Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Матвеев, Перечисление граней комплексов и нормирования дистрибутивных решеток, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 3, 76–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:03:25

УДК 519.1

Перечисление граней комплексов и нормирования дистрибутивных решеток

© 2000 г. А. О. Матвеев

Для системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ булеана множества $[m] = \{1, \dots, m\}$ рассматриваются векторные описания $f(\Phi; m), h(\Phi; m) \in Q^{m+1}$ и производящие функции

$$F_{\Phi; m}(y-1) = \sum_{l=0}^m f_l(\Phi; m)(y-1)^{m-l} = H_{\Phi; m}(y) = \sum_{l=0}^m h_l(\Phi; m)y^{m-l}$$

где $f_l(\Phi; m) = |\{A \in \Phi : |A| = l\}|$, $0 \leq l \leq m$. Определяются соответствующие нормирования булевой решетки всех подмножеств булеана $2^{[m]}$.

Для разбиения системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ на булевы интервалы, при котором разбиение содержит $p_{i,j}$ интервалов $[A, B]$ с $|A| = j$ и $|B - A| = i$,

$$h_l(\Phi; m) = (-1)^l \sum_{i=0}^{m-l} \sum_{j=0}^l (-1)^j p_{i,j} \binom{m-i-j}{l-j}.$$

Для пары взаимно дуальных систем граней $\Phi, \Phi^* \subseteq 2^{[m]}$, где система $\Phi^* = \{[m] - A : A \in 2^{[m]}, A \notin \Phi\}$,

$$h_l(\Phi; m) + (-1)^l \sum_{j=l}^m \binom{j}{l} h_j(\Phi^*; m) = 0, \quad 1 \leq l \leq m.$$

1. Введение

Булеаны множеств, булевы решетки и булевы алгебры лежат в фундаменте дискретной математики. Наша работа посвящена исследованию механизмов перечисления элементов подмножеств булеана конечного множества, находящих применение в комбинаторной теории частично упорядоченных множеств, теории выпуклых многогранников и коммутативной алгебре. Мы рассматриваем поведение векторных описаний и производящих функций на подмножествах булеана, которые лишены структурных ограничений. Отрицательной стороной произвольности выбора объектов перечисления является ослабление алгебраических интерпретаций; наша работа скорее содержит обсуждение специфических приложений хорошо известных взаимно обратных соотношений (см. [1], Разд. 2.2) вида

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{p-k}{p-n} b_k \iff b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{p-k}{p-n} a_k, \quad 0 \leq n \leq p.$$

К положительным сторонам можно отнести возрастание роли комбинаторного принципа включения–исключения; мы иллюстрируем это при рассмотрении произвольных разбиений подмножеств булеана и при комбинаторном анализе разбиений на булевы интервалы.

Второй раздел представляет собой обзор ряда известных комбинаторных результатов о перечислении граней (относительных) симплициальных комплексов. В третьем разделе обсуждаются векторные описания подмножеств булеана и производящие функции, которые предоставляют возможность ввести в четвертом разделе статьи специальные нормирования булевой решетки подмножеств булеана. Эти нормирования выступают в роли механизма перечисления, действие которого иллюстрируется применением к разбиениям на булевы интервалы. В пятом разделе мы рассматриваем комбинаторные свойства взаимно дуальных подмножеств булеана.

Для натурального $m \geq 1$ положим $[m] = \{1, \dots, m\}$ и для натуральных $k \leq l$, $[k, l] = \{k, k+1, \dots, l\}$. Далее $|\mathcal{F}|$ обозначает количество множеств в семействе $\mathcal{F}$ и $|A|$ — мощность множества A . Как обычно, $\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{i,j} = 0$ в иных случаях, $\lfloor a \rfloor$ означает наименьшее целое, большее или равное a .

2. Предварительные сведения

Алгебраическим, топологическим и перечислительным аспектам абстрактных симплициальных комплексов и их приложениям посвящено большое количество исследований. Мы укажем лишь несколько монографий и обзоров [2–8], из материала которых, в основном, сформирован этот раздел, где обсуждаются инструменты перечисления. В указанных работах можно найти многочисленные ссылки и составить представление об истории исследований.

2.1. Комплексы и относительные комплексы, f -векторы

Пусть V — непустое конечное множество и 2^V — его булеан. Произвольное семейство $\Delta \subseteq 2^V$, для которого из включения $A \subseteq B \in \Delta$ следует, что $A \in \Delta$, называется абстрактным симплициальным комплексом (коротко, комплексом). Для комплекса Δ комплекс $\Gamma \subseteq \Delta$ называется его подкомплексом. Для любых подмножеств $A \subseteq B$ множества V семейство множеств $[A, B] = \{C : A \subseteq C \subseteq B\}$ называется булевым интервалом. Для всякого $B \subseteq V$ комплекс $[\emptyset, B]$ называется симплексом; в частности, комплекс 2^V есть симплекс $[\emptyset, V]$.

Для произвольной пары комплексов $\Gamma \subseteq \Delta$, семейство множеств $\Psi = \Delta - \Gamma$ называется относительным абстрактным симплициальным комплексом (коротко, относительным комплексом) и обозначается через $\Psi = \Delta / \Gamma$ (см. [7], Разд. III.7). Комплекс Δ может быть отождествлен с относительным комплексом $\Delta / \emptyset$.

Элементы (относительного) комплекса называются его гранями. Заимствуя терминологию из [9], мы будем называть размером любой грани A из относительного комплекса ее мощность $|A|$; величина $\dim A = |A| - 1$ называется размерностью грани A . Размерностью $\dim \Psi$ непустого относительного комплекса Ψ называют величину $\max_{A \in \Psi} (|A| - 1)$. Нульмерные грани называются вершинами, а одномерные грани ребрами. Максимальные по включению грани непустого относительного комплекса Δ называются его гипергранями. Комплекс называется чистым (или однородным), если все его гиперграны имеют одинаковый размер.

Пусть Ψ — относительный комплекс. Для $-1 \leq j \leq \dim \Psi$ обозначим через $f_j(\Psi)$ число содержащихся в Ψ граней размера $j + 1$. Вектор-строка

$$f(\Psi) = (f_0(\Psi), \dots, f_{\dim \Psi}(\Psi))$$

называется f -вектором относительного комплекса Ψ .

2.2. Кольца Стенли–Рейснера¹

Пусть Δ — комплекс с непустым множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, k — произвольное поле, и $k[X_1, \dots, X_n]$ — кольцо полиномов над k . Обозначим через

$$I_\Delta = (X_{i_1} \dots X_{i_r} : i_1 < \dots < i_r, \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\} \notin \Delta)$$

однородный идеал кольца $k[X_1, \dots, X_n]$, порожденный такими мономами

$$X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_r},$$

что множества $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ не являются гранями Δ . Факторкольцо

$$k[\Delta] = k[X_1, \dots, X_n] / I_\Delta$$

называется кольцом Стенли–Рейснера (или кольцом граней) комплекса Δ . При стандартной градуировке кольца $k[X_1, \dots, X_n]$ каждой переменной X_j из $k[X_1, \dots, X_n]$ назначается степень 1, это приводит к рассмотрению $k[\Delta]$ как градуированной k -алгебры, разложенной в прямую сумму подпространств:

$$k[\Delta] = k[\Delta]_0 \oplus k[\Delta]_1 \oplus \dots;$$

используя обозначение $k[X_1, \dots, X_n]_s$ для подпространства однородных полиномов степени s , мы подразумеваем под $k[\Delta]_s$ факторпространство

$$k[X_1, \dots, X_n]_s / (I_\Delta \cap k[X_1, \dots, X_n]_s).$$

Размерность $H(k[\Delta], s)$ факторпространства $k[\Delta]_s$ называется функцией Гильберта, а формальный степенной ряд

$$F(k[\Delta], t) = \sum_{s \geq 0} H(k[\Delta], s) t^s$$

от переменной t называется рядом Гильберта комплекса Δ . Функция Гильберта связана с f -вектором соотношениями ([7], Теорема II.1.4)

$$H(k[\Delta], 0) = 1,$$

$$H(k[\Delta], s) = \sum_{j=0}^{\dim \Delta} f_j(\Delta) \binom{s-1}{j}, \quad s > 0.$$

Пусть $\Psi = \Delta / \Gamma$ — относительный комплекс. Определяя для каждой грани A комплекса Δ соответствующий граневый моном

$$X^A = \prod_{v_i \in A} X_i,$$

рассматривают идеал I_Ψ кольца Стенли–Рейснера $k[\Delta]$, порожденный, по определению, всеми мономами X^A , для которых $A \notin \Gamma$. Для относительного комплекса Ψ модуль I_Ψ над $k[\Delta]$ служит аналогом кольца Стенли–Рейснера (см. [7], Разд. III.7).

¹см. [4], Разд. II.5; [5], Разд. V.19; [7], Гл. II и III.

2.3. h -векторы

Ряд Гильберта комплекса Δ для целочисленной вектор-строки $h(\Delta) = (h_0(\Delta), \dots, h_{\dim \Delta + 1}(\Delta))$, называемой h -вектором комплекса Δ равен

$$\begin{aligned} F(k[\Delta], t) &= \sum_{j=-1}^{\dim \Delta} f_j(\Delta) \frac{t^{j+1}}{(1-t)^{j+1}} \\ &= \frac{1}{(1-t)^{\dim \Delta + 1}} (h_0(\Delta) + h_1(\Delta)t + \dots + h_{\dim \Delta + 1}(\Delta)t^{\dim \Delta + 1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогичное определение может быть дано для h -векторов относительных комплексов.

Для относительного комплекса Ψ его h -вектор

$$h(\Psi) = (h_0(\Psi), \dots, h_{\dim \Psi + 1}(\Psi))$$

удобным образом выражается через его f -вектор посредством соотношения (см. [7], Разд. III.7)

$$\sum_{l=0}^{\dim \Psi + 1} f_{l-1}(\Psi)(y-1)^{\dim \Psi + 1 - l} = \sum_{l=0}^{\dim \Psi + 1} h_l(\Psi)y^{\dim \Psi + 1 - l}.$$

Определив полиномы от одной переменной

$$\begin{aligned} H_{\Psi}(y) &= \sum_{l=0}^{\dim \Psi + 1} h_l(\Psi)y^{\dim \Psi + 1 - l}, \\ F_{\Psi}(y) &= \sum_{l=0}^{\dim \Psi + 1} f_{l-1}(\Psi)y^{\dim \Psi + 1 - l}, \end{aligned}$$

эту связь можно описать соотношением

$$H_{\Psi}(y) = F_{\Psi}(y-1). \quad (2)$$

Эквивалентным образом, мы имеем для каждого l , $0 \leq l \leq \dim \Psi + 1$,

$$\begin{aligned} h_l(\Psi) &= (-1)^l \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{\dim \Psi + 1 - j}{l - j} f_{j-1}(\Psi), \\ f_{l-1}(\Psi) &= \sum_{j=0}^l \binom{\dim \Psi + 1 - j}{l - j} h_j(\Psi). \end{aligned} \quad (3)$$

2.4. Флаговые f - и h -векторы вполне сбалансированных комплексов²

Пусть Δ — комплекс с множеством вершин V . Говорят, что комплекс Δ вполне сбалансированный (коротко, сбалансированный), если существует отображение

²см. [10], Разд. 3.12; [7], Разд. III.4.

$\kappa: V \rightarrow [\dim \Delta + 1]$, удовлетворяющее требованию: если $\{v_i, v_j\}$ — ребро из Δ , то $\kappa(v_i) \neq \kappa(v_j)$. Другими словами, если интерпретировать отображение κ как раскрашивание множества вершин V цветами $1, \dots, (\dim \Delta + 1)$, то все вершины любой грани оказываются окрашенными в разные цвета. Для сбалансированного комплекса Δ и произвольного подмножества $S \subseteq [\dim \Delta + 1]$, обозначим через

$$\alpha_\Delta(S): |\{A \in \Delta: \kappa(A) = S\}|$$

число граней из Δ , раскрашенных в точности множеством цветов S . Функцию $\alpha_\Delta(S)$ называют флаговым f -вектором сбалансированного комплекса Δ . Из сказанного следует, что для $0 \leq i \leq \dim \Delta$

$$f_i(\Delta) = \sum_{S \subseteq [\dim \Delta + 1]: |S|=i+1} \alpha_\Delta(S).$$

Функция

$$\beta_\Delta(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \alpha_\Delta(T)$$

называется флаговым h -вектором сбалансированного комплекса Δ . Имеет место соотношение

$$\alpha_\Delta(S) = \sum_{T \subseteq S} \beta_\Delta(T).$$

Наконец,

$$h_l(\Delta) = \sum_{S \subseteq [\dim \Delta + 1]: |S|=l} \beta_\Delta(S), \quad 0 \leq l \leq \dim \Delta + 1. \quad (4)$$

2.5. f - и h -треугольники комплексов³

Пусть Δ — комплекс. Степенью $\deg_\Delta A$ грани A комплекса Δ называется величина $\max\{|B|: A \subseteq B \in \Delta\}$, то есть максимальный размер гиперграни, содержащей A в качестве подмножества.

Массив натуральных чисел

$$(f_{i,j}(\Delta))_{0 \leq j \leq i \leq \dim \Delta + 1},$$

где

$$f_{i,j}(\Delta) = |\{A \in \Delta: \deg_\Delta A = i, |A| = j\}|,$$

называется f -треугольником комплекса Δ , а целочисленный массив

$$(h_{i,j}(\Delta))_{0 \leq j \leq i \leq \dim \Delta + 1},$$

где

$$h_{i,j}(\Delta) = (-1)^j \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{i-k}{j-k} f_{i,k}(\Delta),$$

³см. [9], Разд. 3; [11].

называется его h -треугольником. Обратно,

$$f_{i,j}(\Delta) = \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{j+1-k} h_{i,k}(\Delta). \quad (5)$$

Наконец, для $0 \leq l \leq \dim \Delta + 1$

$$f_{l-1}(\Delta) = \sum_{i=l}^{\dim \Delta + 1} f_{i,l}(\Delta), \quad (6)$$

$$h_l(\Delta) = (-1)^l \sum_{j=0}^l (-1)^j \sum_{s=j}^{\dim \Delta + 1 - l + j} h_{s,j}(\Delta) \binom{\dim \Delta + 1 - s}{l-j}. \quad (7)$$

2.6. f - и h -векторы шелушимых комплексов⁴

Непустой комплекс Δ называется шелушимым, если его гиперграни могут быть линейно упорядочены так, что для полученной последовательности $F_1, F_2, \dots, F_t$ подкомплекс

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [\emptyset, F_i] \right) \cap [\emptyset, F_k]$$

является чистым и $(\dim F_k - 1)$ -мерным для всех $k \in [2, t]$. Такой линейный порядок на множестве гиперграней называется шелушением, и для него ограничением $\mathcal{R}(F_k)$ гиперграни F_k называется единственная грань

$$\mathcal{R}(F_k) = \left\{ v \in F_k : F_k - \{v\} \in \bigcup_{s=1}^{k-1} [\emptyset, F_s] \right\} \in \Delta.$$

Таким образом, шелушению $F_1, F_2, \dots, F_t$ можно сопоставить разбиение

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^t [\mathcal{R}(F_i), F_i]$$

на непересекающиеся булевы интервалы, максимальными элементами которых являются гиперграни. Наконец, при указанном шелушении имеет место следующее соотношение для h -треугольника: для $0 \leq j \leq s \leq \dim \Delta + 1$ компонента $h_{s,j}(\Delta)$ равна числу гиперграней F из Δ таких, что $|F| = s$, $|\mathcal{R}(F)| = j$. Отсюда, f -вектор восстанавливается посредством (5) и (6).

В [9] понятие шелушимости комплексов перенесено с чистых комплексов на общие комплексы. О понятии шелушения чистых (относительных) комплексов, его обобщениях и приложениях (в том числе, о восходящей к [12] ясной интерпретации h -вектора чистого шелушимого комплекса) см. также [4], Разд. II.5.1; [13]; [5], Разд. VII.23; [7], Разд. III.2 и III.7; [8], Разд. 8.3.

⁴см. [9], Разд. 2 и 3.

2.7. Декомпозиции (относительных) комплексов и разбиения на булевы интервалы

К вопросу о шелушении комплексов примыкает важный круг проблем, связанный с декомпозицией комплексов и разбиениями их на булевы интервалы. Укажем лишь несколько работ: [7, 14–16].

Чистый комплекс Δ с множеством гиперграней $F_1, \dots, F_t$ называется разбиваемым, если существует его разбиение

$$\Delta = [R_1, F_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [R_t, F_t]$$

на непересекающиеся булевы интервалы, максимальными элементами которых являются гиперграни; шелушимые комплексы разбиваемы, обратное утверждение неверно (см., например, [8], Разд. 8.3). Для разбиваемого комплекса

$$\Delta = [R_1, F_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [R_t, F_t]$$

при $0 \leq l \leq \dim \Delta + 1$

$$f_{l-1}(\Delta) = \sum_{j=1}^t \binom{\dim \Delta + 1 - |R_j|}{l - |R_j|},$$

$$h_l(\Delta) = |\{j: |R_j| = l, j \in [t]\}|$$

(см., например, [7], Предл. III.2.3, и [8], Разд. 8.3).

2.8. Дуальные комплексы Александра

Пусть $\Delta \subseteq 2^V$ — комплекс. Комплекс

$$\Delta^* = \{V - F: F \in 2^V, F \notin \Delta\}$$

называется дуальным комплексом Александра (или комплексом Игона) для комплекса Δ . За комбинаторными и алгебраическими свойствами пар Δ, Δ^* , за фундаментальной комбинаторной двойственностью Александра и ее приложениями можно обратиться к статьям [10], Разд. 3.14; [7], Разд. 2.5 и [17–23].

2.9. Нормирования решеток и принцип включения–исключения

Нормированием решетки $\mathscr{D}$ со значениями в абелевой группе G называется произвольное отображение $v: \mathscr{D} \rightarrow G$ такое, что для всех $D_i, D_j \in \mathscr{D}$

$$v(D_i) + v(D_j) = v(D_i \vee D_j) + v(D_i \wedge D_j),$$

здесь символы $\vee$ и $\wedge$ использованы для обозначения операций взятия наименьшей верхней грани и наибольшей нижней грани соответственно. Общая формула решета для конечного случая задается следующим образом (см. [24], Предл. 4.62 из Разд. IV.4.B). Пусть v — произвольное нормирование конечной дистрибутивной решетки $\mathscr{D}$. Тогда для любых элементов $D_1, \dots, D_t \in \mathscr{D}$

$$v\left(\bigvee_{i=1}^t D_i\right) = \sum_{i=1}^t v(D_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq t} v(D_i \wedge D_j) \pm \dots + (-1)^{t-1} v(D_1 \wedge \dots \wedge D_t).$$

Подробнее о принципе включения–исключения (методе решета) и нормированиях (дистрибутивных) решеток см., например, [24], Разд. IV.4; [25], Лемма 2.2.29; [26], Гл. II; [10], Гл. 2 и [27, 28].

2.10. Обозначения для матриц и векторов

В данной статье мы будем использовать несколько вспомогательных матриц и векторов. Символ T обозначает транспонирование. Строки и столбцы матриц, как и компоненты векторов, индексируются начиная с нуля. Зафиксируем натуральное $m \geq 1$ и перечислим далее объекты, которые встретятся в данной работе.

Матрица

$$S(m) = (s_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m} \in Q^{(m+1) \times (m+1)},$$

в которой

$$s_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{m-i}{j-i},$$

для обратной матрицы $S(m)^{-1}$ элемент с индексами i, j равен $\binom{m-i}{j-i}$.

Теплицева матрица сдвига вперед (см. [29], Разд. 0.9.7)

$$T(m) = (t_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m} \in Q^{(m+1) \times (m+1)},$$

где $t_{i,j} = \delta_{j-i,1}$.

Перъединичная матрица перестановки (см. [29], Разд. 0.9.8)

$$U(m) = (u_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m} \in Q^{(m+1) \times (m+1)},$$

где $u_{i,j} = \delta_{i+j,m}$.

Матрица

$$B(m) = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m} \in Q^{(m+1) \times (m+1)},$$

где

$$b_{i,j} = (-1)^j \binom{i}{j}.$$

Отметим, что $B(m) = S(m)^{-1}U(m)S(m)$.

Для всех $k, 0 \leq k \leq m$, определим вектор-строки

$$\varphi(k; m) = (\varphi_0(k; m), \dots, \varphi_m(k; m)),$$

$$\vartheta(k; m) = (\vartheta_0(k; m), \dots, \vartheta_m(k; m))$$

из Q^{m+1} следующим образом: для $0 \leq j \leq m$

$$\varphi_j(k; m) = \binom{k}{j}, \quad \vartheta_j(k; m) = (-1)^j \binom{m-k}{j}.$$

Отметим, что

$$\vartheta(k; m) = \varphi(k; m)S(m),$$

$$\varphi(k; m) = \vartheta(k; m)S(m)^{-1}.$$

Вектор-строка

$$\tau(m) = (\tau_0(m), \dots, \tau_m(m)) \in Q^{m+1},$$

где $\tau_j(m) = 2^{m-j}$ для $0 \leq j \leq m$.

Вектор-строка

$$\iota(m) = (\iota_0(m), \dots, \iota_m(m)) \in Q^{m+1},$$

все компоненты которой единицы, то есть $\iota_j(m) = 1$ для $0 \leq j \leq m$. Отметим, что

$$\begin{aligned} S(m)\tau(m)^\top &= \iota(m)^\top, \\ S(m)^{-1}\iota(m)^\top &= \tau(m)^\top. \end{aligned}$$

3. Несколько инструментов перечисления

Зафиксируем натуральное $m \geq 1$ и для множества $[m]$ рассмотрим его булеан $2^{[m]}$. Мы будем называть элементы комплекса $2^{[m]}$ гранями. Мы будем относить к комплексам, содержащимся в $2^{[m]}$, его пустое подмножество $\emptyset$, комплекс без граней. Комплекс $\emptyset$ не имеет граней, а комплекс $\{\emptyset\}$, где $\emptyset$ обозначает пустое подмножество множества $[m]$, состоит из единственной грани, размерности -1 . Мы будем называть произвольное подмножество Φ комплекса $2^{[m]}$ системой граней.

В данной статье используются два векторных инструмента перечисления граней в произвольных системах граней, которые родственны инструментам перечисления из [30, 31]; в указанных статьях размерности взаимно обратных векторных описаний симплициального объекта, вообще говоря, не привязаны к размерности объекта. Кроме того, термины сходны с обычными f - и h -векторами из комбинаторной теории комплексов (см. раздел 2).

Определение 1. Свяжем с каждой системой граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ два вектора, вектор-строку

$$f(\Phi; m) = (f_0(\Phi; m), \dots, f_m(\Phi; m)) \in Q^{m+1}$$

с компонентами

$$f_l(\Phi; m) = |\{A \in \Phi: |A| = l\}|, \quad 0 \leq l \leq m,$$

и вектор-строку

$$h(\Phi; m) = (h_0(\Phi; m), \dots, h_m(\Phi; m)) \in Q^{m+1}$$

с компонентами

$$h_l(\Phi; m) = (-1)^l \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{m-j}{l-j} f_j(\Phi; m), \quad 0 \leq l \leq m.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} f(\emptyset; m) &= h(\emptyset; m) = (0, 0, \dots, 0), \\ f(\{\emptyset\}; m) &= h(\{\emptyset\}; m) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Для произвольной системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ определим полиномы от одной переменной

$$F_{\Phi;m}(y) = \sum_{l=0}^m f_l(\Phi; m) y^{m-l}, \quad H_{\Phi;m}(y) = \sum_{l=0}^m h_l(\Phi; m) y^{m-l}. \quad (8)$$

Непосредственно из определения 1 следует, что эти полиномы связаны соотношением

$$H_{\Phi;m}(y) = F_{\Phi;m}(y-1), \quad (9)$$

которое аналогично (2). Кроме того,

$$f_l(\Phi; m) = \sum_{j=0}^l \binom{m-j}{l-j} h_j(\Phi; m), \quad 0 \leq l \leq m. \quad (10)$$

Пример 1. Рассмотрим систему граней $\Phi = \{1, 2, 12, 13, 123\} \subseteq 2^{[3]}$, где, например, запись 13 используется, для краткости, вместо $\{1, 3\} \subset [3]$. Здесь

$$\begin{aligned} f(\Phi; 3) &= (0, 2, 2, 1), \\ h(\Phi; 3) &= (0, 2, -2, 1), \\ F_{\Phi;3}(y) &= 2y^2 + 2y + 1, \\ H_{\Phi;3}(y) &= 2y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Замечание 1. Прокомментируем вторую часть определения 1. Рассмотрим произвольный комплекс $\Delta \subseteq 2^{[m]}$ с непустым множеством вершин. Записывая формулу (1) для функции Гильберта комплекса Δ в виде

$$F(\mathbf{k}[\Delta], t) = \sum_{j=-1}^{m-1} f_j(\Delta) \frac{t^{j+1}}{(1-t)^{j+1}},$$

получаем, что

$$F(\mathbf{k}[\Delta], t) = \frac{1}{(1-t)^m} (h_0(\Delta; m) + h_1(\Delta; m)t + \dots + h_m(\Delta; m)t^m).$$

Замечание 2. Для выяснения связи между обычным h -вектором $h(\Psi)$ и вектором $h(\Psi; m)$ относительного комплекса $\Psi \subseteq 2^{[m]}$ достаточно рассмотреть соотношение

$$\frac{1}{(1-t)^{\dim \Psi + 1}} \sum_{i=0}^{\dim \Psi + 1} h_i(\Psi) t^i = \frac{1}{(1-t)^m} \sum_{j=0}^m h_j(\Psi; m) t^j,$$

которое позволяет сделать заключение, что для $0 \leq l \leq \dim \Psi + 1$

$$h_l(\Psi) = \sum_{j=0}^l \binom{m+l-\dim \Psi-j-2}{l-j} h_j(\Psi; m), \quad (11)$$

и для $0 \leq l \leq m$

$$h_l(\Psi; m) = (-1)^l \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{m-\dim \Psi-1}{l-j} h_j(\Psi).$$

Если $\dim \Psi + 1 < m$, то вектор $h(\Psi; m)$ является избыточным описанием относительного комплекса $\Psi \subseteq 2^{[m]}$. В самом деле, соотношение (11) показывает, что поднабора

$$(h_0(\Psi; m), \dots, h_{\dim \Psi + 1}(\Psi; m))$$

достаточно для восстановления h -вектора $h(\Psi)$, а значит, и для восстановления f -вектора $f(\Psi)$ посредством (3). С учетом конечности размерности Крулля модуля I_Ψ над $k[\Delta]$ теория колец Стенли–Рейснера и функций Гильберта градуированных алгебр (см. [4], Разд. 4, 5; [5], Гл. IV, V; [7], Разд. I.1, II, III.7; [32]) дает, с позиций коммутативной алгебры, четкие обоснования для подобных вычислительных наблюдений.

Замечание 3. Еще один комментарий к второй части определения 1 может быть таким: симплекс $2^{[m]}$ является вполне сбалансированным комплексом и его отображением раскрашивания является любая биекция $\varkappa: [m] \rightarrow [m]$. Используя обозначения

$$\alpha_\Phi(S) = |\{A \in \Phi: \varkappa(A) = S\}|,$$

$$\beta_\Phi(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \alpha_\Phi(T)$$

для системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ и подмножества $S \subseteq [m]$, получаем (ср. с (4)), что

$$h_l(\Phi; m) = \sum_{S \subseteq [m], |S|=l} \beta_\Phi(S), \quad 0 \leq l \leq m.$$

Замечание 4. Из определения 1 следует, что для любой системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ справедливы соотношения (аналогичные, для случая комплексов Φ , соотношениям [4], След. 5.1.9; [5], Упр. 6.4; [7], стр. 58)

$$h_0(\Phi; m) = f_0(\Phi; m),$$

$$h_1(\Phi; m) = f_1(\Phi; m) - m f_0(\Phi; m),$$

$$h_m(\Phi; m) = (-1)^m \sum_{j=0}^m (-1)^j f_j(\Phi; m),$$

$$f_m(\Phi; m) = h(\Phi; m) \iota(m)^\top,$$

кроме того, $h(\Phi; m) \tau(m)^\top = f(\Phi; m) \iota(m)^\top = |\Phi|$.

Также справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любой системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$

$$h(\Phi; m) = f(\Phi; m) S(m), \quad f(\Phi; m) = h(\Phi; m) S(m)^{-1}.$$

Рассмотрим булеан $2^{[m]}$ как булев интервал $[\hat{0}, [m]]$ булеана $2^{[m+1]}$. Для произвольной системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ и для каждого l , $1 \leq l \leq m$, выполняется равенство

$$h_l(\Phi; m+1) - h_l(\Phi; m) + h_{l-1}(\Phi; m) = 0.$$

Кроме того, для каждого k , $0 \leq k \leq m$, выполняется равенство

$$h_k(\Phi; m) = \sum_{l=0}^k h_l(\Phi; m+1).$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям (9) и (10) из [30].

4. Нормирования дистрибутивных решеток, покрытия и разбиения систем граней

В этом разделе нас будут интересовать некоторые нормирования булевой решетки $\mathcal{D}(m)$ всех подмножеств булеана $2^{[m]}$, упорядоченных по включению. Любая система граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ будет рассматриваться как элемент $\Phi \in \mathcal{D}(m)$.

Пусть $\Phi', \Phi'' \subseteq 2^{[m]}$ — произвольные системы граней. Иллюстрацией к комбинаторному принципу включения-исключения могут служить очевидные соотношения

$$\begin{aligned} f(\Phi'; m) + f(\Phi''; m) &= f(\Phi' \cup \Phi''; m) + f(\Phi' \cap \Phi''; m), \\ F_{\Phi'; m}(y) + F_{\Phi''; m}(y) &= F_{\Phi' \cup \Phi''; m}(y) + F_{\Phi' \cap \Phi''; m}(y) \end{aligned}$$

и аналогичные соотношения для векторов $h(\cdot; m)$ и полиномов $H_{\cdot; m}(y)$, из которых вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Каждое из отображений*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(m) &\rightarrow Q^{m+1}, & \Phi &\rightarrow f(\Phi; m); \\ \mathcal{D}(m) &\rightarrow C[[y]], & \Phi &\rightarrow F_{\Phi; m}(y); \\ \mathcal{D}(m) &\rightarrow Q^{m+1}, & \Phi &\rightarrow h(\Phi; m); \\ \mathcal{D}(m) &\rightarrow C[[y]], & \Phi &\rightarrow H_{\Phi; m}(y), \end{aligned}$$

где $C[[y]]$ — кольцо формальных степенных рядов от одной переменной, является нормированием дистрибутивной решетки $\mathcal{D}(m)$.

Замечание 5. Для целей перечисления граней комплексов можно рассматривать ограничения этих нормирований на соответствующую дистрибутивную подрешетку (элементами которой являются комплексы из $2^{[m]}$) решетки $\mathcal{D}(m)$.

Если $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ — непустая система граней и

$$\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_\theta$$

— произвольное ее покрытие подсистемами граней

$$\Phi_k \subseteq 2^{[m]}, \quad 1 \leq k \leq \theta,$$

то из леммы 2 и общей формулы решета следует, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f(\Phi; m) &= - \sum_{k=1}^{\theta} (-1)^k \sum_{T \subseteq [\theta], |T|=k} f\left(\bigcap_{t \in T} \Phi_t; m\right), \\ F_{\Phi; m}(y) &= - \sum_{k=1}^{\theta} (-1)^k \sum_{T \subseteq [\theta], |T|=k} F_{(\bigcap_{t \in T} \Phi_t); m}(y). \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения выполняются для вектора $h(\Phi; m)$ и полинома $H_{\Phi; m}(y)$. Если же

$$\Phi = \Phi_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \Phi_\theta$$

— некоторое разбиение системы граней на непересекающиеся подсистемы, то

$$f(\Phi; m) = \sum_{k=1}^{\theta} f(\Phi_k; m), \quad F_{\Phi; m}(y) = \sum_{k=1}^{\theta} F_{\Phi_k; m}(y),$$

аналогичные соотношения справедливы для $h(\Phi; m)$ и $H_{\Phi; m}(y)$. Более плодотворным является анализ разбиений систем граней на булевы интервалы (см. [14], Разд. 4), поскольку комбинаторные описания булева интервала зависят лишь от размеров его минимальной и максимальной граней (о свойствах биномиальных частично упорядоченных множеств (см. [10], Разд. 3.15; [33])).

Лемма 3. Для произвольного булева интервала $[A, B] \subseteq 2^{[m]}$

$$\begin{aligned} f([A, B]; m) &= \varphi(|B - A|; m) T(m)^{|A|} \\ &= \vartheta(|B - A|; m) S(m)^{-1} T(m)^{|A|}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} h([A, B]; m) &= \vartheta(|B - A|; m) S(m)^{-1} T(m)^{|A|} S(m) \\ &= \varphi(|B - A|; m) T(m)^{|A|} S(m), \end{aligned}$$

$$F_{[A, B]; m}(y) = y^{m-|B|} (y+1)^{|B-A|}, \quad (13)$$

$$H_{[A, B]; m}(y) = (y-1)^{m-|B|} y^{|B-A|}.$$

Доказательство. Докажем (12). Для симплекса $[\hat{0}, C]$ такого, что $|C| = |B - A|$,

$$\begin{aligned} f([\hat{0}, C]; m) &= \varphi(|B - A|; m), \\ h([\hat{0}, C]; m) &= \vartheta(|B - A|; m). \end{aligned}$$

Произведение $\varphi(|B - A|; m) T(m)^{|A|}$ отвечает соотношению между компонентами

$$f_l([A, B]; m) = \begin{cases} \varphi_{l-|A|}(|B - A|; m), & \text{если } |A| \leq l \leq |B|, \\ 0, & \text{если } l \leq |A| - 1 \text{ или } |B| + 1 \leq l. \end{cases}$$

Дальнейшее следует из леммы 1. Соотношение для $h([A, B]; m)$ доказывается аналогично.

Докажем (13). Для любого симплекса $[\hat{0}, C]$ такого, что $|C| = |B - A|$,

$$\begin{aligned} F_{[\hat{0}, C]; m}(y) &= \sum_{l=0}^m f_l([\hat{0}, C]; m) y^{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m \varphi_l(|C|; m) y^{m-l} = y^{m-|C|} (y+1)^{|C|}. \end{aligned}$$

Остается принять во внимание, что $F_{[A, B]; m}(y) = y^{-|A|} F_{[\hat{0}, C]; m}(y)$. Соотношение для $H_{[A, B]; m}(y)$ теперь следует из (9) или может быть доказано сходным образом.

Определение 2. Пусть $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ — произвольная система граней.

Если $|\Phi| > 0$ и $\Phi = [A_1, B_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [A_{\theta}, B_{\theta}]$ — некоторое разбиение Φ на булевы интервалы

$$[A_k, B_k] \subseteq 2^{[m]}, \quad 1 \leq k \leq \theta,$$

то профилем этого разбиения будем называть массив

$$P = (p_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m}$$

натуральных чисел, определяемый равенствами

$$p_{i,j} = |\{[A_k, B_k]: |B_k - A_k| = i, |A_k| = j\}|.$$

Поставим в соответствие пустой системе граней $\emptyset \subset 2^{[m]}$ массив $P = (p_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m}$, у которого все элементы $p_{i,j} = 0$.

Следующий результат немедленно следует из лемм 2 и 3.

Теорема 1. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(m)$ — произвольная система граней из $2^{[m]}$ и P — профиль некоторого разбиения Φ на булевы интервалы. Тогда

$$\begin{aligned} f(\Phi; m) &= \sum_{i=0}^m \varphi(i; m) \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} T(m)^j \\ &= \sum_{i=0}^m \vartheta(i; m) S(m)^{-1} \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} T(m)^j, \\ h(\Phi; m) &= \sum_{i=0}^m \vartheta(i; m) S(m)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} T(m)^j \right) S(m) \\ &= \sum_{i=0}^m \varphi(i; m) \left(\sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} T(m)^j \right) S(m), \\ F_{\Phi, m}(y) &= \sum_{i=0}^m (y+1)^i \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} y^{m-i-j}, \\ H_{\Phi, m}(y) &= \sum_{i=0}^m y^i \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} (y-1)^{m-i-j}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим разбиение $\Phi = [2, 2] \dot{\cup} [1, 12] \dot{\cup} [13, 123]$ с профилем P' , у которого мы перечислим ненулевые компоненты: $p'_{0,1} = p'_{1,1} = p'_{1,2} = 1$. В частности, получаем, что

$$\begin{aligned} h(\Phi; 3) &= \sum_{i=0}^3 \varphi(i; 3) \left(\sum_{j=0}^{3-i} p'_{i,j} T(3)^j \right) S(3) \\ &= \left((1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 2, -2, 1). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} H_{\Phi;3}(y) &= \sum_{i=0}^3 y^i \sum_{j=0}^{3-i} p'_{i,j} (y-1)^{3-i-j} \\ &= y^0 (y-1)^{3-0-1} + y^1 ((y-1)^{3-1-1} + (y-1)^{3-1-2}) = 2y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Следующее утверждение связывает векторы $f(\cdot; m)$ и $h(\cdot; m)$ с произвольными профилями разбиений на булевы интервалы. О специфических разбиениях (на булевы интервалы, максимальные элементы которых являются гипергранями) шелушимых и разбиваемых комплексов см. Раздел 2.

Следствие 1. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(m)$ — произвольная система граней из $2^{[m]}$. Для любого профиля P разбиения Φ на булевы интервалы и для $0 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} f_l(\Phi; m) &= \sum_{j=0}^l \sum_{i=l-j}^{m-j} p_{i,j} \binom{i}{l-j}, \\ h_l(\Phi; m) &= (-1)^l \sum_{i=0}^{m-l} \sum_{j=0}^l (-1)^j p_{i,j} \binom{m-i-j}{l-j}. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем второе соотношение. Из определяющего соотношения (8) и теоремы 1 о профилях следует, что

$$\begin{aligned} H_{\Phi;m}(y) &= \sum_{l=0}^m h_l(\Phi; m) y^{m-l} = \sum_{i=0}^m y^i \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} (y-1)^{m-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j} \sum_{k=0}^{m-i-j} (-1)^k \binom{m-i-j}{k} y^{m-j-k}. \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов приводит к доказываемому результату. Доказательство первого соотношения проводится аналогично.

Пример 3. Рассмотрим еще одно разбиение

$$\Phi = [1, 13] \dot{\cup} [2, 12] \dot{\cup} [123, 123]$$

с профилем P'' , у которого мы перечислим ненулевые компоненты: $p''_{1,1} = 2$, $p''_{0,3} = 1$. Для этого разбиения

$$\begin{aligned} h_2(\Phi; 3) &= (-1)^2 \sum_{i=0}^{3-2} \sum_{j=0}^2 (-1)^j p'_{i,j} \binom{3-i-j}{2-j} \\ &= - \binom{3-0-1}{2-1} - \binom{3-1-1}{2-1} + \binom{3-1-2}{2-2} = -2. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$h_2(\Phi; 3) = (-1)^2 \sum_{i=0}^{3-2} \sum_{j=0}^2 (-1)^j p''_{i,j} \binom{3-i-j}{2-j} = -2 \binom{3-1-1}{2-1} = -2.$$

Замечание 6. Из следствия 1 вытекает также, что для любого профиля разбиения системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$ на булевы интервалы и для всех l , $1 \leq l \leq m$,

$$h_l(\Phi; m) - h_{l-1}(\Phi; m) = (-1)^l \sum_{i=0}^{m-l} \sum_{j=0}^l (-1)^j p_{i,j} \binom{m-i-j+1}{l-j}.$$

Напомним, что для комплекса Δ вектор-строка

$$g(\Delta) = (g_0(\Delta), \dots, g_{\lfloor (\dim \Delta + 1)/2 \rfloor}(\Delta)),$$

где $g_0(\Delta) = 1$ и

$$g_l(\Delta) = h_l(\Delta) - h_{l-1}(\Delta), \quad 1 \leq l \leq \lfloor (\dim \Delta + 1)/2 \rfloor,$$

называется g -вектором комплекса Δ . Этот вектор является очень важным инструментом в комбинаторной теории многогранников, поскольку с его помощью формулируются известные g -теорема о полной характеристизации чисел граней симплициальных многогранников и соответствие МакМюллена (см., например, [3]; [34], Разд. 20; [35]; [7], Разд. III.1; [8], Разд. 8.6).

Ограничения, накладываемые на системы граней, автоматически отражаются на профилях разбиений на булевы интервалы. Примером таких ограничений являются известные соотношения Дена–Соммервилля (см. [34], Разд. 17; [4], Разд. II.5.2 и II.5.4; [36], Гл. 9; [5], Разд. III.11; [30], Разд. 5.1; [10], Разд. 3.14; [7], Разд. II.3, II.6 и III.6; [37], Разд. I.5; [8], Разд. 8.3; [38, 39]).

Предложение 1. *Предположим, что для комплекса $\Delta \subseteq 2^{[m]}$ выполняются соотношения Дена–Соммервилля*

$$h_l(\Delta) = h_{\dim \Delta + 1 - l}(\Delta), \quad 0 \leq l \leq \dim \Delta + 1,$$

или, что эквивалентно,

$$h_l(\Delta; m) = (-1)^{m - \dim \Delta - 1} h_{m-l}(\Delta; m), \quad 0 \leq l \leq m.$$

Тогда произвольный профиль разбиения Δ на булевы интервалы подчиняется соотношениям

$$\sum_{i=0}^{m-l} \sum_{j=0}^l (-1)^j p_{i,j} \binom{m-i-j}{l-j} = (-1)^{\dim \Delta + 1} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{m-l} (-1)^j p_{i,j} \binom{m-i-j}{l-i}$$

для всех l , $0 \leq l \leq \dim \Delta + 1$.

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 1.

5. Дуальные системы граней

Лемма 2 позволяет сделать вывод о том, что для произвольной системы граней $\Phi \subseteq 2^{[m]}$

$$\begin{aligned} f(\Phi; m) + f(2^{[m]} - \Phi; m) &= f(2^{[m]}; m) = \varphi(m; m), \\ h(\Phi; m) + h(2^{[m]} - \Phi; m) &= h(2^{[m]}; m) = \vartheta(m; m), \\ F_{\Phi; m}(y) + F_{2^{[m]} - \Phi; m}(y) &= F_{2^{[m]}; m}(y) = (y + 1)^m, \\ H_{\Phi; m}(y) + H_{2^{[m]} - \Phi; m}(y) &= H_{2^{[m]}; m}(y) = y^m. \end{aligned}$$

Систему граней

$$\Phi^* = \{[m] - A : A \in 2^{[m]}, A \notin \Phi\}$$

будем называть дуальной к системе граней Φ в булеане $2^{[m]}$. Воспользовавшись леммой 1 и тем обстоятельством, что

$$f(2^{[m]} - \Phi; m) = f(\Phi^*; m)U(m),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} f(\Phi; m) + f(\Phi^*; m)U(m) &= h(\Phi; m)S(m)^{-1} + h(\Phi^*; m)S(m)^{-1}U(m) \\ &= \varphi(m; m), \\ F_{\Phi; m}(y) + y^m F_{\Phi^*; m}(1/y) &= H_{\Phi; m}(y+1) + (y+1)^m H_{\Phi^*; m}(1/(y+1)) \\ &= (y+1)^m. \end{aligned} \quad (14)$$

Замечание 7. Приведем простое замечание о том, что для каждого l , $0 \leq l \leq m$, выполняется равенство

$$f_l(\Phi; m) + f_{m-l}(\Phi^*; m) = \binom{m}{l}.$$

Воспользовавшись (10), получаем эквивалентное соотношение

$$\sum_{s=0}^l \binom{m-s}{m-l} h_s(\Phi; m) + \sum_{t=0}^{m-l} \binom{m-t}{l} h_t(\Phi^*; m) = \binom{m}{l}, \quad 0 \leq l \leq m.$$

Еще один вывод состоит в том, что для любой пары Φ, Φ^* систем граней компоненты $h_l(\Phi^*; m)$, $1 \leq l \leq m$, являются коэффициентами биномиального разложения для компонент $h_k(\Phi; m)$, $1 \leq k \leq m$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\Phi, \Phi^* \subseteq 2^{[m]}$ — произвольная пара взаимно дуальных систем граней. Тогда

$$f(\Phi; m)S(m) + f(\Phi^*; m)U(m)S(m) = h(\Phi; m) + h(\Phi^*; m)B(m) = \vartheta(m; m).$$

В частности, для каждого l , $0 \leq l \leq m$,

$$h_l(\Phi; m) + (-1)^l \sum_{j=l}^m \binom{j}{l} h_j(\Phi^*; m) = \delta_{0,l}.$$

Теорема следует из (14), если учесть, что

$$B(m) = S(m)^{-1}U(m)S(m).$$

В заключение отметим, что для любой пары $\Phi, \Phi^* \subseteq 2^{[m]}$ взаимно дуальных систем граней выполняется равенство

$$h_m(\Phi; m) = (-1)^{m-1} h_m(\Phi^*; m)$$

(см. также [10], Разд. 3.14), и для произвольной пары $\Delta, \Delta^* \subseteq 2^{[m]}$ взаимно дуальных комплексов

$$h_{m-\dim \Delta^*-1}(\Delta; m) = -f_{\dim \Delta^*+1}(\Delta^*; m);$$

кроме того, $h_l(\Delta; m) = 0$ для всех $l \in [m - \dim \Delta^* - 2]$.

Список литературы

1. Риордан Дж., *Комбинаторные тождества*. Наука, Москва, 1982.
2. Billera L. J., Björner A., Face numbers of polytopes and complexes. In: *CRC Handbook on Discrete and Computational Geometry*. CRC, Boca Raton, 1997, pp 291–310.
3. Björner A., Face numbers of complexes and polytopes. In: *Proc. Intern. Congress Math., Berkeley, 1986*. Amer. Math. Soc., Providence, 1987, pp 1408–1418.
4. Bruns W., Herzog J., *Cohen–Macaulay Rings*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
5. Hibi T., *Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes*. Carslaw, Glebe, 1992.
6. Klee V., Kleinschmidt P., Convex polytopes and related complexes. In: *Handbook of Combinatorics (Graham R. L., Ed.)*, V. 1. Elsevier, Amsterdam, 1995, pp. 875–917.
7. Stanley R. P., *Combinatorics and Commutative Algebra*. Birkhäuser, Berlin, 1996.
8. Ziegler G. M., *Lectures on Polytopes*. Springer, Berlin, 1995.
9. Björner A., Wachs M., Shellable nonpure complexes and posets, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1996) **348**, 1299–1327, (1997) **349**, 3945–3975.
10. Стенли Р., *Перечислительная комбинаторика*. Мир, Москва, 1990.
11. Duval A. M., Algebraic shifting and sequentially Cohen–Macaulay simplicial complexes. *Electronic J. Combinatorics* (1996) **3**, №21.
12. McMullen P., The maximum number of faces of a convex polytope. *Mathematika* (1970) **17**, 179–184.
13. Chari M. K., Two decompositions in topological combinatorics with applications to matroid complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1997) **349**, 3925–3944.
14. Chari M. K., Steiner complexes, matroid ports, and shellability. *J. Comb. Theory* (1993) **59**, 41–68.
15. Duval A. M., *On f -Vectors and Relative Homology*. Preprint Depart. Math. Sci. Univ. Texas at El Paso, 1997.
16. Provan J. S., Billera L. J., Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra. *Math. Oper. Res.* (1980) **5**, 576–594.
17. Bayer D., *Monomial Ideals and Duality*. Preprint Depart. Math., Barnard College, Columbia University, 1996.
18. Björner A., Butler L. M., Matveev A. O., Note on a combinatorial application of Alexander duality *J. Comb. Theory* (1997) **80**, 163–165.
19. Eagon J. A., Reiner V., Resolutions of Stanley–Reisner rings and Alexander duality *J. Pure and Appl. Algebra* (1998) **130**, 265–275.
20. Miller E., *Alexander Duality for Monomial Ideals and their Resolutions*. Preprint Math. AG/9812095, 1998.
21. Miller E., Sturmfels B., Yanagawa K., *Generic and Cogeneric Monomial Ideals*. Preprint Math. AG/9812126, 1998.
22. Reiner V., Welker V., *Linear Syzygies of Stanley–Reisner Ideals*. Preprint School Math., Univ. Minnesota, Minneapolis, 1998.
23. Terai N., Hibi T., Alexander duality theorem and second Betti numbers of Stanley–Reisner rings. *Adv. Math.* (1996) **124**, 332–333.
24. Айгнер М., *Комбинаторная теория*. Мир, Москва, 1982.
25. Гульден Я., Джексон Д., *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1990.

26. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
27. Барнабеи М., Брини А., Рота Дж.-К., Теория функций Мёбиуса. *Успехи матем. наук* (1986) **41**, №3, 113–157.
28. Geissinger L., Valuations on distributive lattices. I, II, III. *Archiv Math.* (1973) **24**, 230–239, 337–345, 475–481.
29. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ*. Мир, Москва, 1989.
30. McMullen P., Shephard G. C., *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971.
31. McMullen P., Walkup D. W., A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes. *Mathematika* (1971) **18**, 264–273.
32. Stanley R. P., Hilbert functions of graded algebras. *Adv. Math.* (1978) **28**, 57–83.
33. Stanley R. P., Binomial posets, Möbius inversion and permutation enumeration. *J. Comb. Theory* (1976) **20**, 336–356.
34. Бренстед А., *Введение в теорию выпуклых многогранников*. Мир, Москва, 1988.
35. Kalai G., Some aspects of the combinatorial theory of convex polytopes. In: *NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.* (1994) **440**, 205–229.
36. Grünbaum B. *Convex Polytopes*. Interscience, London, 1967.
37. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники. Графы. Оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
38. Barvinok A. I., On equivariant generalization of Dehn–Sommerville equations. *European J. Combinatorics* (1992) **13**, 419–428.
39. Bayer M. M., Billera L. J., Generalized Dehn–Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets. *Invent. Math.* (1985) **79**, 143–157.

Статья поступила 10.01.1999.