Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Кузьмин, О. В. Леонова, Полиномы Тушара и их приложения, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 3, 60–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:13:45

Полиномы Тушара и их приложения

© 2000 г. О. В. Кузьмин, О. В. Леонова

Рассматриваемые в статье полиномы являются одним из обобщений полиномов Белла и введены Тушаром в связи с изучением некоторых циклических подстановок. Для полиномов Тушара получены дифференциально-разностные уравнения и рекуррентные соотношения, а также обобщения некоторых известных ранее свойств полиномов, их перечислительные интерпретации и вероятностные приложения, в частности, при описании одноканальной системы массового обслуживания.

1. Введение

Понятие полинома разбиений, полинома от нескольких переменных, определяемого с помощью суммы по различным разбиениям значений его индекса, введено Беллом в [1]. Один из таких полиномов, связанный с производными от композиции функций, в книге [2] назван полиномом Белла. Ряд свойств коэффициентов n -го полинома Белла, так называемых частичных полиномов Белла $A_{n,k}$, и сопряженных с ними полиномов Платонова $B_{n,k}$ приведен в статье [3].

Тушар (см. [4]) в связи с изучением некоторых циклических подстановок ввел ряд обобщений полиномов Белла. Для одного из таких обобщений $T_{n,k}$, названного полиномами Тушара, в [5] получены экспоненциальные производящие функции и рекуррентные соотношения. В [6] рассматриваются свойства некоторых частных случаев полиномов $T_{n,k}$ и вновь введенных полиномов Тушара $C_{n,k}$. Полученные формулы использованы при нахождении некоторых вероятностей в задаче о случайных блужданиях.

В данной статье продолжается начатое авторами в [7] изучение полиномов Тушара, при этом получены обобщения некоторых из приведенных в [3] свойств полиномов $A_{n,k}$, перечислительные интерпретации и вероятностные приложения. Во втором разделе приводятся необходимые определения и свойства. В третьем разделе для полиномов $T_{n,k}$ получены дифференциально-разностные уравнения и рекуррентные соотношения, которые позволяют по фиксированной i -й строке матрицы, составленной из этих полиномов, восстановить все ее начальные строки. Рассматривается ряд частных случаев. В четвертом разделе статьи получено новое соотношение для полиномов $C_{n,k}$. Известные и новые перечислительные интерпретации изучаемых полиномов Тушара обсуждаются в пятой части. В последней части приводится пример приложения полиномов Тушара при описании одноканальной системы массового обслуживания.

2. Основные понятия и вспомогательные результаты

Полиномы Тушара $T_{n,k} = T_{n,k}(x, y)$ для $n, k \geq 1, k \leq n$, имеют вид

$$T_{n,k}(x, y) = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n! r_1! \dots r_n!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_n}{n!}\right)^{k_n} \left(\frac{y_1}{1!}\right)^{r_1} \dots \left(\frac{y_n}{n!}\right)^{r_n} \quad (1)$$

(см. [5]), где $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем таким наборам $(k_1, \dots, k_n; r_1, \dots, r_n)$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^n k_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i(k_i + r_i) = n.$$

Дополнительно полагают $T_{0,0}(x, y) = 1$.

Из (1) следует, что

$$T_{n,0}(x, y) = Y_n(y),$$

где $Y_n(y) = Y_n(y_1, \dots, y_n)$ — хорошо известные полиномы Белла (см., например, [2]) и

$$T_{n,n}(x, y) = x_1^n = A_{n,n}(x),$$

здесь $A_{n,k}(x) = A(n, k; x_1, \dots, x_{n-k+1})$ — частичные полиномы Белла (см., например, [8]). Известна производящая функция

$$T_k(x, y; t) = \sum_{n=k}^{\infty} T_{n,k}(x, y) \frac{t^n}{n!} = (x(t))^k \frac{e^{y(t)}}{k!},$$

где

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{t^i}{i!}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{t^i}{i!}.$$

Полиномы Тушара и Белла связаны соотношением

$$\sum_{k=0}^n T_{n,k}(x, y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} Y_j(x) Y_{n-j}(y). \quad (2)$$

3. Рекуррентные соотношения для полиномов Тушара

Выведем несколько рекуррентных соотношений для полиномов Тушара $T_{n,k}(x, y)$.

Пусть, по-прежнему, $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ — формальные переменные. Введем обозначение

$$\mathcal{Q} = x_2 \partial / \partial x_1 + x_3 \partial / \partial x_2 + \dots + y_2 \partial / \partial y_1 + y_3 \partial / \partial y_2 + \dots$$

Для композиции операторов $\mathcal{Q}$ и $\partial / \partial x_i$, а также $\mathcal{Q}$ и $\partial / \partial y_i$ имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. Для каждого $i \geq 2$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \quad (3)$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (4)$$

Доказательство. Несложными преобразованиями левой части равенства (3) получаем его правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{Q} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j} + y_{j+1} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right) \\ &= \sum_{j \neq i-1} \left(x_{j+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + y_{j+1} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{i-1}} + y_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_{i-1}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_{j+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + y_{j+1} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}. \end{aligned}$$

Подобным же образом можно убедиться и в справедливости соотношения (4). Лемма доказана.

Отметим, что в частном случае $y_i = 0$ соотношения (3) и (4) получены в [3].

Аналогично может быть доказана следующая лемма.

Лемма 2. Для каждого $i \geq 2$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} \quad (5)$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial y_1}. \quad (6)$$

Теорема 1. Полиномы Тушара удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений

$$T_{nk}(x, y) = x_1 T_{n-1, k-1}(x, y) + y_1 T_{n-1, k}(x, y) + \mathcal{Q} T_{n-1, k}(x, y), \quad (7)$$

где $n, k \geq 1, n \geq k - 1$.

Доказательство. Известно (см. [5]), что

$$T_{n, k}(x, y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A_{j, k}(x) Y_{n-j}(y). \quad (8)$$

Используя известное соотношение для биномиальных коэффициентов, последнее равенство перепишем в виде

$$T_{n, k}(x, y) = \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} A_{j, k}(x) Y_{n-j}(y) + \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j} A_{j, k}(x) Y_{n-j}(y). \quad (9)$$

Рассмотрим первую сумму в правой части (9). Учитывая соотношение

$$A_{n+1,k}(x) = x_1 A_{n,k-1}(x) + \mathcal{D} A_{n,k}(x)$$

(см. [2]), где

$$\mathcal{D} = x_2 \partial / \partial x_1 + x_3 \partial / \partial x_2 + \dots,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} A_{j,k}(x) Y_{n-j}(y) &= \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} (x_1 A_{j-1,k-1}(x) + \mathcal{D} A_{j-1,k}(x)) Y_{n-j}(y) \\ &= x_1 \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} A_{j-1,k-1}(x) Y_{n-j}(y) \\ &\quad + \mathcal{D} \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} A_{j-1,k}(x) Y_{n-j}(y) \\ &= x_1 \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{j,k-1}(x) Y_{n-1-j}(y) \\ &\quad + \mathcal{D} \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-1-j}(y). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношения (8) получаем, что

$$\sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j-1} A_{j,k}(x) Y_{n-j}(y) = x_1 T_{n-1,k-1}(x, y) + \mathcal{D} T_{n-1,k}(x, y). \quad (10)$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (9). Учитывая соотношение

$$Y_{n+1}(y) = (y_1 + \mathcal{P}) Y_n(y)$$

(см. [2]), где

$$\mathcal{P} = y_2 \partial / \partial y_1 + y_3 \partial / \partial y_2 + \dots,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) (y_1 + \mathcal{P}) Y_{n-j-1}(y) &= y_1 \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-1-j}(y) \\ &\quad + \mathcal{P} \sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-1-j}(y) \\ &= y_1 \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-1-j}(y) \\ &\quad + \mathcal{P} \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-1-j}(y). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношения (8) находим, что

$$\sum_{j=k}^n \binom{n-1}{j} A_{j,k}(x) Y_{n-j}(y) = y_1 T_{n-1,k}(x, y) + \mathcal{P} T_{n-1,k}(x, y). \quad (11)$$

Подставив соотношения (10) и (11) в (9) и учитывая, что $\mathcal{Q} = \mathcal{D} + \mathcal{P}$, получим соотношение (7). Теорема доказана.

Отметим, что в частном случае $y_i = 0$, $\mathcal{Q} = \mathcal{D}$ соотношение (7) для частичных полиномов Белла приводится в [2].

Для полиномов $T_{nk}(x, y)$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. Для $n \geq 1$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{nk}(x, y) = \binom{n}{i} T_{n-i, k-1}(x, y), \quad (12)$$

где $k, i \geq 1, k + i \leq n + 1$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n отдельно для $i = 1$ и $i \geq 2$.

Докажем соотношение (12) при $i = 1$. Для всех $n = k \geq 1$ и $n = 2, k = 1$ оно справедливо, поскольку

$$T_{nn}(x, y) = x_1^n, \quad T_{21}(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2, \quad T_{10}(x, y) = y_1.$$

Пусть равенство (12) при $i = 1$ выполняется для всех $n < m$, где m — целое число, $m \geq 3$. От обеих частей соотношения (7), полагая в нем $n = m$, берем частные производные по x_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} T_{mk}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 T_{m-1, k-1})(x, y) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} (y_1 T_{m-1, k})(x, y) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{Q} T_{m-1, k}(x, y)). \end{aligned}$$

Согласно формуле (4) и предположению индукции из последнего соотношения получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} T_{mk}(x, y) &= T_{m-1, k-1}(x, y) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} T_{m-1, k-1}(x, y) \\ &+ y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} T_{m-1, k}(x, y) + \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_1} T_{m-1, k}(x, y) \\ &= T_{m-1, k-1}(x, y) + x_1 (m-1) T_{m-2, k-2}(x, y) \\ &+ y_1 (m-1) T_{m-2, k-1}(x, y) + \mathcal{Q} ((m-1) T_{m-2, k-1}(x, y)) \\ &= T_{m-1, k-1}(x, y) + (m-1) (x_1 T_{m-2, k-2}(x, y) \\ &+ y_1 T_{m-2, k-1}(x, y) + \mathcal{Q} T_{m-2, k-1}(x, y)) \\ &= T_{m-1, k-1}(x, y) + (m-1) T_{m-1, k-1}(x, y) \\ &= m T_{m-1, k-1}(x, y), \end{aligned}$$

что и дает соотношение (12) при $i - 1, n = m$.

Докажем соотношение (12) при $2 \leq i \leq n - k + 1$. Для $i = 2, n = 2, k = 1$ оно проверяется непосредственно, поскольку

$$T_{21}(x, y) = 2x_1y_1 + x_2, T_{00}(x, y) = 1.$$

Пусть равенство (12) при $2 \leq i \leq n - k + 1$ справедливо для всех $n < m$ (а, следовательно, и для $i < m$), $m > 3$. Взяв от обеих частей соотношения (7) при $n = m$ частные производные по $x_i, 2 \leq i \leq m - 1$, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{mk}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 T_{m-1, k-1}(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} (y_1 T_{m-1, k}(x, y)) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{Q} T_{m-1, k}(x, y)). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения согласно равенствам (3), (7) (при $i = 2$) и формуле (12) уже доказанной для $i = 1$ по предположению индукции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{mk}(x, y) &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_i} T_{m-1, k-1}(x, y) + y_1 \frac{\partial}{\partial x_i} T_{m-1, k} \\ &\quad + \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_i} T_{m-1, k}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} T_{mk}(x, y) \\ &= x_1 \binom{m-1}{i} T_{m-i-1, k-2}(x, y) + y_1 \binom{m-1}{i} T_{m-i-1, k-1}(x, y) \\ &\quad + \mathcal{Q} \binom{m-1}{i} T_{m-i-1, k-1}(x, y) + \binom{m-1}{i} T_{m-i, k-1}(x, y) \\ &= \binom{m-1}{i} (x_1 T_{m-i-1, k-2}(x, y) + y_1 T_{m-i-1, k-1}(x, y) \\ &\quad + \mathcal{Q} T_{m-i-1, k-1}(x, y)) + \binom{m-1}{i-1} T_{m-i, k-1}(x, y) \\ &= \binom{m-1}{i} T_{m-i, k-1}(x, y) + \binom{m-1}{i-1} T_{m-i, k-1}(x, y) \\ &= \binom{m}{i} T_{m-i, k-1}(x, y). \end{aligned}$$

Сопоставление первого и последнего звеньев полученной цепочки равенств дает соотношение (12) для $2 \leq i \leq n - k, n = m$.

Убедимся в справедливости равенства (12) при $i = m$. Пусть равенство (12) справедливо при $i = n = m - 1$. Взяв от обеих частей соотношения (7) при $n = m$ частные производные по x_m , получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_m} (x_1 T_{m-1, k-1}(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_m} (y_1 T_{m-1, k}(x, y)) + \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathcal{Q} T_{m-1, k}(x, y)). \end{aligned}$$

Поскольку, согласно формуле (1), $\partial/\partial x_m T_{mk}(x, y) \neq 0$ лишь при $k = 1$ и, кроме того, $\partial/\partial x_m T_{m-1, k}(x, y) = 0$, предыдущее соотношение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m1}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathcal{Q} T_{m-1, 1}(x, y)).$$

Отсюда, согласно равенству (3) и предположению индукции, находим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m1}(x, y) &= \mathcal{Q} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m-1,1}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} T_{m-1,1}(x, y) \\ &= \binom{m-1}{m-1} T_{0,0}(x, y),\end{aligned}$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m1}(x, y) = T_{0,0}(x, y),$$

то есть соотношению (12) при $i = n = m$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $y_i = 0$ из формулы (12) получаем соотношение для частных полиномов Белла, приведенное, например, в [9].

Также методом математической индукции с использованием формулы (7) и соотношений (5) и (6) может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для $n \geq 1$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y_i} T_{nk}(x, y) = \binom{n}{i} T_{n-i,k}(x, y),$$

где $k \geq 0, i \geq 1, k + i \leq n$.

В [6] рассматривается следующий частный случай полиномов Тушара:

$$T_{n,k}^*(x, y) = T_{n,k}(x_1^*, \dots, x_n^*; y_1^*, \dots, y_n^*),$$

где $x_k^* = (k-1)!x_k, y_k^* = (k-1)!y_k, k = 1, \dots, n$. Очевидно, что для полиномов $T_{n,k}^*(x, y)$ справедливы все утверждения теорем 1–3.

4. Рекуррентные соотношения для полиномов

Широко известные цикловые индикаторы симметрической группы имеют следующий вид

$$C_n(t) = C_n(t_1, \dots, t_n) = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{t_1}{1} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{t_n}{n} \right)^{k_n},$$

(см., например, [2]), где $t = (t_1, \dots, t_n)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем таким наборам $(k_1, \dots, k_n)$ целых неотрицательных чисел, что

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n.$$

Дополнительно полагают, что $C_0 = 1$.

Цикловые индикаторы связаны с полиномами Белла соотношениями

$$C_n(t) = Y_n(t_1, t_2, 2!t_3, \dots, (n-1)!t_n) \quad (13)$$

(см., например, [2]).

В [6] при помощи соотношения

$$C_{n,k}(x, y) = C_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots) = \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y), \quad (14)$$

где $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, введены полиномы Тушара $C_{n,k}(x, y)$. Просуммируем по k обе части равенства (14):

$$\sum_{k=0}^n C_{n,k}(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y).$$

Далее, перейдя по формуле (13) к полиномам Белла, получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n C_{n,k}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Y_k(x_1, x_2, 2!x_3, \dots, (k-1)!x_k) Y_{n-k}(y_1, y_2, 2!y_3, \dots, (n-k-1)!y_{n-k}). \end{aligned}$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (2), находим, что полиномы Тушара $T_{n,k}^*(x, y)$ и $C_{n,k}(x, y)$ связаны соотношением

$$\sum_{k=0}^n C_{n,k}(x, y) = \sum_{k=0}^n T_{n,k}(x^*, y^*),$$

где $x_i^* = (i-1)!x_i$, $y_i^* = (i-1)!y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 4. Полиномы $C_{n,k}(x, y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_{n+1,k}(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} (n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x, y) + \sum_{i=0}^{n-k} (n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x, y). \quad (15)$$

Доказательство. В книге [2] приводится рекуррентная формула для цикловых индикаторов симметрических групп

$$C_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^n (n)_i t_{i+1} C_{n-i}(t). \quad (16)$$

Полагая в формуле (16) $t_i = x_i$, $n = k-1$, получаем, что

$$C_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (k-1)_i x_{i+1} C_{k-i-1}(x).$$

Подставляя последнее соотношение в (14), находим, что

$$\begin{aligned} C_{n+1,k}(x, y) &= \binom{n+1}{n} C_{n-k-1}(y) \sum_{i=0}^{k-1} (k-1)_i x_{i+1} C_{k-i-1}(x) \\ &= \frac{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x, y) \end{aligned}$$

или

$$\frac{k}{n+1}C_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1} (n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x,y). \quad (17)$$

Аналогично из формулы (16) при $t_i = y_i$, $n = n - k$ получаем равенство

$$C_{n-k+1}(y) = \sum_{i=0}^{n-k} (n-k)_i y_{i+1} C_{n-k-i}(y).$$

Подставляя данное соотношение в (14), находим, что

$$\begin{aligned} C_{n+1,k}(x,y) &= \binom{n+1}{k} C_k(x) \sum_{i=0}^{n-k} (n-k)_i y_{i+1} C_{n-k-i}(y) \\ &= \frac{n+1}{n+1-k} \sum_{i=0}^{n-k} (n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x,y). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{n+1-k}{n+1} C_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-k} (n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x,y). \quad (18)$$

Суммируя соответственно правые и левые части равенств (17) и (18), получим соотношение (15). Теорема доказана.

5. Перечислительные интерпретации

Обсудим некоторые перечислительные интерпретации изучаемых комбинаторных объектов.

Для полиномов Тушара $T_{n,k}(x,y)$ известна следующая перечислительная интерпретация (см. [5]). Число $T_{n,k}(x,y)$ равно числу перестановок n элементов, скажем, $u_1, \dots, u_n$, в которых точно k циклов обладают свойством A , а все остальные — свойством B , где x_j , $1 \leq j \leq n$, есть число циклических перестановок с циклом длины j , которые обладают свойством A , а y_j , $1 \leq j \leq n$, есть число циклических перестановок с циклом длины j , которые обладают свойством B , при условии, что каждый цикл длины j определяет одно из чисел x_j или y_j .

В [6] приводится один специальный случай указанной комбинаторной интерпретации.

Пусть свойство A задано следующим образом: элементы $u_{i_1}, \dots, u_{i_j}$ цикла длины j , $1 \leq j \leq n$, появляются так, что $i_1 < i_2 < \dots < i_j$, а свойство B состоит в том, что элементы $u_{i_1}, \dots, u_{i_j}$ цикла длины j , $1 \leq j \leq n$, появляются на любых местах, исключая те, которые соответствуют свойству A . Тогда $x_j = 1$, $1 \leq j \leq n$, и $y_j = (j-1)! - 1$, $1 \leq j \leq n$, и число перестановок из n элементов, в которых точно k циклов, обладающих свойством A , равно

$$T_{n,k}(1, 1, \dots; 0, 0, 1, \dots, (j-1)! - 1, \dots) = \sum_{i=0}^n (n)_i \sum_{j=0}^{n-k-i} (-1)^j \binom{k+j}{k} S(n-i, k+j),$$

где $S(n, k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Можно предложить следующую перечислительную интерпретацию полиномов Тушара $T_{n,k}(x, y)$. Рассмотрим все разбиения n -множества N_n на непустые блоки, среди которых k блоков обладают свойством A , а остальные — свойством B . Вес блока, состоящего из j элементов, обладающих свойством A , считаем равным x_j , вес элемента со свойством B — равным y_j , а вес всего разбиения — равным произведению весов его блоков. Тогда $T_{n,k}(x, y)$ есть сумма весов всех разбиений N_n на непустые блоки, среди которых k блоков обладают свойством A , а остальные — свойством B .

Из приведенных интерпретаций при $y_j = 0$ получаем известные интерпретации частичных полиномов Белла $A_{n,k}(x)$ (см., например, [10, 11] и [3]).

Полиномам $T_{n,k}^*(x, y)$ можно дать следующую перечислительную интерпретацию. Число $T_{n,k}^*(x, y)$ равно сумме весов всех подстановок степени n , где k циклов обладают свойством A , а все остальные — свойством B , при условии, что вес цикла длины j , который обладает свойством A равен $x_j^* = (j-1)!x_j$, вес цикла со свойством B равен $y_j^* = (j-1)!y_j$, а вес подстановки равен произведению весов составляющих ее циклов.

Из полученной интерпретации при $y_j^* = 0$ получаем перечислительную интерпретацию полиномов $C_n(x)$, а при $x_j^* = 1$ и $y_j^* = 0$ — интерпретацию чисел Стирлинга 1 рода $s(n, k)$ (см., например, [2]).

6. Применения

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием (см., например, [12]). Пусть $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ — моменты поступлений требований и $v_1, v_2, \dots$ — времена их обслуживания. Тогда $u_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, представляют собой интервалы между поступлениями требований в систему. Положим

$$\zeta_k = v_{k-1} - u_k, \quad k \geq 1,$$

и

$$S_0 \equiv 0, \quad S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n, \quad n \geq 1.$$

Будем считать, что ζ_k , $k \geq 1$, — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$F(x) = \mathbf{P}\{\zeta_i \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Последовательность $\{S_n, n \geq 0\}$ представляет собой случайное блуждание, соответствующее функции распределения $F(x)$. Для него определим две последовательности случайных величин $\{N_k, k \geq 0\}$ и $\{\bar{N}_k, k \geq 0\}$, полагая

$$\begin{aligned} \bar{N}_0 &\equiv 0, \quad \bar{N}_1 = \min\{n > 0: S_n \leq 0\}, \quad \bar{N}_k = \min\{n > \bar{N}_{k-1}: S_n \leq S_{\bar{N}_{k-1}}\}, \quad k \geq 2; \\ N_0 &\equiv 0, \quad N_1 = \min\{n: S_n > 0\}, \quad N_k = \min\{n: S_n > S_{N_{k-1}}\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Случайная величина N_k называется k -м верхним лестничным моментом, а S_{N_k} — соответственно k -й лестничной высотой. Аналогично, $\bar{N}_k$ и $S_{\bar{N}_k}$ — нижние k -е лестничные момент и высота. Пары случайных величин (N_k, S_{N_k}) и $(\bar{N}_k, S_{\bar{N}_k})$ назовем

соответственно k -й верхней и k -й нижней лестничной точкой случайного блуждания S_n . Для удобства положим $N_1 = N$, $\bar{N}_1 = \bar{N}$. Совместное распределение первой верхней лестничной точки (N, S_N) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mathbf{P}\{N = n, S_N \leq x\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, 0 < S_n \leq x\}. \end{aligned}$$

Аналогично совместное распределение первой нижней лестничной точки может быть записано в виде

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \mathbf{P}\{\bar{N} = n, S_{\bar{N}} \leq x\} \\ &= \mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n \leq x < 0\}. \end{aligned}$$

Найдем данные вероятности, используя полиномы Тушара. Пусть N_n — число первых положительных частичных сумм S_k , $1 \leq k \leq n$. Известно, (см., например, [13]), что

$$\mathbf{P}\{N_n = n\} = \mathbf{P}\{\nu_1 \delta(S_{\nu_1}) + \dots + \nu_r \delta(S_{\nu_r}) = n\},$$

где $\nu_1, \dots, \nu_r$ — случайные величины, характеризующие длину непересекающихся циклов перестановки, выбранной случайным образом среди перестановок n объектов, причем $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$, $S_{\nu_r} = \zeta_{k_{\nu_1}} + \dots + \zeta_{k_{\nu_r}}$ и

$$\delta(S_{\nu_r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{\nu_r} > 0, \\ 0, & \text{если } S_{\nu_r} \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что мы ищем число перестановок, в которых все циклы обладают свойством A , состоящим в том, что сумма случайных величин, которые составляют цикл, положительна. Тушар [4] доказал, что число перестановок n элементов, в которых все циклы обладают свойством A выражается через

$$A_n = Y_n(a_1^*, \dots, a_n^*),$$

где $a_k^* = (k-1)! a_k$, $1 \leq k \leq n$, так что

$$g_k(x) = \frac{1}{k!} Y_n(a_1^*, \dots, a_n^*) = \frac{1}{k!} C_k(a_1, \dots, a_k).$$

Аналогично показывается, что

$$f_{n-k}(x) = \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}(1 - a_1, \dots, 1 - a_{n-k}),$$

где $a_k = \mathbf{P}\{S_k > 0\}$. Теперь можно найти вероятность того, что в очереди будет находиться $k-1$ требование:

$$P_k(n) = \mathbf{P}\{N_n = k\} = \mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_k > 0, S_{k+1} \leq 0, S_{k+2} \leq 0, \dots, S_n \leq 0\}.$$

С учетом формулы (14) получаем искомую вероятность

$$P_k(n) = \frac{1}{n!} C_{n,k}(a_1, \dots, a_n, 1 - a_1, \dots, 1 - a_n).$$

Из последнего соотношения с учетом (15) находим, что

$$P_k(n+1) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} P_{k-i-1}(n-i) + \sum_{i=0}^{n-k} (1 - a_{i+1}) P_k(n-i) \right),$$

где $a_k = \mathbf{P}\{S_k > 0\}$.

Список литературы

1. Bell E. T., Partition polynomials. *Ann. Math.* (1927) **29**, 38–46.
2. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
3. Кузьмин О. В., Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 39–49.
4. Touchard J., Sur les cycles des substitutions. *Acta Math.* (1939) **70**, №3-4, 243–297.
5. Chrysaphinou O., On Touchard polynomials. *Discrete Math.* (1985) **54**, 143–152.
6. Charalambides Ch. A., Chrysaphinou O., Partition polynomials in fluctuation theory. *Math. Nachr.* (1982) **106**, 89–100.
7. Кузьмин О. В., Леонова О. В., О полиномах Тушара. *Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Иркут. ун-т, Иркутск, 1997, 101–109.
8. Comtet L., *Advanced Combinatorics*. Reidel, Dordrecht, 1974.
9. Селиванов Б. И., Комбинаторный подход к формуле обращения Бюрмана–Лагранжа. *Комбинаторный и асимптотический анализ*. Красноярский ун-т, Красноярск, 1977, 153–169.
10. Howard F. T., Bell polynomials and degenerate Stirling numbers. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* (1980) **61**, 203–219.
11. Frucht R. W., Rota G. C., Polinomios de Bell y partitiones de conjuntos finitos. *Scientia* (1965) **32**, №126, 5–10.
12. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., *Введение в теорию массового обслуживания*. Наука, Москва, 1987.
13. Spitzer F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1956) **82**, 323–339.

Статья поступила 15.12.1998.