0, \lambda)$, в котором известны окрестности концевых точек $O_i = O(w_i^\lambda)$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Через $V(a)$ обозначим множество $\{x_0, w_1^\lambda, \dots, w_p^\lambda\}$.

Лемма 1. Пусть $A = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — произвольная пешка, $\|Q\| \geq 3$. Тогда для любых $q \in Q$, $a = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq D$, $n, m \in N$, если $\lambda = \|Q\|!$, то в случае, когда $st(\pi', V(a))$ определено,

$$st(\pi, V(a)) = st(\pi', V(a)), \quad pl(\pi', V(a)) = pl(\pi, V(a)),$$

где

$$\pi = \pi(A, L(a, x_0, n\lambda, O_1, \dots, O_p), \quad \pi' = \pi(A, L(a, x_0, m\lambda, O_1, \dots, O_p).$$

Доказательство. Достаточно показать, что утверждение леммы имеет место для $m = 1$.

Если $pl(\pi', V(a)) = x_0$, то достаточно рассмотреть два случая: автомат A не находился в точке $w_s^{\lambda-1}$ и автомат A находился в точке $w_s^{\lambda-1}$ для некоторого $s \in \{1, \dots, p\}$.

В первом случае ясно, что $pl(\pi, V(a)) = x_0$ и $st(\pi, V(a)) = st(\pi', V(a))$. Рассмотрим второй случай. Пусть

$$\begin{aligned} q_1^{k'} &= st(\pi', w_s^{k'}), & 0 \leq k' \leq \lambda - 1, \\ q_2^{k''} &= st(\pi, w_s^{k''}), & 0 \leq k'' \leq n\lambda - 1 \end{aligned}$$

(пока мы не можем утверждать, что значения $q_2^{k''}$, $1 \leq k'' \leq n\lambda - 1$, определены, но из последующего это будет ясно).

Ясно, что $q_1^k = q_2^k$, для $0 \leq k \leq \lambda - 1$. Из того, что $\lambda - 2 > \|Q\|$, следует, что $q_1^{\lambda-1} = q_1^k$ для некоторого $k \in \{2, \dots, \lambda - 2\}$. Отсюда, $q_2^{k''}$ определено, $\lambda - 1 < k'' < n\lambda$. Пусть $k_{\max} = \max\{k \in \{2, \dots, \lambda - 2\} \mid q_1^{\lambda-1} = q_1^k\}$. Тогда $\lambda - 1 - k_{\max} \leq \|Q\|$ и при этом $q_2^{\lambda-1} = q_2^{\lambda-1+j(\lambda-1-k_{\max})}$ для всех $j \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $\lambda - 1 + j(\lambda - 1 - k_{\max}) < n\lambda$. Последнее имеет место и для $j = \lambda(n - 1)/(\lambda - 1 - k_{\max})$, и мы получаем, что $q_1^{\lambda-1} = q_2^{\lambda-1} = q_2^{n\lambda-1}$. Поэтому автомат **A** будет в том же самом состоянии $q = q_1^{\lambda-1}$ и в вершине $w_s^{n\lambda-1}$. Но $O(w_s^{\lambda-1}) = O(w_s^{n\lambda-1})$, то есть автомат **A** на входе имеет тот же самый символ. Из равенства $\text{pl}(\pi', V(a)) = x_0$, следует, что автомат **A** вернется в вершину x_0 . При этом возвращении в точку x_0 автомат **A** пройдет вершину w_s^1 . Так же получается, что автомат **A** в точках (w_s^1) будет в этом же состоянии. Из того, что $\lambda - 2 > \|Q\|$, следует, что $q_1^1 = q_1^k$ для некоторого $k \in \{2, \dots, \lambda - 2\}$. Пусть $k_{\min} = \min\{k \in \{2, \dots, \lambda - 2\} \mid q_1^1 = q_1^k\}$. Тогда $\lambda - 1 - k_{\min} \leq \|Q\|$ и при этом $q_2^{n\lambda-1-i} = q_1^{\lambda-1-i}$ для $i > 0$, такого, что $\lambda - 1 - i > 1$. Для $\lambda - 1 - i = k_{\min}$ получаем, что $q_2^{(n-1)\lambda+k_{\min}} = q_1^{k_{\min}}$. Тогда $q_2^{(n-1)\lambda+k_{\min}} = q_2^{(n-1)\lambda+k_{\min}-s(k_{\min}-1)}$ для каждого s такого, что $2 < (n - 1)\lambda + k_{\min} - s(k_{\min} - 1)$. Для $s = (n - 1)\lambda/(k_{\min} - 1)$ получаем, что $q_2^{k_{\min}} = q_1^{k_{\min}}$. Тогда $q_2^{k_{\min}-j} = q_1^{k_{\min}-j}$ для $0 < j < k_{\min} - 1$.

Если $\text{pl}(\pi', V(a)) = w_s^1$, то автомат был в вершине $w_s^{\lambda-1}$ (уже показано, что автомат **A** будет в том же самом состоянии и в вершине $w_s^{n\lambda-1}$ и на входе будет иметь тот же самый символ), так что

$$\text{pl}(\pi, V(a)) = w_s^{\lambda n}, \quad \text{st}(\pi, V(a)) = \text{st}(\pi', V(a)).$$

Предположим, что существует пешка $\mathbf{A}_0 = (A, Q_0, B, \varphi_0, \psi_0, q_0)$, которая распознает класс $(C_0, \text{НП})$. Ясно, что $\|Q_0\| > 2$.

Рассмотрим подкласс C'_0 класса C_0 , который будет определен ниже.

Пусть $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{Z}^2$, $i \in \{1, 2\}$, такие, что

$$x_2 < x_1 - 1, \quad y_2 > y_1 + 1,$$

и

$$K_0^{\{z_i\}_{i=1,2}} = \{x_1\} \times [y_1, y_2] \cup \{x_2\} \times [y_1, y_2] \cup [x_2, x_1] \times \{y_1\} \cup [x_2, x_1] \times \{y_2\}.$$

Тогда

$$C'_0 = \{c: \mathbf{Z}^2 \rightarrow E^2 \mid c^{-1}(\{1\}) = K_0^{\{z_i\}_{i=1,2}},$$

где $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}^2$ удовлетворяют указанному выше условию\}.

Определим лабиринт $L_0 = (V_0, E_0)$, полагая

$$\begin{aligned} V_0 &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, & E_0 &= \{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_0 \rangle\}, \\ |(v_0, v_1)| &= w, & |(v_1, v_2)| &= n, & |(v_2, v_3)| &= e, & |(v_3, v_0)| &= s. \end{aligned}$$

Ясно, что L_0 есть n -лестница (то есть e -лестница).

Пусть лабиринт $\tilde{L}_0$ получен из лабиринта L_0 так, как в теореме 1, где $n = \|Q_0\|$. Выберем укладку этого лабиринта так же, как и в теореме 1. Из этой укладки можем

получить укладку, у которой вершины расположены в узлах подрешетки целочисленной решетки с шагом $\lambda_0 = \|Q_0\|!$ [4]. Рассмотрим так полученный мозаичный лабиринт L'_0 и поведение пешки A_0 в нем. Из леммы 1, из геометрии лабиринта L'_0 , и из того, что если автомат распознает лабиринт, то в одной вершине автомат находится не больше, чем $\|Q_0\|$ раз, вытекает, что автомат A_0 останавливается в состоянии q_{F_1} . Теорема доказана.

Список литературы

1. Килибарда Г., Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 135–146.
2. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш., *Введение в теорию абстрактных автоматов*. Наука, Москва, 1985.
3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
4. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.

Статья поступила 17.05.1999.