Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Бувевич, Критерий полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 138–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:59:45

Критерий полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции

© 2000 г. В. А. Бувеч

Рассматривается задача о полноте в функциональной системе P , элементами которой являются ограниченно-детерминированные функции (о.-д. функции), а операциями — только операции суперпозиции. Известно, что в P не существует конечных полных систем. Однако Д. Н. Бабиным приведен пример конечного множества о.-д. функций, которое вместе с множеством $P(1)$ всех одноместных о.-д. функций образует полную систему в P . В данной работе приведен критерий полноты множеств о.-д. функций, содержащих $P(1)$, который позволяет приводить нетривиальные примеры полных систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00374.

1. Основные понятия и результаты

Пусть P — множество о.-д. функций, входные и выходные переменные которых принимают значения из множества E_2^∞ всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц. Будем считать, что на множестве P задана операция суперпозиции. Пусть $M \subseteq P$. Замыкание множества M относительно этой операции обозначим $[M]$.

Множество $M \subseteq P$ называется полным, если $[M] = P$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = y$ — о.-д. функция из P , задаваемая системой канонических уравнений (см. [1, 3])

$$\begin{aligned} q(1) &= q_0, \\ q(t+1) &= \phi(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t)), \\ y(t) &= \psi(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $q(t) \in Q$, $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_p\}$ — множество состояний о.-д. функции f , q_0 — ее начальное состояние. Обычным образом [1, 3], исходя из (1), для любых $t \geq 1$, $\tau \geq 1$ выпишем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} q(t+\tau+1) &= \phi^\tau(x_1(t), \dots, x_1(t+\tau), \dots, x_n(t), \dots, x_n(t+\tau), q(t)) \\ &= \phi((x_1(t+\tau), \dots, x_n(t+\tau), \phi^{\tau-1}(x_1(t), \dots, x_1(t+\tau-1), \dots, \\ &\quad x_n(1), \dots, x_n(t+\tau-1), q(t))); \end{aligned} \quad (2)$$

при этом ϕ^0 совпадает с ϕ .

Пусть $t \geq 1$, E_2^t — множество всех слов длины t , составленных из нулей и единиц, и $E_2^t(n)$ есть прямое произведение n множеств E_2^t , $n \geq 1$.

Пусть $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^t(n)$, где

$$a_1 = (a_1(1) \dots a_1(t)), \dots, a_n = (a_n(1) \dots a_n(t)).$$

Пусть $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, p\}$, $t \geq 1$ и

$$\phi^{t-1}(a_1(1), \dots, a_1(t), \dots, a_n(1), \dots, a_n(t), q_i) = q_j. \quad (3)$$

В дальнейшем вместо записи (3) будем использовать запись

$$\phi(a_1, \dots, a_n, q_i) = q_j$$

и считать, что состояние q_j t -достижимо из состояния q_i .

Пусть $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, $t \geq 1$. Через $Q_i(t)$ обозначим подмножество Q , состоящее из всех состояний, t -достижимых из состояния q_j , при этом $Q_i(0) = q_i$. Функции алгебры логики, реализуемые в состояниях $q_0, \dots, q_p$ о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ обозначим через

$$F_{q_0}(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{q_p}(x_1, \dots, x_n).$$

Множество всех о.-д. функций из P таких, что каждая из функций

$$F_{q_0}(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{q_p}(x_1, \dots, x_n)$$

существенно зависит не более чем от одной переменной, обозначим P_0 . Очевидно, что P_0 — замкнутый класс в P .

Пусть $k \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $f(x_1, x_2)$ — о.-д. функция, заданная системой (1) при $n = 2$. Будем считать, что о.-д. функция $f(x_1, x_2)$ обладает $B(k, l)$ -свойством, если для некоторого $\tilde{Q} \subseteq Q$

- существует $l' = l \pmod{k}$ такое, что $Q_0(l') \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$;
- $Q_i(k) \subseteq \tilde{Q}$ для любого $q_i \in \tilde{Q}$ и существует $q_j \in Q_i(k)$ такое, что $F_{q_j}(x_1, x_2)$ — нелинейная функция алгебры логики, $0 \leq i, j \leq p$.

Нетрудно видеть, что любая о.-д. функция $\tilde{f}(x_1, x_2)$, в каждом состоянии которой реализуется нелинейная функция алгебры логики, обладает $B(1, 0)$ -свойством. Вместе с тем, любая о.-д. функция из P_0 ни при каких k и l не обладает $B(k, l)$ -свойством.

Пусть $M \subseteq P$, $m \geq 1$. Через $M(m)$ обозначим множество всех о.-д. функций из M , зависящих от переменных $x_1, \dots, x_m$. Пусть $N \subseteq P(m)$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P$. Будем считать, что о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет множество N , если для любых

$$f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)$$

из N о.-д. функция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

также принадлежит N . Множество всех о.-д. функций, сохраняющих N , обозначим $U(N)$. Множество $M \subseteq P$ сохраняет N , если каждая о.-д. функция из M сохраняет множество N .

Рассмотрим о.-д. функции $g(x)$, $h_0(x)$, $h_1(x)$, $d_0^0(x)$, $d_1^0(x)$, $d_0^1(x)$, $d_1^1(x)$.

О.-д. функция $g(x)$ — тождественная о.-д. функция, то есть такая, что $g(a) = a$ для всякого $a \in E_2^\infty$.

О.-д. функции $h_0(x) = y_1$, $h_1(x) = y_2$ таковы, что $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = 0$, если t четно, и $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = x(t)$, если t нечетно.

О.-д. функции $d_0^0(x_1) = y_1$, $d_1^0(x_1) = y_2$, $d_0^1(x_2) = y_3$, $d_1^1(x_2) = y_4$, таковы, что

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 0, \quad y_3(1) = x_2(1), \quad y_4(1) = 0;$$

для любого $t \geq 2$

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = 0,$$

если t четно и $x_1(t-1) = 0$;

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = x_1(t),$$

если t четно и $x_1(t-1) = 1$;

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = 0,$$

если t нечетно;

$$y_3(t) = x_2(t), \quad y_4(t) = 0,$$

если t нечетно и $x_2(t-1) = 0$;

$$y_3(t) = 0, \quad y_4(t) = x_2(t),$$

если t нечетно и $x_2(t-1) = 1$;

$$y_3(t) = 0, \quad y_4(t) = 0,$$

если t четно.

На рис. 1а представлены диаграммы переходов о.-д. функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, о.-д. функций $d_0^0(x)$, $d_1^0(x)$ и о.-д. функций $d_1^0(x)$, $d_1^1(x)$ соответственно. Начальные состояния о.-д. функций $h_0(x)$, $d_0^0(x)$, $d_1^0(x)$ отмечены одной, а начальные состояния о.-д. функций $h_1(x)$, $d_0^1(x)$, $d_1^1(x)$ двумя звездочками.

Пусть $k \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, H , D_0 , D_1 — семейства всех подмножеств $P(1)$, а $B(k, l)$ — семейство всех подмножеств $P(2)$ такие, что

- для любого $N \in H$ о.-д. функции h_0 , h_1 принадлежат N , но о.-д. функция g не принадлежит N ;
- для любого $N \in D_0$ о.-д. функции d_0^0 , d_1^0 принадлежат N , но о.-д. функция h_0 не принадлежит N ;
- для любого $N \in D_1$ о.-д. функции d_0^1 , d_1^1 принадлежат N , но о.-д. функция h_1 не принадлежит N ;
- для любого $N \in B(k, l)$ множество $P_0(2)$ целиком содержится в N , но в N не содержится ни одной о.-д. функции, обладающей $B(k, l)$ -свойством;
- для любых $N \in H \cup D_0 \cup D_1$, $N' \in B(k, l)$, $f(x) \in N$, $f'(x_1, x_2) \in N'$, $\tilde{g}(x) \in P(1)$ о.-д. функции $\tilde{g}(f(x))$, $\tilde{g}(f'(x_1, x_2))$ принадлежат N , N' соответственно.

Рис. 1.

Пусть $M \subseteq P$. Множество M называется A -полным, если для любого $\tau \geq 0$ и всякой о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P в $[M]$ содержится о.-д. функция, совпадающая с $f(x_1, \dots, x_n)$ на всех наборах из $E_2^\tau(n)$ (см. [8, 9]). Целью настоящей работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $M \subseteq P$, $P(1) \subseteq M$. Для того, чтобы M было полным, необходимо и достаточно, чтобы M являлось A -полным, не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 , D_1 , и для некоторого $k \geq 1$ не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$.

Теорема 2. Пусть $M \subseteq P$, $P(1) \subseteq M$. Для того, чтобы P_0 содержалось в замыкании M , необходимо и достаточно, чтобы M не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 и D_1 .

Пусть $M \subset P$. Множество M называется предполным классом в P , если M не является полным, но $\{f\} \cup M = P$ для любой о.-д. функции $f \notin M$.

В [6] построен пример конечной полной системы M_B такой, что $[M_B \cup P(1)] = P$. Исходя из этого, обычным образом (см. [2]) можно показать, что любой замкнутый класс в P , содержащий $P(1)$, расширяется до предполного. Из теоремы 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. (а) Существует континуум предполных классов в P , содержащих множество P_0 , в частности, все одноместные о.-д. функции, и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 , D_1 .

(б) Существует континуум предполных классов в P , содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств D_0 , D_1 , и для любого $k > 1$ не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$.

(с) Существует континуум предполных классов в P , содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих

объединению семейств H , D_1 , и для любого $k > 3$ не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$.

- (d) Существует континуум предполных классов в P , содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 , и для любого $k > 3$ не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$.

Следствие 1 ([7]). Существует континуум предполных классов, содержащих множество P_0 , в частности, все одноместные о.-д. функции.

2. Доказательство теоремы 2

Необходимость условий теоремы 2 очевидна. Их достаточность будет следовать из справедливости нескольких лемм.

Пусть $h(x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что $y(t) = x_1(t)$ для нечетных $t \geq 1$ и $y(t) = x_2(t)$ для четных t .

Лемма 1. Пусть $M \subseteq P$, $P(1) \subset M$. Пусть $M \setminus P(1)$ не сохраняет ни одного из множеств семейства H . Тогда $h(x_1, x_2) \in [M]$.

Доказательство. Из условия леммы и из определения семейства H следует, что в $[M]$ содержится о.-д. функция $f(x_1, x_2)$ такая, что $f(h_0(x), h_1(x)) = g(x)$. Пусть a_1, a_2 — произвольные элементы из E_2^∞ . Пусть a из E_2^∞ таково, что $a(t) = a_1(t)$ для четных t и $a(t) = a_2(t)$ для нечетных $t \geq 1$. Таким образом,

$$h_0(a_1) = h_0(a), \quad h_1(a_2) = h_1(a).$$

Очевидно, верно и обратное: для любого $a' \in E_2^\infty$ существуют a'_1 и a'_2 из E_2^∞ такие, что

$$h_0(a') = h_0(a'_1), \quad h_1(a') = h_1(a'_2).$$

Отсюда легко следует, что $h(x_1, x_2) = f(h_0(x_2), h_1(x_1))$. Лемма доказана.

Пусть $d(u, x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что $y(1) = x_1(1)$ и $y(t) = x_1(t)$, если $u(t-1) = 0$ и $y(t) = x_2(t)$, если $u(t-1) = 1$, для любого $t \geq 2$ (см. рис. 1b)).

Лемма 2. Пусть $M \subseteq P$, $P(1) \subset M$. Пусть $M \setminus P(1)$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 , D_1 . Тогда $d(u, x_1, x_2) \in [M]$.

Доказательство. Рассмотрим о.-д. функции

$$\begin{aligned} \bar{d}_0^0(u, x_1) &= d_0^0(h(u, x_1)) = y_1, & \bar{d}_1^0(u, x_2) &= d_1^0(h(u, x_2)) = y_2, \\ \bar{d}_0^1(u, x_1) &= d_0^1(h(x_1, u)) = y_3, & \bar{d}_1^1(u, x_2) &= d_1^1(h(x_2, u)) = y_4. \end{aligned}$$

Из определения о.-д. функций d_0^0 , d_1^0 , d_0^1 , d_1^1 и h следует, что

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 0, \quad y_3(1) = x_1(1), \quad y_4(1) = 0;$$

для любого четного t

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = 0,$$

если $u(t-1) = 0$;

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = x_2(t),$$

если $u(t-1) = 1$;

$$y_3(t) = 0, \quad y_4(t) = 0;$$

для любого нечетного $t > 1$

$$y_3(t) = x_1(t), \quad y_4(t) = 0,$$

если $u(t-1) = 0$;

$$y_3(t) = 0, \quad y_4(t) = x_2(t),$$

если $u(t-1) = 1$;

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = 0.$$

Пусть a_1, a_2, a_3 — произвольные элементы из E_2^∞ . Пусть a, a' из E_2^∞ таковы, что

$$a(1) = a_1(1), \quad a'(1) = a_2(1);$$

для любого четного t

$$a(t) = a_2(t),$$

если $a_1(t-1) = 0$;

$$a(t) = a_3(t),$$

если $a_1(t-1) = 1$;

$$a'(t) = a_1(t);$$

для любого нечетного $t > 1$

$$a(t) = a_1(t), \quad a'(t) = a_2(t),$$

если $a_1(t-1) = 0$;

$$a'(t) = a_3(t),$$

если $a_1(t-1) = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} d_0^0(a) &= \tilde{d}_0^0(a_1, a_2), & d_1^0(a) &= \tilde{d}_1^0(a_1, a_3), \\ d_0^1(a') &= \tilde{d}_0^1(a_1, a_2), & d_1^1(a') &= \tilde{d}_1^1(a_1, a_3). \end{aligned}$$

Вместе с тем, для любого $a_4 \in E_2^\infty$

$$\tilde{d}_0^0(a_4, a_4) = d_0^0(a_4), \quad \tilde{d}_1^0(a_4, a_4) = d_1^0(a_4), \quad \tilde{d}_0^1(a_4, a_4) = d_0^1(a_4), \quad \tilde{d}_1^1(a_4, a_4) = d_1^1(a_4).$$

Из условий леммы и из определения семейств D_0 и D_1 следует, что в $[M]$ существуют о.-д. функции $f_0(x_1, x_2)$, $f_1(x_1, x_2)$ такие, что

$$f_0(d_0^0(x), d_1^0(x)) = h_0(x), \quad f_1(d_0^1(x), d_1^1(x)) = h_1(x).$$

Пусть

$$\begin{aligned} d_0(u, x_1, x_2) &= f_0(\tilde{d}_0^0(u, x_1), \tilde{d}_1^0(u, x_2)) = y_1, \\ d_1(u, x_1, x_2) &= f_1(\tilde{d}_0^1(u, x_1), \tilde{d}_1^1(u, x_2)) = y_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$y(1) = 0, \quad y_2(1) = x_1(1);$$

для четных t

$$y_1(t) = x_1(t),$$

если $u(t-1) = 0$;

$$y_1(t) = x_2(t),$$

если $u(t-1) = 1$;

$$y_2(1) = 0;$$

для нечетных $t > 1$

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = x_2(t),$$

если $u(t-1) = 0$;

$$y_2(t) = x_1(t),$$

если $u(t-1) = 1$.

Таким образом, $d(u, x_1, x_2) = h(d_1(u, x_1, x_2), d_0(u, x_1, x_2))$. Лемма доказана.

Лемма 3. Замыкание множества $\{d(u, x_1, x_2)\} \cup P(1)$ совпадает с множеством P_0 .

Справедливость леммы 3 в свою очередь вытекает из справедливости нескольких лемм.

Пусть E_2^* — множество всех слов конечной длины, составленных из нулей и единиц. Пусть $n \geq 2$ и λ — разбиение множества E_2^* на регулярные подмножества $\rho_1, \dots, \rho_n$. Рассмотрим о.-д. функцию $g_\lambda(u, x_1, \dots, x_n)$ из P_0 . Будем считать, что о.-д. функция g_λ задана системой (1) и обладает следующими свойствами: для любых $t \geq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, элементов $a, a_1, \dots, a_n$ из E_2^t , если $a \in \rho_i$, то

$$\psi(u(t+1), x_1(t+1), \dots, x_n(t+1), \phi(a, a_1, \dots, a_n, q_0)) = x_i(t+1),$$

и

$$\psi(u(1), x_1(1), \dots, x_n(1), q_0) = x_1(1).$$

Лемма 4. Для любого разбиения λ о.-д. функция $g_\lambda(u, x_1, \dots, x_n)$ принадлежит $\{d(u, x_1, x_2)\} \cup P(1)$.

Доказательство. Доказательство леммы 4 проведем по индукции. Пусть $n = 2$, λ — произвольное разбиение множества E_2^* на регулярные подмножества ρ_1 и ρ_2 . Рассмотрим о.-д. функцию $f(x)$ из $P(1)$ такую, что имеет место следующее. Пусть $t \geq 1$, $a \in E_2^t$, $f(a) = a'$. Тогда, если $a \in \rho_1$, то $a'(t) = 0$, если $a \in \rho_2$, то $a'(t) = 1$. Очевидно, что

$$g_\lambda(u, x_1, x_2) = d(f(u), x_1, x_2).$$

Пусть $n > 2$. Рассмотрим разбиения λ , λ_1 и λ_2 множества E_2^* . Пусть

$$\lambda: E_2^* = \rho_1 \cup \dots \cup \rho_n,$$

$$\lambda_1: E_2^* = \rho_1 \cup \dots \cup \rho_{n-2} \cup \rho'_{n-1},$$

где $\rho'_{n-1} = \rho_{n-1} \cup \rho_n$;

$$\lambda_2: E_2^* = \rho'_1 \cup \rho_n,$$

где $\rho'_1 = \rho_1 \cup \dots \cup \rho_{n-1}$. Нетрудно видеть, что

$$g_{\lambda}(u, x_1, \dots, x_n) = g_{\lambda_2}(u, g_{\lambda_1}(u, x_1, \dots, x_{n-1}), x_n).$$

Таким образом, лемма 4 доказана.

Пусть $m \geq 1$, $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — система разбиений множества E_2^* на регулярные подмножества, то есть

$$\lambda_1: E_2^* = \rho_1^1 \cup \dots \cup \rho_{s_1}^1, \dots, \lambda_m: E_2^* = \rho_1^m \cup \dots \cup \rho_{s_m}^m,$$

при этом $s_1 \geq 2, \dots, s_m \geq 2$. Пусть $m \geq 1$ и

$$E_2^*(m) = \bigcup_{t=1}^{\infty} E_2^t(m).$$

Пусть $n \geq 2$, κ — любое из отображений множества $E_2^*(m)$ в $\{1, \dots, n\}$ такое, что для любых $(a_1, \dots, a_m)$, $(a'_1, \dots, a'_m)$ из $E_2^*(m)$

$$\kappa((a_1, \dots, a_m)) = \kappa((a'_1, \dots, a'_m)),$$

если a_i и a'_i принадлежат одному и тому же классу разбиения λ_i , $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим о.-д. функцию $g_{\tilde{\lambda}}^{\kappa}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$ из P_0 . Будем считать, что о.-д. функция $g_{\tilde{\lambda}}^{\kappa}$ задана системой канонических уравнений (1) и удовлетворяет следующим свойствам: для любых $t \geq 1$, элементов $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n$ из E_2^t

$$\begin{aligned} \psi(u_1(t+1), \dots, u_m(t+1), x_1(t+1), \dots, x_n(t+1), \phi(a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n, q_0)) \\ = x_{\kappa((a_1, \dots, a_m))}(t+1) \end{aligned}$$

и

$$\psi(u_1(1), \dots, u_m(1), x_1(1), \dots, x_n(1), q_0) = x_1(1).$$

Лемма 5. Для любой системы разбиений $\tilde{\lambda}$ и любого отображения κ о.-д. функция

$$g_{\tilde{\lambda}}^{\kappa}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$$

принадлежит $\{d(u, x_1, x_2)\} \cup P(1)$.

Доказательство. Пусть заданы $m \geq 1$, $n \geq 1$, система $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и отображение κ множества $E_2^*(m)$ в $\{1, \dots, n\}$. О.-д. функция $g_{\tilde{\lambda}}^{\kappa}$ строится индуктивно. Если $m = 1$, то в качестве $g_{\tilde{\lambda}}^{\kappa}(u_1, x_1, \dots, x_n)$ можно рассмотреть о.-д. функцию $g_{\lambda_1}(u_1, x_1, \dots, x_n)$ (см. лемму 4); при этом $s_1 = n$, для любого $a \in E_2^*$ $\kappa((a)) = i$, если $a \in \rho_i$, $1 \leq i \leq n$.

Пусть $m > 1$. Рассмотрим о.-д. функции

$$g_{\tilde{\lambda}'}^{\kappa_1}(u_2, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n), \dots, g_{\tilde{\lambda}'}^{\kappa_n}(u_2, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n),$$

где $\tilde{\lambda} = (\lambda_2, \dots, \lambda_m)$ и для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ отображение κ_j определяется следующим образом. Пусть $t \geq 1$, $a_2, \dots, a_m$ — произвольные элементы из E_2^t . Тогда

$$\kappa_j((a_2, \dots, a_m)) = \kappa((a'_1, a'_2, \dots, a'_m)),$$

где $a'_1 \in \rho_j^1$, а пары (a_i, a'_i) принадлежат одному и тому же множеству разбиения λ_i , $i = 2, \dots, m$. В силу предположения индукции о. -д. функции $g_{\lambda'_1}^{x_1}, \dots, g_{\lambda'_n}^{x_n}$ принадлежат $[\{d(u, x_1, x_2)\} \cup P(1)]$. Нетрудно видеть, что

$$g_{\lambda}^x(u_2, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) \\ = g_{\lambda_1}^x(u_1, g_{\lambda'_1}^{x_1}(u_2, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n), \dots, g_{\lambda'_n}^{x_n}(u_2, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)).$$

Лемма 5 доказана.

Рассмотрим множество о.-д. функций $\tilde{P}_0$, являющееся подмножеством P_0 . Пусть $n \geq 1$, о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задается системой (1). О.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству $\tilde{P}_0$ тогда и только тогда, когда ее множество состояний совпадает с $\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$, то есть $p = n - 1$, и для любого $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$

$$\psi(x_1(t), \dots, x_n(t), q_i) = x_{i+1}(t).$$

Для каждой о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из $\tilde{P}_0$ определим разбиение λ_f множества $E_2^*(n)$ на регулярные подмножества $\rho_f^0, \rho_f^1, \dots, \rho_f^{n-1}$ следующим образом: для любого $t \geq 1$ набор $a_1, \dots, a_n$ из $E_2^t(n)$ принадлежит ρ_f^i , $0 \leq i \leq n - 1$, тогда и только тогда, когда

$$\phi(a_1, \dots, a_n, q_0) = q_i.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{P}_0$, $k \geq 1$. Будем считать, что о.-д. функция

$$g(x_1, \dots, x_n)$$

обладает k -свойством относительно о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если имеет место следующее.

Пусть $i \geq 1$, $t = (i + 1)k$, $(a_1, \dots, a_n)$, $(a'_1, \dots, a'_n)$ — произвольные элементы из $E_2^t(n)$, причем

$$g(a_1, \dots, a_n) = a, \quad g(a'_1, \dots, a'_n) = a'.$$

Тогда, если наборы

$$((a_1(1) \dots a_1(ki)), \dots, ((a_n(1) \dots a_n(ki))), \\ ((a'_1(1) \dots a'_1(ki)), \dots, ((a'_n(1) \dots a'_n(ki))))$$

принадлежат разным классам разбиения λ_f , то $a \neq a'$.

Лемма 6 ([6]). Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{P}_0$. Пусть $k \geq 1$ и о.-д. функция $g(x_1, \dots, x_n)$ обладает k -свойством относительно о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) \in [\{d(u, x_1, x_2), g(x_1, \dots, x_n)\} \cup P(1)].$$

Доказательство. Будем считать, что о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана системой уравнений (1). Рассмотрим разбиения λ_1 и λ_2 множества E_2^* . Разбиение λ_1 определяется следующим образом. Пусть $t \in \{1, \dots, 2k - 1\}$, $a \in E_2^t$. Тогда множество $\{a\}$ образует подмножество ρ_a^1 разбиения λ_1 . Пусть $l \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, $a \in E_2^{k+l}$. Пара l и a определяет подмножество $\rho_a^1(l)$ разбиения λ_1 : подмножеству $\rho_a^1(l)$ могут принадлежать лишь элементы из

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_2^{(i+1)k+l},$$

причем для любого t , представимого в виде $t = (i + 1)k + l$, где $i \geq 1$, элемент a' из E_2^t принадлежит $\rho_a^1(l)$ тогда и только тогда, когда

$$(a'(ki + 1)a'(ki + 2) \dots a'(ki + k) \dots a'(ki + k + l))$$

совпадает с a . Таким образом, разбиение λ_1 определено полностью.

Разбиение λ_2 содержит подмножества

$$\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_{n-1}^2, \rho_n^2$$

и определяется следующим образом. Пусть $t \in \{1, \dots, 2k - 1\}$, $a \in E_2^t$. Тогда $a \in \rho_0^2$. Пусть

$$i \geq 1, \quad l \in \{0, 1, \dots, k - 1\}, \quad t = (i + 1)k + l.$$

Элемент a из E_2^t принадлежит множеству ρ_j^2 , $0 \leq j \leq n - 1$, тогда и только тогда, когда существуют $a_1, \dots, a_n$ из E_2^t такие, что $g(a_1, \dots, a_n) = a$ и набор

$$((a_1(1) \dots a_1(ki)), \dots, (a_n(1) \dots a_n(ki)))$$

элементов из E_2^{ki} принадлежит множеству ρ_j^j . Из определения k -свойства о.-д. функции $g(x_1, \dots, x_n)$ относительно о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ следует, что $\rho_j^2 \cap \rho_{j'}^2 = \emptyset$ для любых $j, j' \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $j \neq j'$. Подмножество ρ_n^2 разбиения λ_2 определяется равенством

$$\rho_n^2 = E_2^* \setminus \{\rho_0^2 \cup \dots \cup \rho_{n-1}^2\}.$$

Определим о.-д. функцию $g_{\tilde{\lambda}}^x(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, x_1, \dots, x_n)$ из P_0 (см. лемму 5) такую, что $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2)$ — система, содержащая $n + 1$ разбиение, а отображение κ множества $E_2^*(n + 1)$ в $\{1, \dots, n\}$ задается следующим образом.

Пусть $t \in \{1, \dots, 2k - 1\}$, $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in E_2^*(n + 1)$. Очевидно, что

$$a_1 \in \rho_{a_1}^1, \dots, a_n \in \rho_{a_n}^1, a_{n+1} \in \rho_0^2.$$

Пусть

$$\phi(a_1, \dots, a_n, q_0) = q_j, \quad 0 \leq j \leq n - 1.$$

Тогда

$$\kappa((a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) = j + 1.$$

Пусть $i \geq 1, l \in \{0, 1, \dots, k - 1\}, t = (i + 1)k + l$, $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ — произвольный набор из $E_2^t(n + 1)$. Пусть $a_{n+1} \in \rho_n^2$. Тогда

$$\kappa((a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) = 1.$$

Пусть $a_{n+1} \in \rho_j^2$ для некоторого $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Пусть

$$a'_1 = (a_1(ik + 1) \dots a_1((i + 1)k + l)), \dots, a'_n = (a_n(ik + 1) \dots a_n((i + 1)k + l)).$$

Тогда если $\phi(a'_1, \dots, a'_n, q_j) = q_s$, где $s \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, то

$$\kappa((a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) = s + 1.$$

Легко видеть, что из определения разбиений λ_1, λ_2 и отображения κ следует, что для любых наборов $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, $(a'_1, \dots, a'_n, a'_{n+1})$ из $E_2^*(n + 1)$

$$\kappa((a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) = \kappa((a'_1, \dots, a'_n, a'_{n+1})),$$

если a_i и a'_i , $i = 1, \dots, n$, попарно принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ_1 , а a_{n+1} и a'_{n+1} принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ_2 . Поэтому в силу леммы 5 о.-д. функция

$$g_{\lambda}^{\times}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, x_1, \dots, x_n)$$

принадлежит $\{[d(u, x_1, x_2)] \cup P(1)\}$.

Пусть $i \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $t = (i+1)k + l$, набор $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ из E_2^t таков, что

$$g(a_1, \dots, a_n) = a_{n+1},$$

причем $a_{n+1} \in \rho_j^2$, $0 \leq j \leq n-1$. Тогда из определения разбиений λ_2 , λ_f и отображения κ следует, что

$$\phi((a_1(1) \dots a_1(ki)), \dots, (a_n(1) \dots a_n(ki)), q_0) = q_j,$$

$$\phi(a_1, \dots, a_n, q_0) = q_{\kappa((a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) - 1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_{\lambda}^{\times}(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{P}_0$, то для некоторого $k \geq 1$ в $\{[d(u, x_1, x_2)] \cup P(1)\}$ существует о.-д. функция $g(x_1, \dots, x_n)$ обладающая k -свойством относительно о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Будем считать, что о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана системой канонических уравнений (1). На множестве $E_2^*(n)$ введем отношение μ_f -эквивалентности, полагая, что наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(a'_1, \dots, a'_n)$ из $E_2^*(n)$ μ_f -эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ имеет место равенство

$$\phi(a_1, \dots, a_n, q_j) = \phi(a'_1, \dots, a'_n, q_j).$$

Пусть существует p классов μ_f -эквивалентности $E_{2(1)}^*(n), \dots, E_{2(p)}^*(n)$. Нетрудно видеть, что $p \leq n^n$. Выберем число k так, чтобы выполнялось неравенство $p \leq 2^k$. Каждому классу μ_f -эквивалентности $E_{2(j)}^*(n)$, $1 \leq j \leq p$, поставим в соответствие двоичный набор

$$(\alpha_1^j, \dots, \alpha_k^j)$$

— код класса $E_{2(j)}^*(n)$, при этом разным классам μ_f -эквивалентности соответствуют разные коды.

Рассмотрим разбиение λ множества E_2^* на регулярные подмножества

$$\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{2^k},$$

при этом

$$\rho_0 = \bigcup_{t=1}^{k-1} E_2^t.$$

Пусть $i \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $t = ik + l$. Элемент a из E_2^t принадлежит множеству ρ_s , $1 \leq s \leq 2^k$, тогда и только тогда, когда $(a((i-1)k+1) \dots a(ik))$ — двоичное разложение числа $s-1$.

Определим о.-д. функцию $g_{\lambda}^x(u_1, \dots, u_n, x_1, \dots, x_p)$ из P_0 (см. лемму 5) такую, что $\bar{\lambda} = (\lambda, \dots, \lambda)$ — система из n разбиений, а отображение κ множества $E_2^*(n)$ в $\{1, \dots, p\}$ задается следующим образом. Пусть $t \in \{1, \dots, k-1\}$, $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^t(n)$. Тогда

$$\kappa((a_1, \dots, a_n)) = 1.$$

Пусть $i \geq 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$, $t = ik + l$, $(a_1, \dots, a_n)$ — произвольный элемент из $E_2^t(n)$. Тогда, если набор

$$((a_1((i-1)k+1) \dots a_1(ik)), \dots, (a_n((i-1)k+1) \dots a_n(ik)))$$

принадлежит классу μ_f -эквивалентности $E_{2(j)}^*(n)$, $1 \leq j \leq p$, то

$$\kappa((a_1, \dots, a_n)) = j.$$

Очевидно, что для любых $(a_1, \dots, a_n)$, $(a'_1, \dots, a'_n)$ из $E_2^*(n)$

$$\kappa((a_1, \dots, a_n)) = \kappa((a'_1, \dots, a'_n)),$$

если a_i и a'_i , $i = 1, \dots, n$, попарно принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ . Поэтому в силу леммы 5

$$g_{\lambda}^x(u_1, \dots, u_n, x_1, \dots, x_p) \in [\{d(u, x_1, x_2)\} \cup P(1)].$$

Пусть $h_1(x) = y_1, \dots, h_p(x) = y_p$ — о.-д. функции из $P(1)$ такие, что $y_j(t) = \alpha_t^j$ для любых $j \in \{1, \dots, p\}$, $t = ik + l$, где $i \geq 0$, $l \in \{1, \dots, k\}$.

Покажем, что о.-д. функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = g_{\lambda}^x(x_1, \dots, x_n, h_1(x_1), \dots, h_p(x_1))$$

обладает k -свойством относительно о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $i \geq 1$, $t = (i+1)k$, $(a_1, \dots, a_n)$, $(a'_1, \dots, a'_n)$ — произвольные элементы из $E_2^t(n)$. Пусть

$$g(a_1, \dots, a_n) = a, \quad g(a'_1, \dots, a'_n) = a'.$$

Пусть

$$\bar{a}_1 = (a_1(1) \dots a_1(ki)), \dots, \bar{a}_n = (a_n(1) \dots a_n(ki)),$$

$$\bar{a}'_1 = (a'_1(1) \dots a'_1(ki)), \dots, \bar{a}'_n = (a'_n(1) \dots a'_n(ki)).$$

Пусть наборы $g(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$, $g(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_n)$ принадлежат разным классам разбиения λ_f , то есть

$$\phi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, q_0) \neq \phi(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_n, q_0).$$

Нетрудно видеть, что тогда должно существовать $j \in \{1, \dots, i-1\}$ такое, что наборы

$$((a_1(kj+1) \dots a_1(kj+k)), \dots, (a_n(kj+1) \dots a_n(kj+k))),$$

$$((a'_1(kj+1) \dots a'_1(kj+k)), \dots, (a'_n(kj+1) \dots a'_n(kj+k)))$$

принадлежат разным классам μ_f -эквивалентности. Пусть эти классы $E_{2(S_1)}^*(n)$ и $E_{2(S_2)}^*(n)$ соответственно. Но тогда из определения о.-д. функций

$$g_{\lambda}^x(u_1, \dots, u_n, x_1, \dots, x_p), \quad h_1(x_1), \dots, h_p(x_1), \quad g(x_1, \dots, x_n)$$

следует, что $(a((j+1)k+1) \dots a((j+2)k))$ и $(a'((j+1)k+1) \dots a'((j+2)k))$ — коды классов $E_{2(S_1)}^*(n)$ и $E_{2(S_2)}^*(n)$ соответственно. Так как эти классы различны, различны и их коды. Следовательно, $a \neq a'$. Лемма 7 доказана.

Из справедливости лемм 4–7 следует справедливость леммы 3. Заметим только, что множество P_0 совпадает с замыканием множества $\bar{P}_0 \cup P(1)$.

Из справедливости лемм 1–3 следует справедливость теоремы 2.

Следствие 2 ([6]). Пусть $f_{\vee}(x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что для любого $t \geq 1$

$$y = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t).$$

Тогда

$$[\{f_1(x_1, x_2)\} \cup P(1)] = P.$$

Доказательство. Действительно, используя о.-д. функцию $f_{\vee}(x_1, x_2)$ легко получить о.-д. функцию $f_{\wedge}(x_1, x_2)$ такую, что для любого $t \geq 1$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \pmod{2}.$$

Нетрудно видеть, что о.-д. функция $f_{\wedge}(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1 . Поэтому

$$P_0 \subset [\{f_{\vee}(x_1, x_2)\} \cup P(1)] = P.$$

Вместе с тем, исходя из P_0 и о.-д. функции $f_1(x_1, x_2)$, легко получить произвольную о.-д. функцию.

3. Доказательство теорем 1 и 3 и пример полной системы

Прежде чем доказывать теорему 1, докажем две леммы.

Пусть $k \geq 1, l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, о.-д. функция $f(x_1, x_2)$ задана системой (1) при $n = 2$. Будем считать, что о.-д. функция $f(x_1, x_2)$ принадлежит множеству $S_{(k,l)}$, если существует $l' = l \pmod{k}$ такое, что для любого $t \geq l'$, представимого в виде $t = ik + l$, где $i \geq 0$, имеет место следующее: для любого набора (a_1, a_2) из $E_2^l(2)$, если

$$\phi(a_1, a_2, q_0) = q_j, \quad 0 \leq j \leq p,$$

то $F_{q_j}(x_1, x_2)$ — нелинейная функция алгебры логики.

Лемма 8. Пусть $k \geq 1, l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Пусть $f(x_1, x_2)$ — произвольная о.-д. функция, обладающая $B(k, l)$ -свойством. Тогда в $[\{f(x_1, x_2)\} \cup P_0]$ существует о.-д. функция $\tilde{f}(x_1, x_2)$, принадлежащая $S(k, l)$.

Доказательство. Рассмотрим о.-д. функцию $f(x_1, x_2)$. Состояния из множества $\bar{Q}$ обозначим через $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_s, 1 \leq s \leq p+1$ (см. определение $B(k, l)$ -свойства).

Пусть (a_1^0, a_2^0) — набор из $E_2^l(2)$ такой, что $\phi(a_1^0, a_2^0, q_0) \in \bar{Q}$. Пусть

$$(a_1^1, a_2^1), \dots, (a_1^s, a_2^s)$$

— наборы из $E_2^k(2)$ такие, что

$$\phi(a_1^1, a_2^1, \bar{q}_1) = \bar{q}_{i_1}, \dots, \phi(a_1^s, a_2^s, \bar{q}_s) = \bar{q}_{i_s}.$$

и каждая из функций

$$F_{\bar{q}_{i,1}}(x_1, x_2), \dots, F_{\bar{q}_{i,s}}(x_1, x_2)$$

— нелинейная функция алгебры логики. Пусть $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ и (α_1^m, α_2^m) — двоичное разложение числа m . Рассмотрим о.-д. функции $g_1^m(x_1, x_2)$, $g_2^m(x_1, x_2)$, каждую из которых зададим индуктивно. Пусть a_1, a_2 — произвольные элементы из E_2^∞ и $g_1^m(a_1, a_2) = \bar{a}_1$, $g_2^m(a_1, a_2) = \bar{a}_2$. Тогда имеет место следующее.

Если $l' \neq 0$, то $\bar{a}_1(t) = a_1^0(t)$, $\bar{a}_2(t) = a_2^0(t)$ для любого $t \in \{1, \dots, l'\}$.

Пусть $t \geq l'$, $t = ik + l$ для некоторого $i \geq 0$ и при $l' \neq 0$ уже определены значения

$$\bar{a}_1(1), \dots, \bar{a}_1(t), \quad \bar{a}_2(1), \dots, \bar{a}_2(t).$$

Пусть

$$a'_1 = (\bar{a}_1(1), \dots, \bar{a}_1(t)), \quad a'_2 = (\bar{a}_2(1), \dots, \bar{a}_2(t)).$$

В силу $B(k, l)$ -свойства о.-д. функции $f(x_1, x_2)$, определения набора a_1^0, a_2^0 и п. 1

$$\phi(a'_1, a'_2, q_0) \in \bar{Q}.$$

Пусть $\phi(a'_1, a'_2, q_0) = \bar{q}_j$, $1 \leq j \leq s$. Тогда если $a_1(t+1) = \alpha_1^m$, то $\bar{a}_1(t+1) = a_1^j(1)$, если $a_1(t+1) \neq \alpha_1^m$, то $\bar{a}_1(t+1) = \bar{a}_1^j(1)$; если $a_2(t+1) = \alpha_2^m$, то $\bar{a}_2(t+1) = a_2^j(1)$, если $a_2(t+1) \neq \alpha_2^m$, то $\bar{a}_2(t+1) = \bar{a}_2^j(1)$; если $k \geq 2$, то

$$\bar{a}_1(t+2) = a_1^j(2), \dots, \bar{a}_1(t+k) = a_1^j(k),$$

$$\bar{a}_2(t+2) = a_2^j(2), \dots, \bar{a}_2(t+k) = a_2^j(k).$$

Заметим, что из построения о.-д. функций $g_1^m(x_1, x_2)$, $g_2^m(x_1, x_2)$ следует, что эти о.-д. функции принадлежат множеству P_0 . Рассмотрим о.-д. функцию

$$f_m(x_1, x_2) = f(g_1^m(x_1, x_2), g_2^m(x_1, x_2)).$$

Пусть ϕ' — функция переходов о.-д. функции $f_m(x_1, x_2)$ и q'_0 — ее начальное состояние. Нетрудно видеть, что имеет место следующее: для любого $t \geq l'$, представимого в виде $t = ik + l$, где $i \geq 1$, и для любого набора (a_1, a_2) из $E_2^l(2)$, если

$$a_1((i-1)k + l - 1) = \alpha_1^m,$$

$$a_2((i-1)k + l - 1) = \alpha_2^m,$$

$$\phi(a_1, a_2, q_0) = q',$$

то $F_{q'}(x_1, x_2)$ — нелинейная функция алгебры логики. Отметим при этом, что если $F(x_1, x_2)$ — произвольная нелинейная функция, то

$$F(x_1, \bar{x}_2), \quad F(\bar{x}_1, x_2), \quad F(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

— также нелинейные функции алгебры логики.

Пусть $\tilde{g}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ — о.-д. функция из P_0 со следующими свойствами. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — произвольные элементы из E_2^∞ , причем

$$\tilde{g}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = a.$$

Пусть $t = ik + k + 1$, где $i \geq 0$. Тогда, если $(a_1(t - k), a_2(t - k))$ есть двоичное разложение числа $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, то $a(t) = a_{3+m}(t)$. Легко убедиться в том, что о.-д. функция

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \tilde{g}(x_1, x_2, f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$$

принадлежит множеству $S_{(k,l)}$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $k \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$. Пусть $\tilde{f}(x_1, x_2)$ — произвольная о.-д. функция, принадлежащая множеству $S_{(k,l)}$. Тогда в $\{\{\tilde{f}(x_1, x_2) \cup P_0\}\}$ существует о.-д. функция $g(x_1, x_2)$ такая, что для некоторого $l' = l \pmod{k}$ и для любого $t > l'$, представимого в виде $t = ik + l + 1$, где $i \geq 0$,

$$y(t) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1.$$

Доказательство. Будем считать, что о.-д. функция $\tilde{f}(x_1, x_2)$ задана с помощью системы (1). Через

$$\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s, \quad 0 \leq s \leq p,$$

обозначим все состояния о.-д. функции $\tilde{f}(x_1, x_2)$, в которых реализуются нелинейные функции алгебры логики. В силу леммы о нелинейной функции из [1] для любого $i \in \{1, \dots, s\}$ существуют функции $F_1^i(x)$, $F_2^i(x)$, $F_3^i(x)$ из $\{x, \bar{x}\}$ такие, что

$$F_3^i(F_{\tilde{q}_i}(F_1^i(x_1), F_2^i(x_2))) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Рассмотрим о.-д. функции $g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$. Отображения, осуществляемые этими о.-д. функциями, определим индуктивно.

Пусть $t = 1$, $(a_1, a_2) \in E_2^1(t)$, $g_1(x_1, x_2) = \bar{a}_1$, $g_2(x_1, x_2) = \bar{a}_2$. Тогда, если $q_0 = \tilde{q}_i$, $1 \leq i \leq s$, то

$$\bar{a}_1(1) = F_1^i(a_1(1)), \quad \bar{a}_2(1) = F_2^i(a_2(1)),$$

если $q_0 \notin \{\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s\}$, то

$$\bar{a}_1 = (0), \quad \bar{a}_2 = (0).$$

Пусть $t > 1$, $(a_1, a_2) \in E_2^t(2)$, $g_1(x_1, x_2) = \bar{a}_1$, $g_2(x_1, x_2) = \bar{a}_2$ и уже определены значения

$$\bar{a}_1(1), \dots, \bar{a}_1(t - 1), \quad \bar{a}_2(1), \dots, \bar{a}_2(t - 1).$$

Пусть

$$a'_1 = (a_1(1) \dots a_1(t - 1)), \quad a'_2 = (a_2(1) \dots a_2(t - 1)).$$

Тогда, если

$$\phi(a'_1, a'_2, q_0) = \tilde{q}_i, \quad 1 \leq i \leq s,$$

то

$$\bar{a}_1(t) = F_1^i(a_1(t)),$$

$$\bar{a}_2(t) = F_2^i(a_2(t)),$$

если $\phi(a'_1, a'_2, q_0) \notin \{\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s\}$, то

$$\bar{a}_1(t) = 0, \quad \bar{a}_2(t) = 0.$$

Рассмотрим о.-д. функцию $g_3(x_1, x_2, x_3)$. Отображение, осуществляемое этой о.-д. функцией, также определим индуктивно.

Пусть $t = 1$, $(a_1, a_2, a_3) \in E_2^1(3)$, $g_3(a_1, a_2, a_3) = a$. Тогда, если $q_0 = \tilde{q}_i$, $1 \leq i \leq s$, то $a(1) = F_3^i(a_3(1))$, если $q_0 \notin \{\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s\}$, то $a = (0)$.

Пусть $t > 1$, $(a_1, a_2, a_3) \in E_2^t(3)$, $g_3(a_1, a_2, a_3) = a$ и уже определены значения $a(1), \dots, a(t-1)$. Пусть

$$a'_1 = (a_1(1) \dots a_1(t-1)), \quad a'_2 = (a_2(1) \dots a_2(t-1)).$$

Тогда, если

$$\phi(a'_1, a'_2, q_0) = \tilde{q}_i, \quad 1 \leq i \leq s,$$

то $a(t) = F_3^i(a_3(t))$, если $\phi(a'_1, a'_2, q_0) \notin \{\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s\}$, то $a(t) = 0$.

Нетрудно видеть, что в P_0 существуют о.-д. функции, удовлетворяющие условиям, приведенным выше при индуктивном определении отображений. Легко убедиться в том, что

$$g(x_1, x_2) = g_3(x_1, x_2, \tilde{f}(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))).$$

Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 очевидна. Докажем их достаточность. Пусть $M \setminus P(1)$ не сохраняет ни одного множества из семейств H , D_0 , D_1 . По теореме 2 $P_0 \subseteq [M]$. Пусть $k \geq 1$ таково, что $M \setminus P(1)$ не сохраняет ни одного множества, принадлежащего объединению семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$. Из определения этих семейств следует, что в $[M]$ содержатся о.-д. функции

$$f_0(x_1, x_2), \dots, f_{k-1}(x_1, x_2),$$

обладающее $B(k, 0)$ -свойством, $\dots$, $B(k, k-1)$ -свойством соответственно. Но тогда в силу лемм 8 и 9 существуют числа

$$l_0 = 0 \pmod{k}, l_1 = 1 \pmod{k}, \dots, l_{k-1} = k-1 \pmod{k}$$

и о.-д. функции

$$g_0(x_1, x_2) = y_0, g_1(x_1, x_2) = y_1, \dots, g_{k-1}(x_1, x_2) = y_{k-1},$$

принадлежащие $[M]$, такие, что для всякого $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и любого $t > l_m$, представимого в виде $t = ki + l_m$, $i \leq 0$,

$$y_m(t+1) = \bar{x}_1(t+1) \vee \bar{x}_2(t+1).$$

Пусть

$$\tau = \max\{l_0, \dots, l_{k-1}\} + 1.$$

По условию теоремы 1 множество M A -полно. Поэтому в $[M]$ содержится о.-д. функция $\tilde{g}_\tau(x_1, x_2) = y$ такая, что для любого $t \in \{1, \dots, \tau\}$

$$y(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t).$$

Рассмотрим о.-д. функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = y$ из P_0 такую, что $y(t) = x_1(t)$ для $t \in \{1, \dots, \tau\}$ и $y(t+1) = x_{m+2}(t+1)$ для любого $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и для любого $t > \tau$, представимого в виде $t = ki + l_m$, где $i \geq 0$. Очевидно, что

$$f_\vee(x_1, x_2) = f(\tilde{g}_\tau(x_1, x_2), g_0(x_1, x_2), \dots, g_{k-1}(x_1, x_2)).$$

В силу следствия 2 $[M] = P$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть

$$p_1, p_2, \dots \quad (4)$$

— упорядоченная последовательность всех простых чисел, больших пяти.

Докажем утверждения (а), (b), (c) и (d) теоремы 3. Начнем с утверждения (а). Пусть

$$L = \{m_1, m_2, \dots\} \quad (5)$$

— упорядоченное множество чисел таких, что $m_i \in \{0, 1\}$ для любого $i \geq 1$. Пусть $i \geq 1$. Определим о.-д. функцию $h_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2) = y$, полагая $y(t) = x_1(t)$, если $t = jp_i + m_i + 1$ для некоторого $j \geq 0$, и $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, если t не представимо в виде $t = jp_i + m_i + 1$ для любого $j \geq 0$. Заметим, что о.-д. функция $h_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2)$ обладает $B(p_i, l)$ -свойством для любого $l \in \{0, \dots, p_i - 1\}$, $l \neq m_i$. Исходя из последовательности (5), определим множество о.-д. функций $\tilde{M}_L$. Будем считать, что $P_0 \subset \tilde{M}_L$ и для любого $i \geq 1$ о.-д. функция $h_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2)$ содержится в множестве $\tilde{M}_L$; других о.-д. функций в множестве $\tilde{M}_L$ нет. Покажем, что для любой последовательности L типа (5) замыкание множества $\tilde{M}_L$ не совпадает с P . Пусть

$$N = \{h_{p_{i_1}}^{m_{i_1}}(x_1, x_2) = y_1, \dots, h_{p_{i_s}}^{m_{i_s}}(x_1, x_2) = y_s\}$$

— произвольное конечное подмножество множества $\tilde{M} \setminus P_0$.

Покажем, что существует $t \geq 1$ такое, что $y_j(t+1) = x_1(t+1)$ для любого $j \in \{1, \dots, s\}$. Возможны два случая. Пусть $m_{i_1} = \dots = m_{i_s} = m$. Тогда

$$t = (p_{i_1} \dots p_{i_s}) + m.$$

Пусть теперь существует $j \in \{1, \dots, s\}$ такое, что $m_{i_1} \neq m_{i_j}$. Будем считать, что для некоторого d , $1 \leq d \leq s$,

$$m_{i_1} = \dots = m_{i_d} = 0, \quad m_{i_{d+1}} = \dots = m_{i_s} = 1.$$

Тогда

$$t = (p_{i_1} \dots p_{i_d})^{(p_{i_{d+1}} - 1) \dots (p_{i_s} - 1)}.$$

Из малой теоремы Ферма (см., например, [1]) следует, что по модулю любого из чисел

$$p_{i_{d+1}}, \dots, p_{i_s}$$

t совпадает с единицей и, вместе с тем, делится нацело на любое из $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_d}\}$. Таким образом, исходя из определения о.-д. функций $h_{p_i}^{m_i}(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, \dots$, нетрудно видеть, что из начального состояния любой о.-д. функции, принадлежащей $N \cup P_0$, лишь такие состояния t -достижимы, в которых реализуются функции алгебры логики, существенно зависящие только от одной переменной. Поэтому $[\tilde{M}_L] \neq P$.

Рассмотрим объединение множеств $\tilde{M}_L$ и $\tilde{M}_{L'}$ для любых отличных друг от друга последовательностей типа (5). Из определения $\tilde{M}_L$ и $\tilde{M}_{L'}$ следует, что для некоторого $i \geq 1$ множеству $\tilde{M}_L \cup \tilde{M}_{L'}$ принадлежат о.-д. функции $h_{p_i}^0(x_1, x_2)$, $h_{p_i}^1(x_1, x_2)$, обладающие $B(p_i, 1)$ -свойством, $\dots$, $B(p_i, p_i - 1)$ -свойством и $B(p_i, 0)$ -свойством, $B(p_i, 2)$ -свойством, $\dots$, $B(p_i, p_i - 1)$ -свойством соответственно. Таким образом, множество

$\{h_{p_i}^0(x_1, x_2), h_{p_i}^1(x_1, x_2)\}$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств

$$B(p_i, 0), B(p_i, 1), \dots, B(p_i, p_i - 1).$$

Вместе с тем, множество является A -полным (см. [5, 8, 9]). Так как $P_0 \subset \tilde{M}_L$, из теорем 1 и 2 следует, что

$$[\tilde{M}_L \cup \tilde{M}_{L'}] = P.$$

Пусть M_L и $M_{L'}$ — предполные классы в P , содержащие $\tilde{M}_L$ и $\tilde{M}_{L'}$ соответственно. Для любых отличных друг от друга последовательностей L и L' $[\tilde{M}_L \cup \tilde{M}_{L'}] = P$, поэтому $M_L \neq M_{L'}$. Предполный класс M_L содержит о.-д. функции $h(x_1, x_2)$, $d(u, x_1, x_2)$ (см. леммы 1 и 2). Поэтому M_L не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H , D_0 , D_1 . Существует континуум последовательностей типа (5). Вместе с тем, мощность всевозможных подмножеств множества P также равна континууму. Таким образом, утверждение (а) теоремы 3 доказано.

Докажем утверждение (б). Пусть $g(x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что

$$y(1) = x_1(1) \vee x_2(1),$$

для любого $t > 1$

$$y(t) = x_1(t) \vee x_2(t),$$

если $x_1(t-1) = x_2(t-1) = 0$,

$$y(t) = 0,$$

если либо $x_1(t-1) \neq 0$, либо $x_2(t-1) \neq 0$. Нетрудно видеть, что множество $\{g(x_1, x_2)\}$ не сохраняет ни одного множества из семейств D_0 , D_1 и для любых $k \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих семейству $B(k, l)$. Действительно, для любых $k \geq 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ о.-д. функция $g(x_1, x_2)$ обладает $B(k, l)$ -свойством и, кроме того,

$$h_0(x) = g(d_0^0(x), d_1^0(x)), \quad h_1(x) = g(d_0^1(x), d_1^1(x))$$

(см. определение семейств D_0 и D_1).

Пусть

$$M = \{n_1, n_2, \dots\} \quad (6)$$

— упорядоченное множество чисел таких, что $n_i \in \{0, 2\}$ для любого $i \geq 1$. Пусть $i \geq 1$. Определим о.-д. функцию $h_{p_i}^{n_i} = y$, полагая $y(t) = x_1(t)$, если для некоторого $j \geq 0$ либо $t = jp_i + n_i + 1$, либо $t = jp_i + n_i + 2$; $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, если $t \neq jp_i + n_i + 1$, $t \neq jp_i + n_i + 2$ для любого $j \geq 0$. Исходя из последовательности M типа (6), определим множество о.-д. функций $\tilde{M}_M$. Будем считать, что $P(1) \subset \tilde{M}_M$; $g \in \tilde{M}_M$; для любого $i \geq 1$ о.-д. функция $h_{p_i}^{n_i}$ содержится в $\tilde{M}_M$; других о.-д. функций в множестве $\tilde{M}_M$ нет.

Так же, как и при доказательстве утверждения (а), нетрудно показать, что для любого конечного подмножества N множества $\tilde{M}_M \setminus (\{g\} \cup P(1))$ существует $t \geq 1$ такое, что для любой о.-д. функции $f(x_1, x_2) = y$ из N

$$y(t+1) = x_1(t), \quad y(t+2) = x_1(t+2).$$

Легко видеть, что тогда для любой о.-д. функции $\tilde{f}(x_1, x_2) = y$ из $[N \cup \{g\} \cup P(1)]$ имеет место следующее: если в любом состоянии о.-д. функции f , $(t+1)$ -достижимом из

начального, реализуется функция алгебры логики, существенно зависящая от двух переменных, то существует состояние о.-д. функции f , t -достижимое из начального, в котором реализуется тождественная константа. Таким образом, $[M_M] \neq P$. Вместе с тем, M_M — A -полное множество и для любых двух отличных друг от друга последовательностей M и M' типа (6) существует $i \geq 1$ такое, что

$$h_{p_i}^0 \in \tilde{M}_M \cup \tilde{M}_{M'}, \quad h_{p_i}^2 \in \tilde{M}_M \cup \tilde{M}_{M'}.$$

Очевидно, что о.-д. функция

$$h_{p_i}^0(h_{p_i}^2(x_1, x_2), x_2) = y$$

такова, что $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$ для любого $t \geq 1$. Поэтому $[\tilde{M}_M \cup \tilde{M}_{M'}] = P$, и множества $\tilde{M}_M$ и $\tilde{M}_{M'}$ расширяются до разных предполных в P классов. Кроме того, из определений множества $\tilde{M}_M$ и о.-д. функции $g(x_1, x_2)$ следует, что $\tilde{M}_M$ не сохраняет ни одного множества из семейств D_0, D_1 и для любых $k \geq l, l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ не сохраняет ни одного множества, принадлежащего семейству $B(k, l)$. Существует континуум последовательностей типа (6). Таким образом, утверждение (b) теоремы 3 доказано.

Пусть $k \geq 3, l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и о.-д. функция $f_k^l(x_1, x_2) = y$ такова, что $y(t) = x_1(t)$, если $t = jk + l$ для некоторого $j \geq 0$, и $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, если $t \neq jk + l$ для любого $j \geq 0$. Пусть

$$F_k = \bigcup_{l=0}^{k-1} \{f_k^l\}, \quad F = \bigcup_{k=3}^{\infty} F_k.$$

Пусть $h(x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что $y(t) = x_1(t)$ для нечетных t и $y(t) = x_2(t)$ для четных t (см. лемму 1). Докажем утверждение (c). Пусть

$$N = \{l_1, l_2, \dots\} \quad (7)$$

— упорядоченное множество чисел таких, что $l_i \in \{0, 4\}$ для любого $i \geq 1$. Пусть $i \geq 1$. Определим о.-д. функцию $h_{p_i}^{l_i}(x_1, x_2) = y$, полагая $y(t) = x_1(t)$, если для некоторого $j \geq 0$ либо $t = jp_i + l_i + 2$, либо $t = jp_i + l_i + 4$, и $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, если $t \neq jp_i + l_i + 2, t \neq jp_i + l_i + 4$ для любого $j \geq 0$. Пусть $g_0(x_1, x_2) = y$ — о.-д. функция такая, что $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$ для нечетных t и $y(t) = 0$ для четных t . Исходя из последовательности N типа (7), определим множество о.-д. функций $\tilde{M}_N$. Будем считать, что

$$P(1) \cup F \cup \{h, g_0\} \subset \tilde{M}_N;$$

для любого $i \geq 1$ о.-д. функция $h_{p_i}^{l_i}$ содержится в $\tilde{M}_N$; других о.-д. функций в множестве $\tilde{M}_N$ нет.

Отметим, что множество $\tilde{M}_N$ не сохраняет ни одного множества из семейств H, D_1 и для любых $k \geq 3, l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих семейству $B(k, l)$. Так же, как и при доказательстве утверждений (a) и (b), нетрудно показать, что для любого конечного подмножества N множества

$$\tilde{M}_N \setminus (\{h, g_0\} \cup P(1) \cup F)$$

существует четное $t \geq 1$ такое, что для любой о.-д. функции из N

$$y(t+2) = x_1(t+2), \quad y(t+4) = x_1(t+4).$$

Ясно, что тогда для любой о.-д. функции $\tilde{f}(x_1, x_2) = y$ из $[N \cup F \cup P(1) \cup \{h, g_0\}]$ имеет место следующее: если в некотором состоянии о.-д. функции $\tilde{f}$, либо $(t+2)$ -достижимом, либо $(t+4)$ -достижимом из начального, реализуется функция алгебры логики, существенно зависящая от двух переменных, то соответственно существует либо $(t+4)$ -достижимое, либо $(t+2)$ -достижимое из начального состояние о.-д. функции $\tilde{f}$, в котором реализуется тождественная константа. Дальнейшее доказательство утверждения (с) почти дословно повторяет доказательство утверждений (а) и (b).

Доказательство утверждения (d) теоремы 3 аналогично доказательству утверждения (с). Следует только заменить о.-д. функцию g_0 на о.-д. функцию $g_1(x_1, x_2)$ такую, что $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$ для четных t и $y(t) = 0$ для нечетных, и, кроме того, для любого $i \geq 1$ о.-д. функцию $h_{p_i}^{l_i}(x_1, x_2)$ заменить на о.-д. функцию $\tilde{h}_{p_i}^{l_i}(x_1, x_2) = y$ такую, что $y(t) = x_1(t)$, если для некоторого $j \geq 0$ либо $t = jp_i + l_i + 1$, либо $t = jp_i + l_i + 3$, и $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$, если $t \neq jp_i + l_i + 1$, $t \neq jp_i + l_i + 3$ для любого $j \geq 0$.

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 3 и ее доказательство, приведенное выше, остаются справедливыми и для более широкой функциональной системы, включающей наряду с операциями суперпозиции также и операцию обратной связи (см. [3]).

Пример 1. Очевидно, исходя из теоремы 1, можно привести целый ряд нетривиальных примеров полных в P систем. Рассмотрим один из них.

Пусть $f(x_1, x_2)$ — о.-д. функция, обладающая следующими свойствами:

- в каждом состоянии о.-д. функции f реализуется либо $x_1 \vee x_2$, либо $x_1 + x_2$;
- существует $k \geq 1$ такое, что из любого состояния о.-д. функции f k -достижимое состояние, в котором реализуется $x_1 \vee x_2$;
- для любого $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ существует состояние, l -достижимое из начального, такое, что в нем реализуется $x_1 \vee x_2$.

Покажем, что множество $\{f(x_1, x_2)\} \cup P(1)$ полно в P . Действительно, нетрудно видеть, что $f(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1 . Следовательно, согласно теореме 2

$$P_0 \subseteq \{f(x_1, x_2)\} \cup P(1).$$

В силу свойств о.-д. функции $f(x_1, x_2)$ для любого $t \geq 0$ из начального состояния этой о.-д. функции k -достижимое состояние, в котором реализуется нелинейная функция алгебры логики. Отсюда легко следует, что $\{f(x_1, x_2)\} \cup P(1)$ — A -полное множество. Кроме того, для любого $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ о.-д. функция f обладает $B(k, l)$ -свойством и, таким образом, не сохраняет ни одного множества из объединения семейств $B(k, 0), \dots, B(k, k-1)$. Поэтому в силу теоремы 1 $\{f\} \cup P(1)$ — полное в P множество.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В. Б. Кудрявцеву за внимание к настоящей работе. Автор признателен С. В. Алешину, Д. Н. Бабину и А. А. Ирмакову за полезное обсуждение ее содержания, а также С. С. Марченкову за целый ряд важных замечаний.

Список литературы

1. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
2. Яблонский С. В., Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1958) **51**, 5–142.
3. Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*. Изд-во МГУ, Москва, 1982.
4. Гаврилов Г. П., О функциональной полноте в счетнозначной логике. *Проблемы кибернетики* (1965) **15**, 5–64.
5. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
6. Бабин Д. Н., О полноте двуместных о.-д. функций относительно суперпозиции. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 86–95.
7. Марченков С. С., О классах Слупецкого для детерминированных функций. *Дискретная математика* (1998) **10**, №2, 128–136.
8. Буевич В. А., *Условия A -полноты для конечных автоматов. Часть 1*. Изд-во МГУ, Москва, 1986.
9. Буевич В. А., *Условия A -полноты для конечных автоматов. Часть 2*. Изд-во МГУ, Москва, 1987.

Статья поступила 22.12.1998.

Переработанный вариант поступил 15.09.2000.