Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Логачев, А. А. Сальников, В. В. Яценко, Об
одном свойстве ассоциированных представлений группы
 $GL(n, k)$, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 2, 154–
159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:50:39

УДК 512.8

Об одном свойстве ассоциированных представлений группы $GL(n, k)$

© 2000 г. О. А. Логачев, А. А. Сальников, В. В. Ященко

В работе доказано, что r -е ассоциированное и сопряженное к $(n - r)$ -му ассоциированному представлению группы $GL(n, k)$ эквивалентны. Рассмотрены интерпретации доказанного утверждения в терминах действия группы $GL(n, 2)$ на однородных булевых формах степени r и в терминах действия той же группы на кососимметрических тензорах валентности r .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99-01-00929 и 99-01-00941.

Настоящая заметка посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *При $1 \leq r < n$ два представления группы $GL(n, k)$, r -е ассоциированное и сопряженное к $(n - r)$ -му ассоциированному, эквивалентны.*

Предварительно напомним необходимые определения и факты об ассоциированных представлениях группы $GL(n, k)$. Группа $GL(n, k)$ — это группа невырожденных $n \times n$ матриц над полем k . Для заданных матрицы $A \in GL(n, k)$ и числа r , $1 \leq r < n$ через $C_r(A)$ обозначается r -я ассоциированная матрица размера $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$, которая составлена из всех миноров порядка r матрицы A . Строки и столбцы матрицы $C_r(A)$ занумерованы всеми сочетаниями из n по r , расположенными в лексикографическом порядке. Для ассоциированных матриц известно много интересных свойств (подробнее см. [1], стр. 263, 268, [2], [3], стр. 29–34). Приведем те из них, которые необходимы для целей настоящей заметки:

$$\det C_r(A) = (\det A)^t,$$
$$t = \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}, \quad (1)$$

$$C_r(AB) = C_r(A)C_r(B), \quad (2)$$

$$C_r(A') = C_r(A)', \quad (3)$$

$$C_r(A^{-1}) = C_r(A)^{-1}, \quad (4)$$

где A' обозначает матрицу, транспонированную к матрице A .

Из (1)–(4) вытекает, что отображение

$$A \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\det A}} C_r(A)$$

является гомоморфизмом группы $GL(n, k)$ в группу $GL(\binom{n}{r}, K)$, где K — минимальное расширение поля k , в котором существуют квадратные корни из любого элемента. Назовем этот гомоморфизм r -м ассоциированным представлением группы $GL(n, k)$. Отображение

$$A \rightarrow \sqrt{\det A} C_r(A^{-1})'$$

также является гомоморфизмом, который называется сопряженным к r -му ассоциированному представлению группы $GL(n, k)$.

Пусть M — минор порядка r матрицы $A \in GL(n, k)$, расположенный в строках $i_1, \dots, i_r$ и столбцах $j_1, \dots, j_r$. Минор N порядка $n - r$, расположенный в строках и столбцах матрицы A , оставшихся после вычеркивания строк $i_1, \dots, i_r$ и столбцов $j_1, \dots, j_r$, называется дополнительным минором для минора M . Алгебраическим дополнением минора M (в случае матриц над полями с характеристикой отличной от 2) называется число

$$(-1)^{\sum_{p=1}^r (i_p + j_p)} N.$$

Для полей характеристики 2 алгебраическое дополнение минора совпадает с дополнительным минором. Через $C_r^a(A)$ обозначим матрицу размера $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$, которая составлена из алгебраических дополнений миноров порядка r матрицы A , причем расположение миноров в матрице $C_r(A)$ и алгебраических дополнений в матрице $C_r^a(A)$ согласованы. Через D обозначим подстановочную $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$ матрицу, строки которой занумерованы всеми сочетаниями из n по r , а столбцы — сочетаниями из n по $n - r$. В матрице D в строке с номером $\{i_1, \dots, i_r\}$ единица стоит в столбце с номером $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$, а все остальные элементы этой строки нулевые. Отметим, что $D^{-1} = D'$. Через I обозначим диагональную $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$ матрицу вида

$$I = \text{diag} \left(\dots, (-1)^{\sum_{p=1}^r i_p}, \dots \right).$$

Отметим, что $I^{-1} = I$. Из введенных определений и обозначений практически очевидно следующее техническое утверждение.

Лемма 1. При $1 \leq r < n$

$$C_r^a(A) = I D C_{n-r}(A) D^{-1} I.$$

Это выражение для $C_r^a(A)$ позволяет записать некоторые свойства определителей в виде, принятом в теории линейных представлений.

Лемма 2. Для любых $A \in GL(n, k)$ и r , $1 \leq r < n$, выполнено равенство

$$C_r(A)IDC_{n-r}(A')D^{-1}I = \det AE,$$

где E — единичная $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$ матрица.

Доказательство леммы 2 вытекает из леммы 1 и следующих известных свойств определителей (см. [3], стр. 30, [4], стр. 420).

Пусть в определителе d порядка n произвольно выбрано r строк (столбцов), где $1 \leq r \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров r -го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю d .

Пусть в определителе d порядка n произвольно выбраны две различные группы по r строк (столбцов), где $1 \leq r \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров r -го порядка, содержащихся в строках (столбцах) одной группы, на алгебраические дополнения соответствующих миноров другой группы равна нулю.

Доказательство теоремы. В соответствии с леммой 2

$$\frac{1}{\sqrt{\det A}}C_r(A) = ID \left(\sqrt{\det AC_{n-r}(A^{-1})'} \right) D^{-1}I,$$

а это равенство и означает эквивалентность r -го ассоциированного и сопряженного к $(n-r)$ -му ассоциированному представлений.

Ассоциированные представления группы $GL(n, 2)$ (то есть в случае, когда

$$k = F_2 = \{0, 1\}$$

— поле из двух элементов, при этом K также совпадает с F_2) естественным образом возникают в задачах классификации булевых функций при линейных заменах переменных (с проблемой аффинной классификации булевых функций можно познакомиться в [5]). Булеву функцию

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

будем считать заданной на V_n — векторном пространстве размерности n над полем F_2 . На V_n действует полная линейная группа преобразований

$$x \rightarrow Ax, \quad A \in GL(n, 2), \quad x \in V_n.$$

Это действие обычным образом переносится на булевы функции:

$$f(x) \rightarrow f(A^{-1}x), \quad A \in GL(n, 2).$$

Булевы функции, в многочлен Жегалкина которых входят только члены одинаковой степени, называются однородными формами. Однородная форма φ степени r задается вектором коэффициентов $c^\varphi = (c_\beta^\varphi)$ длины $\binom{n}{r}$:

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in V_n, |\beta|=r} c_\beta^\varphi x^\beta,$$

где $|\beta|$ — число единиц (вес) в векторе $\beta \in V_n$; $x^\beta = x_{i_1} \dots x_{i_r}$, если в векторе β единицы стоят на местах $i_1, \dots, i_r$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, то есть

$$\beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где единицы стоят на местах $i_1, \dots, i_r$. Между всеми сочетаниями из n по r и всеми векторами $\beta \in V_n$ такими, что $|\beta| = r$, установлено естественное взаимно однозначное соответствие. Будем считать, что в векторе c^φ координаты c_β^φ расставлены в соответствии с лексикографическим порядком сочетаний $i_1, \dots, i_r$ из n по r . Каждая булева функция единственным образом (при фиксированном базисе пространства V_n) представляется в виде суммы однородных форм:

$$f(x) = [f(x)]_r + [f(x)]_{r-1} + \dots + [f(x)]_1 + [f(x)]_0,$$

здесь степень нелинейности функции $f(x)$ равна r , а $[f(x)]_j$ — сумма членов степени j , входящих в многочлен Жегалкина функции $f(x)$. Для однородных форм можно ввести еще одно действие группы $GL(n, 2)$ следующим образом:

$$\varphi(x) \rightarrow [\varphi(A^{-1}x)]_r, \quad A \in GL(n, 2), \quad (5)$$

если $\varphi(x)$ — однородная форма степени r . Покажем, что это действие порождает на пространстве коэффициентов однородных форм степени r следующее действие:

$$c^\varphi \rightarrow C_r(A^{-1})' c^\varphi, \quad A \in GL(n, 2).$$

Лемма 3. Пусть $\varphi(x)$ — однородная форма степени r :

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in V_n, |\beta|=r} c_\beta^\varphi x^\beta.$$

Тогда для любой матрицы $A \in GL(n, 2)$ выполнено равенство

$$[\varphi(A^{-1}x)]_r = \sum_{\gamma \in V_n, |\gamma|=r} (C_r(A^{-1})' c^\varphi)_\gamma x^\gamma.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ C_r(A^{-1}) &= \|A_{\beta\gamma}\|, \quad \beta, \gamma \in V_n, \quad |\beta| = |\gamma| = r. \end{aligned}$$

Если $x^\beta = x_{i_1} \dots x_{i_r}$, то очевидно

$$\begin{aligned} [(A^{-1}x)^\beta]_r &= [(a_{i_1 1}x_1 + \dots + a_{i_1 n}x_n) \dots (a_{i_r 1}x_1 + \dots + a_{i_r n}x_n)]_r \\ &= \sum_{\gamma \in V_n, |\gamma|=r} A_{\beta\gamma} x^\gamma. \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в выражение для $\varphi(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned} [\varphi(A^{-1}x)]_r &= \sum_{\beta \in V_n, |\beta|=r} c_\beta^\varphi [(A^{-1}x)^\beta]_r \\ &= \sum_{\beta \in V_n, |\beta|=r} c_\beta^\varphi \sum_{\gamma \in V_n, |\gamma|=r} A_{\beta\gamma} x^\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in V_n, |\gamma|=r} \sum_{\beta \in V_n, |\beta|=r} A_{\beta\gamma} c_\beta^\varphi x^\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in V_n, |\gamma|=r} (C_r(A^{-1})' c^\varphi)_\gamma x^\gamma. \end{aligned}$$

Другим объектом, на котором естественным образом возникает ассоциированное представление группы $GL(n, 2)$, является пространство $\Lambda^r(V_n)$ кососимметрических тензоров валентности r на пространстве V_n (см. [6]). Если $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V_n , то

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n,$$

— базис пространства $\Lambda^r(V_n)$. Для любого $A \in GL(n, 2)$ определен линейный оператор

$$\Lambda^r A: \Lambda^r(V_n) \rightarrow \Lambda^r(V_n),$$

при этом

$$\Lambda^r A = C_r(A)$$

(см. [6], стр. 179).

Заметим теперь, что пространство $\Lambda^r(V_n^*)$ можно отождествить с пространством однородных форм степени r . Пусть $e_1^*, \dots, e_n^*$ — базис пространства V_n^* , двойственный к базису $e_1, \dots, e_n$ пространства V_n , то есть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда базисный элемент $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*$ из $\Lambda^r(V_n^*)$ задает булеву функцию

$$(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*)(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1} \dots x_{i_r}.$$

При этом любой тензор из $\Lambda^r(V_n^*)$ задает однородную форму степени r и такое соответствие, очевидно, является изоморфизмом. После такого отождествления получаем естественную интерпретацию леммы 3: когда на пространстве $\Lambda^r(V_n)$ определено r -е ассоциированное представление группы $GL(n, 2)$, то на пространстве

$$(\Lambda^r(V_n))^* \cong \Lambda^r(V_n^*)$$

определено сопряженное к r -му ассоциированному представлению.

Авторы благодарны Н. Д. Подуфалову за полезные обсуждения и, особенно, за указание на справедливость леммы 1.

Список литературы

1. Беллман Р., *Введение в теорию матриц*. Наука, Москва, 1976.
2. Маркус М., Минк Х., *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*. Наука, Москва, 1972.
3. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., *Матрицы и вычисления*. Наука, Москва, 1984.
4. Бурбаки Н., *Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра*. Физматгиз, Москва, 1962.
5. Страздинь И. Э., *Групповая инвариантность в конечнозначной логике*. Дис. на соискание ученой степени доктора физ.-матем. наук, Рига, 1988.
6. Прасолов В. В., *Задачи и теоремы линейной алгебры*. Наука, Москва, 1996.

Статья поступила 15.05.2000.