Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Табаров, О некоторых многообразиях абелевых ква-
зигрупп, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 3, 154–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 04:06:14

О некоторых многообразиях абелевых квазигрупп

© 2000 г. А. Х. Табаров

Известно, что все примитивные квазигруппы, изотопные группам, характеризуются одним тождеством. Ранее Г. Б. Белявской и автором были описаны многообразия всех примитивных линейных, алинейных и абелевых квазигрупп (T -квазигрупп). В этой работе описываются многообразия абелевых квазигрупп определенного вида.

Известно, что все примитивные квазигруппы, изотопные группам, характеризуются одним тождеством (см. [1]). Г. Б. Белявской и автором в [2, 3] были описаны многообразия всех примитивных линейных, алинейных и абелевых квазигрупп (T -квазигрупп). В этой работе описываются многообразия абелевых квазигрупп определенного вида. Заметим, что совпадение класса примитивных абелевых (в смысле Маккензи) квазигрупп с классом T -квазигрупп доказано в [4].

Приведем основные определения и сведения, необходимые нам в дальнейшем. Согласно [5], квазигруппа $(Q, \cdot)$ — это множество Q с одной обозначаемой точкой бинарной операцией такой, что каждое из уравнений $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимо для любых $a, b \in Q$.

Примитивная квазигруппа $(Q, \cdot, /, \backslash)$ определяется как множество Q с тремя бинарными операциями, связанными соотношениями

$$(x/y)y = x, \quad xy/y = x, \quad x(x \backslash y) = y, \quad x \backslash xy = y.$$

Каждой квазигруппе $(Q, \cdot)$ соответствует примитивная квазигруппа $(Q, \cdot, /, \backslash)$, где $(Q, /)$ и $(Q, \backslash)$ — соответственно правая и левая обратные квазигруппы для $(Q, \cdot)$:

$$xy = z \iff z/y = x \iff x \backslash z = y.$$

Квазигруппа $(Q, \circ)$ изотопна квазигруппе $(Q, \cdot)$, если существует такая тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$, что

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y$$

для всех $x, y \in Q$.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется линейной над группой $(Q, +)$ (см. [1]), если $(Q, \cdot)$ изотопна группе $(Q, +)$ и изотопия имеет вид

$$xy = \varphi x + c + \psi y,$$

где $\varphi, \psi \in \text{Aut}(Q, +)$, $c \in Q$. Частными случаями линейных квазигрупп являются абелевы квазигруппы или T -квазигруппы [6] (для них $(Q, +)$ — абелева группа).

Квазиавтоморфизм (антиквазиавтоморфизм) квазигруппы $(Q, \cdot)$ — это главная компонента γ автотопии (антиавтотопии) $T(\alpha, \beta, \gamma)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$, то есть

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y \quad (\gamma(xy) = \alpha y \cdot \beta x).$$

Согласно лемме 2.5 из [5], любой квазиавтоморфизм группы $(Q, +)$ имеет вид

$$\gamma x = R_s \gamma_0 x = L_s \gamma'_0 x, \quad (1)$$

где $\gamma_0, \gamma'_0 \in \text{Aut}(Q, +)$, $R_s x = x + s$, $L_s x = s + x$.

Как отмечено в [1], утверждение, аналогичное лемме 2.5 из [5], справедливо и для антиквазиавтоморфизма γ (в [1] он называется обратным квазиавтоморфизмом). В этом случае γ_0 и γ'_0 из (1) являются антиавтоморфизмами группы $(Q, +)$.

Теорема 1. Для квазигруппы $(Q, \cdot)$ следующие условия эквивалентны:

(1) $(Q, \cdot)$ — абелева квазигруппа, $xy = \varphi x + c + \psi y$ и $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$;

(2) в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, /, \backslash)$ выполняется тождество

$$[x(y/u)]z = [x(u/u)](zy/u); \quad (2)$$

(3) в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, /, \backslash)$ выполняется тождество

$$x[(u \setminus y)z] = (u \setminus yx)[u \setminus u]z. \quad (3)$$

Доказательство. Докажем, что из 1 следует 2. Пусть $(Q, \cdot)$ — абелева квазигруппа с условием

$$\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi.$$

Проверим справедливость тождества (2). Заметим, что из равенства $xy = \varphi x + c + \psi y$ следует, что

$$\begin{aligned} x/y &= \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi y, \\ x \setminus y &= -\psi^{-1}\varphi x - \psi^{-1}c + \psi^{-1}y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [x(y/x)]z &= \varphi[x(y/u)] + c + \psi z \\ &= \varphi[\varphi x + c + \psi(\varphi^{-1}y - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u)] + c + \psi z \\ &= \varphi[\varphi x + c + \psi\varphi^{-1}y - \psi\varphi^{-1}c - \psi\varphi^{-1}\psi u] + c + \varphi z \\ &= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}y\varphi\psi\varphi^{-1}c\varphi\psi\varphi^{-1}\psi u + c + \psi z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x(u/u)] \cdot (zy/u) &= \varphi[x(u/u)] + c + \psi(zy/u) \\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi(u/u)] + c + \psi(zy/u) \\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi(\varphi^{-1}u - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u)] \\
&\quad + c + \psi(\varphi^{-1}(zy) - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u) \\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi\varphi^{-1}u - \psi\varphi^{-1}c\psi\varphi^{-1}\psi u] \\
&\quad + c + \psi\varphi^{-1}(zy) - \psi\varphi^{-1}c - \psi\varphi^{-1}\psi u \\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}u - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u \\
&\quad + c + \psi\varphi^{-1}(\varphi z + c + \psi y) - \psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}u \\
&= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u \\
&\quad + c + \psi z + \psi\varphi^{-1}c + \psi\varphi^{-1}\psi y - \psi\varphi^{-1}c \\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}y - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u + c + \psi z.
\end{aligned}$$

Следовательно, тождество (2) верно.

Докажем теперь, что из 2 следует 1. Пусть в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, /, \backslash)$ выполняется тождество (2). Фиксируем в (2) переменную u . Тогда по теореме Белюсова о четырех квазигруппах, связанных ассоциативным законом (см. [1]), квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе, поэтому по теореме Алберта любая лупа, изотопная квазигруппе $(Q, \cdot)$, является группой, в частности, группой является лупа $(Q, +)$, где

$$x + y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}, \quad a, b \in Q.$$

Перейдем в (2) к операции $+$, тогда

$$R_a[R_a x + L_b(y/u)] + L_b z = R_a[R_a x + L_b(u/u)] + L_b((R_a z + L_b y)/u).$$

Заменяя x на $R_a^{-1}x$, z на $L_b^{-1}z$ и y на $R_u y$, находим, что

$$R_a[x + L_b y] + z = R_a[x + L_b(u/u)] + L_b R_u^{-1}(R_a L_b^{-1} + L_b R_u y). \quad (4)$$

Полагая в (4) $z = 0$ и учитывая, что u — фиксированный элемент, получаем, что

$$R_a(x + L_b y) = \alpha x + \beta y$$

для соответствующих подстановок α и β , где R_a — квазиавтоморфизм группы $(Q, +)$:

$$R_a x = \varphi x + k, \quad \varphi \in \text{Aut}(Q, +), \quad k \in Q.$$

Положим в (4) $u = a$ и подберем x так, чтобы $R_a(x + L_b(a/a)) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 y + z = L_b R_a^{-1}(R_a L_b^{-1} z + L_b R_a y)$$

и $L_b R_a^{-1}$ — антиквазиавтоморфизм группы $(Q, +)$. Но R_a — квазиавтоморфизм, поэтому L_b — антиквазиавтоморфизм: $L_b y = t + \bar{\psi} y$, где $\bar{\psi}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$, $t \in Q$.

Таким образом,

$$xy = R_a x + L_b y = \varphi x + c + \bar{\psi} y, \quad c = k + t.$$

Заметим, что тождество (2) можно записать в виде

$$xy \cdot z = x(u/u) \cdot [(z \cdot yu)/u]. \quad (5)$$

Прежде чем перейти в (5) к операции $+$, заметим, что из равенства $xy = \varphi x + c + \bar{\psi}$ следует, что $x/y = \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}\bar{\psi}y - \varphi^{-1}c$. Действительно, пусть $xy = z$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= z/y, & z &= \varphi^{-1}(z/y) + c + \bar{\psi}y, \\ \varphi^{-1}(z/y) &= z - \bar{\psi}y - c, & z/y &= \varphi^{-1}z - \varphi^{-1}\bar{\psi}y - \varphi^{-1}c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} xy \cdot z &= \varphi(\varphi x + c + \bar{\psi}y) + c + \bar{\psi}z = \varphi^2 x + \varphi c + \varphi \bar{\psi}y + c + \bar{\psi}z, \\ x(u/u)[(z \cdot yu)/u] &= \varphi(\varphi x + c + \bar{\psi}(u/u)) + c + \bar{\psi}[(z \cdot yu)/u] \\ &= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi \bar{\psi}(\varphi^{-1}u - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c) + c \\ &\quad + \bar{\psi}[\varphi^{-1}(\varphi z + c + \bar{\psi}(\varphi y + c + \bar{\psi}u)) - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c] \\ &= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}u + c \\ &\quad + \bar{\psi}[z + \varphi^{-1}c + \varphi^{-1}\bar{\psi}^2 u + \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c] \\ &= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u \\ &\quad + \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}u + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c - \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u \\ &\quad + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}^2 u + \bar{\psi} \varphi^{-1}c + \bar{\psi}z. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi^2 x + \varphi c + \varphi \bar{\psi}y + c + \bar{\psi}z &= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1} \\ &\quad - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}u + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c \\ &\quad - \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c \\ &\quad + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}^2 u + \bar{\psi} \varphi^{-1}c + \bar{\psi}z. \end{aligned}$$

После сокращения получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi \bar{\psi}y + c &= \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}u + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c - \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}u \\ &\quad + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}^2 u + \bar{\psi} \varphi^{-1}c. \end{aligned}$$

Пусть $u = 0$. Тогда

$$\varphi \bar{\psi}y + c = -\varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}c.$$

Полагая $y = 0$, находим, что

$$c = -\varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}c.$$

Подставляя это выражение для c в левую часть предыдущего равенства, находим, что

$$\begin{aligned} \varphi \bar{\psi}y - \varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}c \\ = -\varphi \bar{\psi} \varphi^{-1}c + c - \bar{\psi} \varphi^{-1}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi} \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi} \varphi^{-1}c, \end{aligned}$$

откуда после сокращений приходим к равенству

$$\varphi\bar{\psi}y - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c = -\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y.$$

Положим $-\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c = p$, где $p \in Q$. Тогда

$$\varphi\bar{\psi}y + p = p + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y,$$

или

$$\tilde{R}_p\varphi\bar{\psi}y = \tilde{L}_p\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y, \quad (6)$$

откуда

$$\tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_py = \bar{\psi}\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}y.$$

Но $\bar{\psi}\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$. Поэтому

$$\tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_p(x + y) = \tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_py + \tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_px,$$

или

$$-p + x + y + p = -p + y + p - p + x + p,$$

откуда $x + y = y + x$, то есть группа $(Q, +)$ абелева и поэтому $\bar{\psi} = \psi \in \text{Aut}(Q, +)$. Следовательно, $(Q, \cdot)$ — абелева полугруппа. Далее, в абелевой группе $\tilde{L}_x = \tilde{R}_x$ для любого $x \in Q$. Поэтому из (6) следует, что $\varphi\bar{\psi}y = \psi\varphi^{-1}\psi\varphi y$ или $\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$, что и требовалось доказать.

Импlications $1 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 1$ проверяются аналогичным образом.

Следствие 1. Многообразие всех примитивных абелевых квазигрупп с условием $\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$ характеризуется тождеством (2) или (3).

Приведем другие условия на автоморфизмы, приводящие к некоторым подмножествам абелевых квазигрупп, связанным с хорошо известными (неуравновешенными) тождествами.

Теорема 2. Для абелевой квазигруппы $(Q, \cdot)$ следующие условия эквивалентны:

(1) квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет вид

$$xy = \varphi x + \psi y,$$

$$\text{где } \varphi^2 + \psi = \psi^2 + \varphi = \varphi\psi, \quad c = 0;$$

(2) в $(Q, \cdot)$ выполняется второе тождество Стейна

$$x \cdot yx = yx \cdot y.$$

Доказательство. Докажем, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть в абелевой квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество $x \cdot yx = yx \cdot y$. Тогда $(Q, \cdot)$ идемпотентна (см. [8]), следовательно, медиальна (см. [6]) и $c = 0$, $\varphi + \psi = \varepsilon$. Учитывая это, переходим в тождестве $x \cdot yx = yx \cdot y$ к операции $+$ и получаем, что

$$x \cdot yx = \varphi x + \psi(\varphi y + \psi x) = \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x,$$

$$yx \cdot y = \varphi(\varphi y + \psi x) + \psi y = \varphi^2 y + \varphi\psi x + \psi y,$$

или

$$\varphi x + \psi \varphi y + \psi^2 x = \varphi^2 y + \varphi \psi x + \psi y. \quad (7)$$

Пусть $x = 0$, тогда $\psi \varphi y = \varphi^2 y + \psi y$, $\psi \varphi = \varphi^2 + \psi$. Полагая в (7) $y = 0$, находим, что

$$\varphi x + \psi^2 x = \varphi \psi x, \quad \varphi \psi = \psi^2 + \varphi.$$

В силу медиальности $(Q, \cdot)$

$$\varphi^2 + \psi = \psi^2 + \varphi = \varphi \psi.$$

Обратная импликация легко проверяется.

Аналогично можно доказать, что для абелевых квазигрупп справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Для абелевой квазигруппы $(Q, \cdot)$ следующие условия эквивалентны:

(1) квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет вид

$$xy = \varphi x + \psi y,$$

где $\psi = \varphi + \varepsilon$, $(Q, \cdot)$ — группа экспонента два

$$(xy = \varphi x + c + \psi y, \quad \varphi \psi = J\psi\varphi, \quad \varphi^2 + \psi^2 = \varepsilon, \quad \varphi c + \psi c + c = 0);$$

(2) в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется первое (второе) тождество Шредера

$$x \cdot xy = xy \cdot y \quad (xy \cdot yx = x).$$

Список литературы

1. Белоусов В. Д., Уравновешенные тождества в квазигруппах. *Матем. сб.* (1966) **70**, 55–97.
2. Belyavskaya G., Tabarov A., Characterization of primitive linear, alinear, and abelian quasigroups. *Quasigroups and Related Systems* (1994) **1**, №1, 8–21.
3. Белявская Г. Б., Табаров А. Х., Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. *Дискретная математика* (1992) **2**, №2, 142–147.
4. Belyavskaya G. B., Abelian quasigroups are T-quasigroups. *Quasigroups and Related Systems* (1994) **1**, №1, 39–49.
5. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*. Наука, Москва, 1967.
6. Кепка Т., Nemes P., T-quasigroups. *Acta Univ. Carolinae Math. & Phys.* (1971) **12**, №1, 39–49, №2, 31–49.
7. Табаров А. Х., T-квазигруппы с дополнительными тождествами. Деп. ВИНТИ 09.01.91, №163-B91.
8. Белоусов В. Д., *Парастрофно-ортогональные квазигруппы*. Штиинца, Кишинев, 1983.

Статья поступила 12.02.2000.