Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Демин, О необходимом количестве правил автоматной грамматики, порождающей конечный язык, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 99–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:09:16

УДК 519.7

О необходимом количестве правил автоматной грамматики, порождающей конечный язык

© 2000 г. Н. Ю. Демин

Рассматривается проблема восстановления протокола передачи данных по обмену его сообщениями. Формально данную проблему можно свести к задаче синтеза грамматики по порождаемому ею языку. Приводится оценка необходимого числа правил в автоматной грамматике, которая порождает язык данной конечной мощности.

1. Введение

В настоящее время в области информационных технологий приходится сталкиваться с проблемой изучения реально применяемых протоколов передачи данных, которые не соответствуют своим стандартам. В большинстве случаев такая проблема возникает в процессе интеграции различного телекоммуникационного оборудования.

Обычно под протоколом передачи данных, сетевым протоколом или просто протоколом понимают формат описания передаваемых сообщений и правила, по которым происходит обмен информацией между двумя или несколькими системами. Следовательно, естественно рассматривать протокол как формальную грамматику Γ (см. [1]), порождающую некоторое множество сообщений — язык $\mathcal{L}(\Gamma)$. Таким образом, задача восстановления протокола по обмену его сообщениями сводится к задаче синтеза грамматики по порождаемому ею языку. Другими словами, дан язык L и необходимо построить такую грамматику Γ , что порожденный ею язык $\mathcal{L}(\Gamma) \supseteq L$. В качестве меры сложности восстанавливаемой грамматики берется ее мощность, то есть число ее правил.

В статье приводится порядок величины, равной минимальной мощности автоматной грамматики (см. [2]), порождающей с шумом фиксированное количество слов. Автор выражает благодарность Э. Э. Гасанову и Э. А. Применко за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и результаты

Пусть A — множество символов, называемое алфавитом. Слово δ в алфавите A — это последовательность символов

$$\delta = a_1 a_2 \dots a_n, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

Обозначим A^* множество всех слов конечной длины в алфавите A .

Языком L над алфавитом A называется произвольное подмножество множества A^* .

Грамматика — это упорядоченная четверка $\Gamma = (W_T, W_N, I, R)$, где W_T — конечный основной (терминальный) алфавит, W_N — конечный вспомогательный (нетерминальный) алфавит, $I \in W_N$ — начальный символ грамматики Γ , R — конечное множество правил $\{u_i \rightarrow v_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ (конечная система подстановок), левые и правые части которых есть слова $u_i, v_i \in (W_T \cup W_N)^*$, причем символ $\rightarrow \notin (W_T \cup W_N)^*$.

Будем говорить, что слово y непосредственно выводится из слова x в грамматике Γ и обозначать $x \Rightarrow y$, если существует правило $u \rightarrow v \in R$ такое, что $x = x_1 u x_2$ и $y = x_1 v x_2$, где $x_1, x_2 \in (W_T \cup W_N)^*$.

Слово y называется выводимым из слова x в грамматике Γ , что обозначается $x \xRightarrow{*} y$, если слова x, y совпадают или существует последовательность слов $z_0, z_1, \dots, z_k$ такая, что

$$z_0 = x, \quad z_k = y, \quad z_{i-1} \Rightarrow z_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Последовательность $D = (z_0, z_1, \dots, z_k)$, где $z_0 = x$ и $z_k = y$, называется выводом слова y из слова x в грамматике Γ . Вывод D в грамматике называется полным, если $y = z_k \in W_T^*$. Слово $y \in W_T^*$ называется правильным, если существует по крайней мере один полный вывод слова y из слова $x = I$.

Язык $\mathcal{L}(\Gamma)$, порожденный грамматикой Γ , — это множество всех правильных слов в грамматике Γ .

Автоматная грамматика — это такая грамматика Γ , каждое правило которой имеет вид $u \rightarrow z$, где $z = x$ или $z = x\tau$ и $x \in W_T$, $u, \tau \in W_N$.

Грамматику Γ назовем ациклической, если она порождает конечный язык.

Нетерминальный символ назовем несущественным, если он не встречается ни в одном полном выводе из начального символа I .

В дальнейшем будем рассматривать множество A_2 — множество всех автоматных грамматик, не содержащих несущественных нетерминальных символов с $W_T = \{0, 1\}$. Под мощностью грамматик $\Gamma \in A_2$ будем понимать число ее правил и обозначать это число $|\Gamma|$.

Пусть $A_2(n)$ — множество ациклических автоматных грамматик из A_2 с числом правил, не большим n . Обозначим через $F(n)$ максимальное число слов, которое можно породить ациклической грамматикой из $A_2(n)$, то есть

$$F(n) = \max_{\Gamma \in A_2(n)} |\mathcal{L}(\Gamma)|.$$

Теорема 1. Для любого натурального n

$$F(n) = \begin{cases} 2^l, & \text{если } n = 2l, \\ 2^l + [2^{l-2}], & \text{если } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Пусть $A(L)$ — множество всех грамматик из A_2 , порождающих язык L , и

$$M_0(m) = \min_{|\mathcal{L}(\Gamma)|=m} |\Gamma|.$$

Пусть даны язык L и грамматика Γ из A_2 такая, что $\mathcal{L}(\Gamma) \supseteq L$. Уровнем шума грамматики Γ по отношению к языку L назовем величину

$$N(\Gamma, L) = \frac{|\mathcal{L}(\Gamma) \setminus L|}{|L|}.$$

Обозначим через $A_c(L)$ множество всех грамматик с уровнем шума $N(\Gamma, L) \leq c$ по отношению к языку L , а через $\Gamma^c(L)$ — грамматику, принадлежащую $A_c(L)$ такую, что

$$|\Gamma^c(L)| = \min_{\Gamma \in A_c(L)} |\Gamma|.$$

Пусть

$$M_c(m) = \min_{|L|=m} |\Gamma^c(L)|,$$

а $Q(m)$ — функция, определенная равенствами

$$Q(m) = \begin{cases} 2, & \text{если } m = 2, \\ 4, & \text{если } m = 3, 4, \\ 2k + 1, & \text{если } 2^k + 1 \leq m \leq 2^k + 2^{k-2}, \quad k > 1, \\ 2k + 2, & \text{если } 2^k + 2^{k-2} + 1 \leq m \leq 2^{k+1}, \quad k > 1. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть m — натуральное число,

$$m = \sum_{i=0}^k a_i 2^i,$$

тогда

$$Q(m) \leq M_0(m) \leq 2k + 2a_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i.$$

Теорема 3. Для любого натурального $m > 1$ и $c \geq 3/5$

$$M_c(m) = Q(m).$$

3. Оценка максимальной мощности конечного языка, порождаемого конечной грамматикой

Пусть дан ориентированный граф $G = \{V, X\}$, где V — множество его вершин и X — множество его ребер. Начальная и конечная вершины графа G — это вершина, в которую не входит и из которой не выходит ни одного ребра соответственно. Граф G назовем правильным графом, если у него одна начальная и одна конечная вершины, любое ребро имеет кратность, не большую 2, и в графе нет ориентированных циклов. Обозначим через $C(G)$ число ориентированных цепочек, которые начинаются в начальной и заканчиваются в конечной вершинах правильного графа G . Обозначим через $\Omega(n)$ множество правильных графов с n ребрами. Пусть

$$C(n) = \max_{G \in \Omega(n)} C(G).$$

Рис. 1.

Рис. 2.

Пусть n — натуральное число. Определим функцию $f(n)$ следующим образом:

$$f(n) = \begin{cases} 2^l, & \text{если } n = 2l, \\ 2^l + [2^{l-2}], & \text{если } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Лемма 1. Для любого натурального n

$$C(n) = f(n).$$

Доказательство. Докажем индукцией по n , что $C(n) \leq f(n)$. В качестве базы индукции возьмем случай $n = 1$. Если $n = 1$, то $C(1) = 1 = f(1)$, поскольку существует только один правильный граф с одним ребром (рис. 1).

Если $n = 2$, то $C(2) = 2 = f(2)$, поскольку существуют только два правильных графа с двумя ребрами (рис. 2).

Проведем шаг индукции. Пусть для всех $q \leq n$ утверждение леммы выполняется. Возьмем произвольный правильный граф G с $n \geq 2$ ребрами, где α — начальная вершина графа, а Λ — конечная вершина графа (рис. 3). Пусть из вершины α исходит k ребер в вершины $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, причем какие-то из этих вершин могут совпадать. Обозначим через G_i граф, составленный из всех вершин и ребер, принадлежащих ориентированным цепям, ведущим из β_i в Λ , $i = 1, 2, \dots, k$.

Так как в вершину α не входит ни одно ребро, ребра (α, β_i) не принадлежат ни одному из графов G_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Отсюда следует, что

$$C(G) = \sum_{i=1}^k C(G_i) \leq kC(n-k) \leq kf(n-k).$$

Заметим, что $f(n-2) \leq f(n)/2$ для всех $n \geq 2$.

Возможны два случая.

Пусть $k = 2r$. Тогда

$$\begin{aligned} kf(n-k) &\leq \frac{k}{2} f(n-k+2) \\ &\leq \frac{k}{4} f(n-k+4) \leq \dots \leq \frac{k}{2^r} f(n) \leq f(n). \end{aligned}$$

Рис. 3.

Пусть теперь $k = 2r + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} kf(n-k) &\leq \frac{k}{2}f(n-k+1) \\ &\leq \frac{k}{4}f(n-k+3) \leq \dots \leq \frac{k}{2^r}f(n-1) \leq f(n). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого правильного графа G с n ребрами $C(G) \leq f(n)$. Следовательно, $C(n) \leq f(n)$.

Покажем, что $C(n) \geq f(n)$.

Возможны пять случаев.

Пусть $n = 1$ и G_1 — правильный граф, изображенный на рис. 1. В этом случае

$$C(1) \geq C(G_1) = 1 = f(1).$$

Пусть $n = 2$ и G_2 — правильный граф, изображенный на рис. 2. В этом случае

$$C(2) \geq C(G_2) = 2 = f(2).$$

Пусть $n = 3$ и G_3 — правильный граф, изображенный на рис. 4. В этом случае

$$C(3) \geq C(G_3) = 2 = f(3).$$

Пусть $n = 2l$, где $l > 1$. Рассмотрим правильный граф G_{2l} , изображенный на рис. 5. В этом случае

$$C(n) \geq C(G_{2l}) = 2^l = f(n).$$

Пусть $n = 2l + 1$, где $l > 1$. Рассмотрим правильный граф G_{2l+1} , изображенный на рис. 6. В этом случае

$$C(n) \geq C(G_{2l+1}) = 2^l + 2^{l-2} = f(n).$$

Таким образом, $C(n) \geq f(n)$. Отсюда следует, что $C(n) = f(n)$.

Лемма доказана.

Рис. 4.

Рис. 5.

Заметим, что любую автоматную грамматику

$$\Gamma = (W_T, W_N, I, R)$$

можно представить с помощью графа G , который строится следующим образом. Возьмем $|W_N| + 1$ вершину, сопоставим одной из них символ $\Lambda \notin W_N$, а остальным взаимно однозначно сопоставим символы из W_N . Значок Λ будет пониматься нами как отсутствие нетерминального символа в правой части правила, то есть правило вида $t \rightarrow a$ будем понимать как $t \rightarrow a\Lambda$. Из вершины α в вершину β проведем ориентированное ребро в том и только том случае, когда в грамматике есть правило, левая и правая части которого содержат нетерминальные символы, соответствующие данным вершинам. Само ребро нагружается терминальным символом, входящим в правую часть данного правила. Полученный нагруженный ориентированный граф будем обозначать $G(\Gamma)$ и называть источником грамматики Γ . Очевидно, что по источнику $G(\Gamma)$ однозначно восстанавливается грамматика Γ .

Вершину графа $G(\Gamma)$, которой сопоставлен начальный символ грамматики, назовем истоком, а вершину, которой приписан символ Λ , стоком.

Лемма 2. Любая цепочка в источнике $G(\Gamma)$ из начальной вершины в конечную соответствует некоторому слову, порождаемому данной грамматикой.

Доказательство. Пусть последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3 \dots v_k$ — путь из начальной

Рис. 6.

вершины v_1 в конечную v_k . По определению $G(\Gamma)$

$$v_i \rightarrow x_i v_{i+1} \in R, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

где $R \in \Gamma$, и при

$$v_1 = I, \dots, v_k = \Lambda$$

в грамматике Γ существует вывод

$$D = I \Rightarrow x_1, x_1 \Rightarrow x_1 x_2, \dots, x_1 x_2 \dots x_{k-2} \Rightarrow x_1 x_2 \dots x_{k-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если ациклическая грамматика Γ не содержит несущественных нетерминальных символов и $|T| = 2$, то источник $G(\Gamma)$ — правильный граф.

Доказательство. В силу того, что грамматика Γ порождает конечное число слов, количество цепочек из начальной вершины графа $G(\Gamma)$ в вершину Λ тоже конечно. В графе $G(\Gamma)$ нет ориентированных циклов, поскольку наличие хотя бы одного цикла приводит к бесконечному числу цепей, ведущих из начальной вершины в конечную, и следовательно, к бесконечному языку $L(G)$.

По определению $G(\Gamma)$ из вершины с символом Λ ни одного ребра не выходит.

Докажем, что в исток ни одного ребра не заходит. Предположим, что в исток заходит ребро (α, I) . Так как α — существенный нетерминал, он содержится в некотором выводе из начального символа, следовательно, мы имеем ориентированный цикл, проходящий через исток и приводящий к бесконечности языка $L(G)$. Получаем противоречие. Доказательство того, что из стока не исходит ни одно ребро, аналогично.

Докажем, что в графе $G(\Gamma)$ одна начальная и одна конечная вершины. По определению, вершина конечна, если из нее не выходит ни одного ребра. Предположим, что в графе $G(\Gamma)$ существует конечная вершина с символом $\alpha \neq \Lambda$. Но тогда через эту вершину не проходит ни одна цепочка из вершины I в вершину Λ , следовательно, α — несущественный нетерминал. Получаем противоречие. Единственность начальной вершины доказывается аналогичным образом.

Кратность каждого ребра в $G(\Gamma)$ не больше, чем мощность алфавита, то есть не больше двух.

Лемма доказана.

Следствие 1. Справедливо равенство

$$C(G(\Gamma)) = |L(\Gamma)|.$$

Утверждение следует из лемм 2 и 3.

Лемма 4. Для любого правильного графа существует такая нагрузка его вершин нетерминальными символами и нагрузка его ребер терминальными символами, что полученный нагруженный граф будет источником некоторой ациклической грамматики.

Доказательство. Рассмотрим произвольный правильный граф G с n вершинами. Возьмем множество W_N такое, что $|W_N| = n - 1$ и W_N содержит I . Начальную вершину помечаем символом I , конечную — символом Λ , а остальные взаимно однозначно символами из $W_N \setminus I$. Нагружаются ребра символами $0, 1$ так, чтобы кратные ребра были нагружены разными символами. Каждому ребру (α, β) графа сопоставим правило $\mu \rightarrow av$, где a — символ, приписанный ребру, а μ и v — символы, приписанные вершинам α и β соответственно. Понятно, что правила, сопоставленные разным ребрам, разные. Пусть R — множество правил, сопоставленных всем вершинам графа, то есть $|R|$ равно числу ребер в G . Очевидно, что полученный нагруженный граф будет источником для грамматики $\Gamma = (\{0, 1\}, W_N, I, R)$.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1. Утверждение теоремы следует из равенства

$$\begin{aligned} F(n) &= \max_{\Gamma \in A_2(n)} |L(\Gamma)| = \max_{G \in \Omega(n)} C(G) \\ &= f(n) = \begin{cases} 2^l, & \text{если } n = 2l, \\ 2^l + [2^{l-2}], & \text{если } n = 2l + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Оценка минимума мощности грамматик, порождающих с шумом заданное число слов

Лемма 5. Если l — натуральное число, то $M_0(2^l) = 2l$ при $l \geq 1$ и $M_0(2^l + 2^{l-2}) = 2l + 1$ при $l \geq 2$.

Доказательство. Согласно теореме 1

$$M_0(2^l) = M_0(F(2l)) \leq 2l.$$

Предположим, что $M_0(2^l) = m < 2l$, то есть существует грамматика $\Gamma_{\min}$ такая, что

$$|\Gamma_{\min}| = m, \quad |L(\Gamma_{\min})| = 2^l.$$

Тогда

$$F(m) = \max_{\Gamma \in A_2(m)} |L(\Gamma)| \geq |L(\Gamma_{\min})| = 2^l.$$

Но так как $F(m)$ строго возрастает, $F(m) < F(2l)$. Получаем противоречие. Доказательство утверждения для $M_0(2^l + 2^{l-2})$ аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 6. Для любых натуральных $k \geq 2$ и r

$$M_0(2^k + r) \geq 2k + 1, \quad M_0(2^k + 2^{k-2} + r) \geq 2k + 2.$$

Доказательство. Покажем, что $M_0(2^k + r) > 2k$. Предположим противное, что $M_0(2^k + r) = m \leq 2k$, то есть существует грамматика $\Gamma_{\min}$ такая, что

$$|\Gamma_{\min}| = m, \quad |L(\Gamma_{\min})| = 2^k + r,$$

Рис. 7.

тогда

$$F(m) = \max_{\Gamma \in A_2(m)} |L(\Gamma)| \geq |L(\Gamma_{min})| = 2^k + r.$$

Но $F(m) \leq F(2k) = 2^k$. Получаем противоречие. Для $M_0(2^k + 2^{k-2} + r)$ доказательство аналогично.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала получим оценку сверху минимума мощности грамматик, порождающих заданное число слов. Пусть

$$m = \sum_{i=0}^k a_i 2^i.$$

Построим $G(m)$ следующим образом. Возьмем граф, изображенный на рис. 5, где $l = k$.

Если $a_i = 1$, где $i < k - 1$, то проводим ребро из вершины α_i в вершину α_k . Это приводит к 2^i новым цепочкам, ведущим из вершин α_0 в α_k . Если $a_{k-1} = 1$, то проводим два ребра из α_0 в α_2 . Это приводит к $2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$ новым цепочкам из α_0 в α_k . Пример графа $G(m)$ приведен на рис. 7. Тем самым граф $G(m)$ содержит

$$m = \sum_{i=1}^k a_i 2^i$$

цепочек, ведущих из α_0 в α_k , или, что тоже самое, грамматика Γ , источником которой является $G(m)$, порождает m слов. Следовательно,

$$M_0(m) = \min_{|\mathcal{L}(\Gamma)|=m} |\Gamma| \leq |\Gamma_m| = 2k + 2a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_0.$$

В силу лемм 5 и 6 условие $Q(m) \leq M_0(m)$ выполняется для любых $m \neq 3$. Покажем, что $M_0(3) = 4$. Предположим противное, что $M_0(3) = 3$, то есть существует грамматика Γ такая, что

$$|\Gamma| = 3, \quad |L(\Gamma)| = 3.$$

Тогда $F(3) = 3$, но $F(3) = 2$. Поэтому $M_0(3) = 4$.

Теорема доказана.

Следствие 2. Для любого натурального $m > 3$

$$2 \lfloor \log_2 m \rfloor \leq M_0(m) \leq 3 \lfloor \log_2 m \rfloor.$$

Справедливость следствия вытекает из леммы 6 и теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть m — натуральное число и $m \geq 2$. Если L — язык такой, что $|L| = m$, а $\Gamma \in R_c(L)$ — такая грамматика, что $|\mathcal{L}(\Gamma)| \geq L$, то из условия

$$N(\Gamma, L) = \frac{|\mathcal{L}(\Gamma)| - m}{m} \leq c$$

следует, что $|\mathcal{L}(\Gamma)| \leq m(c+1)$. С другой стороны, $|\mathcal{L}(\Gamma)| \geq m$.

Возможны три случая.

Пусть $m = 2, 3, 4$. Тогда для любого c

$$M_c(m) = M_0(m) = Q(m).$$

Пусть $2^k + 1 \leq m \leq 2^k + 2^{k-2}$, $k \geq 2$. Согласно лемме 5

$$M_0(2^k + 2^{k-2}) = 2k + 1.$$

Из той же леммы следует, что при $r \geq 1$

$$M_0(2^k + r) \geq 2k + 1.$$

Поэтому при $c \geq 1/4$

$$\begin{aligned} m(c+1) &\geq (2k+1)(c+1) \geq (2^k+1)(1+1/4) \\ &> 2^k(1+1/4) = 2^k + 2^{k-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $M_c(m) = 2k + 1$ при $c \geq 1/4$.

Наконец, пусть $2^k + 2^{k-2} + 1 \leq m \leq 2^{k+1}$, $k \geq 2$. Согласно лемме 5 при $r \geq 1$

$$M_0(2^{k+1}) = 2(k+1) = 2k + 2.$$

Из той же леммы следует, что

$$M_0(2^k + 2^{k-r} + r) \geq 2k + 2.$$

Поэтому при $c \geq 3/5$

$$m(c+1) \geq (2^k + 2^{k-r} + 1) \frac{8}{5} = 2^{k+1} + \frac{8}{5} > 2^{k+1}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Аничкин С. А., Белов С. А., *Протоколы информационно-вычислительных сетей*. Радио и связь, Москва, 1989.
2. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л., *Алгебра. Языки. Программирование*. Наукова думка, Киев, 1978.

Статья поступила 18.11.2000.