Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О сложности вычисления рудиментарных предикатов, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 83–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:22:51

О сложности вычисления рудиментарных предикатов

© 2000 г. С. С. Марченков

Класс рудиментарных предикатов определяется как наименьший класс числовых предикатов, который содержит предикаты равенства и конкатенации и замкнут относительно операций логики высказываний, явных преобразований и навешивания ограниченных кванторов. Сложность вычисления рудиментарных предикатов охарактеризовывается в терминах альтернирующих машин Тьюринга с конечным числом альтернирований. Доказывается полиномиальная вычислимость рудиментарных $\exists$ - и $\forall$ -предикатов на детерминированных машинах Тьюринга. Определяются иерархии $\{R\Sigma_k\}$ и $\{R\Pi_k\}$ класса рудиментарных предикатов и исследуется класс $R\Sigma_1 \cap R\Pi_1$. Доказывается неразрешимость проблемы непустоты для класса $R\Pi_1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-01-00351.

1. Введение

Значительное число предикатов, встречающихся в теории алгоритмов, алгебре и теории чисел, можно представить в ограниченно-арифметической форме

$$(Q_1 y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (Q_n y_n)_{y_n \leq z_n} \rho(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ — кванторы $\exists$ или $\forall$, а предикат ρ получается из арифметических предикатов $x + y = z$ и $x \cdot y = z$ с помощью операций логики высказываний и явных преобразований (перестановка и отождествление аргументов, введение фиктивных аргументов, подстановка констант). Класс предикатов, представимых в виде (1), был определен (с небольшими техническими отличиями) А. В. Кузнецовым [1] как класс ограниченно-арифметических предикатов и Р. Смальяном [2] как класс конструктивно-арифметических предикатов. В книге [2] введено также понятие рудиментарного предиката. Совпадение классов ограниченно-арифметических, конструктивно-арифметических и рудиментарных предикатов установлено в [2–5].

Рудиментарные предикаты определяются на множестве натуральных чисел. Предполагается, что натуральные числа взаимно однозначным образом кодируются словами в алфавите $\{1, 2\}$: слову $a_k a_{k-1} \dots a_1$, составленному из символов 1 и 2, сопоставляется натуральное число

$$\sum_{i=1}^k a_i 2^{i-1}. \quad (2)$$

Запись $a_k a_{k-1} \dots a_1$ называется диадическим представлением числа (2).

В качестве исходных рудиментарных предикатов рассматриваются предикаты равенства $x = y$ и конкатенации $xy = z$ (конкатенация диадических представлений чисел x и y есть диадическое представление числа z). Класс **R** рудиментарных предикатов определяется как наименьший класс предикатов, который содержит предикаты равенства и конкатенации и замкнут относительно операций логики высказываний, явных преобразований и навешивания ограниченных кванторов

$$(\exists y)_{y \leq z}, \quad (\forall y)_{y \leq z}.$$

В [4, 5] доказано, что классу **R** принадлежат предикаты, которые вычислимы на некотором варианте машин Тьюринга за полиномиальное время и с зоной, ограниченной функцией вида n^γ , где $0 < \gamma < 1$. Ниже, в теоремах 1 и 2, мы более точно оцениваем сложность вычисления рудиментарных предикатов в терминах альтернирующих машин Тьюринга с конечным числом альтернирований. В теореме 3 положительно решается вопрос о полиномиальном детерминированном вычислении рудиментарных $\exists$ - и $\forall$ -предикатов. По аналогии с арифметической иерархией Клини мы определяем иерархии $\{R\Sigma_k\}$, $\{R\Pi_k\}$ класса рудиментарных предикатов и исследуем класс $R\Sigma_1 \cap R\Pi_1$. В теореме 4 устанавливается неразрешимость проблемы непустоты для класса $R\Pi_1$. В конце работы в классе $R\Sigma_2$ строится пример предиката логарифмического типа.

2. Вычисление рудиментарных предикатов на альтернирующих и детерминированных машинах Тьюринга

Понятие альтернирующего вычисления введено в [6]. Оно естественным образом обобщает понятие недетерминированного вычисления. Изложим в общих чертах концепцию альтернирующего вычисления применительно к машинам Тьюринга.

Пусть $\mathcal{M}$ — машина Тьюринга произвольного типа с множеством внутренних состояний $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Будем считать состояние q_1 начальным состоянием машины $\mathcal{M}$, а q_s — ее заключительным состоянием. Функционирование машины $\mathcal{M}$ определяется конечной программой, которая состоит из команд вида

$$A, q_i \rightarrow B, q_j,$$

где A — конечный набор символов, которые машина $\mathcal{M}$ может считывать с различных устройств ее внешней памяти (лент, магазинов, счетчиков и т. п.), B — конечный набор символов, который задает локальные преобразования внешней памяти. Отметим, что программа машины $\mathcal{M}$ может содержать различные команды с одинаковыми левыми частями.

Предполагается, что множество Q состояний машины $\mathcal{M}$ разбито на два непересекающихся подмножества: множество экзистенциальных состояний и множество универсальных состояний. Обычным образом вводится понятие конфигурации машины $\mathcal{M}$: конфигурация машины $\mathcal{M}$ состоит из состояния q_i , а также полного описания состояния внешней памяти машины $\mathcal{M}$ с указанием положения в ней всех считывающе-записывающих устройств. Как правило, в процессе работы машины $\mathcal{M}$ почти вся ее внешняя память является пустой. Поэтому конфигурацию машины

$\mathcal{M}$ можно задать конечным словом. Конфигурация, содержащая экзистенциальное состояние, называется экзистенциальной, а содержащая универсальное состояние — универсальной.

Также обычным образом вводится понятие «конфигурация K_2 машины $\mathcal{M}$ непосредственно следует за конфигурацией K_1 »: все элементы конфигурации K_2 должны получаться из соответствующих элементов конфигурации K_1 за один такт работы машины $\mathcal{M}$. Согласно сделанному выше замечанию о программе машины $\mathcal{M}$, непосредственно за конфигурацией K_1 может следовать несколько (но конечное число) конфигураций K_2 .

По индукции определим понятие допускающей конфигурации машины $\mathcal{M}$. Каждая конфигурация машины $\mathcal{M}$, содержащая заключительное состояние q_s (заключительная конфигурация), считается допускающей конфигурацией машины $\mathcal{M}$. Пусть K — незаключительная конфигурация машины $\mathcal{M}$. Если K — экзистенциальная конфигурация и хотя бы одна из конфигураций машины $\mathcal{M}$, непосредственно следующих за K , является допускающей конфигурацией, то K считается допускающей конфигурацией. Двойственным образом, если K — универсальная конфигурация, то конфигурация K считается допускающей, если допускающими являются все конфигурации, которые непосредственно следуют за K .

Говорят, что альтернирующая машина $\mathcal{M}$ распознает (вычисляет) предикат $\rho(x_1, \dots, x_n)$, если для любых значений $x_1, \dots, x_n$ начальная конфигурация $K(x_1, \dots, x_n)$, отвечающая набору $(x_1, \dots, x_n)$, является допускающей тогда и только тогда, когда истинно значение $\rho(x_1, \dots, x_n)$.

Так же, как для детерминированных машин Тьюринга, для альтернирующих машин Тьюринга можно ввести понятия времени вычисления и зоны вычисления (см. [6]). При этом следует иметь в виду, что в отличие от детерминированного случая альтернирующие вычисления можно представить в виде ориентированного дерева, в корне которого находится начальная конфигурация, а в конечных вершинах — заключительные конфигурации. Поэтому время альтернирующего вычисления представляет собой длину наибольшей цепи в этом дереве, а зона альтернирующего вычисления равна максимуму из зон конфигураций, составляющих дерево.

Пусть $k \geq 0$. Дерево вычисления на альтернирующей машине $\mathcal{M}$ называется k -альтернирующим, если каждая цепь дерева вычисления содержит не более k перемен экзистенциальных и универсальных конфигураций. Соответствующим образом, машина $\mathcal{M}$ называется k -альтернирующей, если каждое вычисление на машине $\mathcal{M}$ является k -альтернирующим.

Ниже, в теоремах 1 и 2, будет рассматриваться следующий вариант машин Тьюринга (см. также [4, 5]). Машина Тьюринга имеет две ленты: входную и рабочую. На входной ленте помещается читающая головка, которая может двигаться по ленте в обе стороны, не выходя за пределы записанного на ленте слова и не меняя записанных на ленте символов. На рабочей ленте располагается головка, которая может двигаться в обе стороны, читать записанные и записывать новые символы. Алфавит входной ленты состоит из символов 1, 2, *. При вычислении на машине предиката $\rho(x_1, \dots, x_n)$ от аргументов $x_1, \dots, x_n$, принимающих натуральные значения, набор $(x_1, \dots, x_n)$ представляется на входной ленте в виде

$$*d(x_1) * d(x_2) * \dots * d(x_n)*,$$

где $d(x_i)$ — диадическое представление x_i . В начальный момент вычисления головка на входной ленте устанавливается на самый левый символ *.

Алфавит рабочей ленты состоит из символов $b_0, b_1, \dots, b_r$, где b_0 — пустой символ. В начальный момент вычисления рабочая лента пуста (состоит из одних символов b_0).

Программа машины состоит из команд вида

$$ab_jq_k \rightarrow b_mMNq_l, \quad (3)$$

где $a \in \{1, 2, *\}$, $k \neq s$, $M, N \in \{L, R, S\}$. Команда (3) интерпретируется следующим образом. Если в момент t машина находится в состоянии q_k , головки на входной и рабочей лентах обозревают соответственно символы a и b_j , то в момент $t+1$ машина будет находиться в состоянии q_l , символ b_j на рабочей ленте будет заменен символом b_m , а головки на входной и рабочей лентах переместятся в соответствии с символами M и N (L — сдвиг на одну позицию влево, R — вправо, S — отсутствие сдвига).

Пусть в момент времени t машина Тьюринга $\mathcal{M}$ указанного типа находится в состоянии q_i , на ее входной ленте записано слово u , головка на входной ленте обозревает j -ю букву слова u , v — слово, записанное на рабочей ленте слева от головки (крайние слева символы b_0 в слове v опускаются, исключение составляет случай $v = b_0$), w — аналогичное слово, расположенное справа от головки, причем в момент t машина $\mathcal{M}$ обозревает первую букву слова w . Тогда набор (i, u, j, v, w) называется конфигурацией машины $\mathcal{M}$ в момент t . Зона вычисления на машине $\mathcal{M}$ определяется по рабочей ленте.

Теорема 1. Пусть рудиментарный предикат $\sigma(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$ представим в форме (1), где кванторная приставка $Q_1 \dots Q_n$ содержит k перемен кванторов, а предикат ρ построен из предикатов равенства и конкатенации с помощью операций логики высказываний и явных преобразований.

Тогда предикат σ можно вычислить на подходящей k -альтернирующей машине Тьюринга за не более чем квадратичное время и с линейной зоной.

Доказательство. Опишем неформальным образом работу k -альтернирующей машины Тьюринга $\mathcal{M}$, которая вычисляет предикат σ . Эта работа естественно разбивается на два этапа. На первом этапе с помощью экзистенциальных и универсальных состояний происходит выбор надлежащих значений аргументов $y_1, \dots, y_n$ в формуле (1). На втором этапе для заданных значений аргументов $x_1, \dots, x_m$ и найденных значений аргументов $y_1, \dots, y_n$ проводится вычисление значения $\rho(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$.

Более подробно, пусть для определенности в кванторной приставке $Q_1 \dots Q_n$ первые p кванторов суть кванторы существования, следующие q кванторов суть кванторы общности и т. д. Используя экзистенциальные состояния, машина $\mathcal{M}$ записывает на рабочей ленте какие-либо значения $y_1, \dots, y_p$, подчиняющиеся условиям $y_1 \leq z_1, \dots, y_n \leq z_n$. Процесс записи набора $(y_1, \dots, y_p)$ на рабочей ленте требует не более чем квадратичного (относительно длины записи набора $(z_1, \dots, z_p)$) времени и линейной зоны, поскольку разряды чисел $y_1, \dots, y_p$ просто последовательно угадываются. Угадав некоторый набор $(y_1, \dots, y_p)$, машина $\mathcal{M}$ переходит в блок универсальных состояний и аналогичным образом за не более чем квадратичное время и на линейной зоне генерирует наборы $(y_{p+1}, \dots, y_{p+q})$. Затем машина $\mathcal{M}$ переходит в блок экзистенциальных состояний и т. д. Таким образом, весь процесс отыскания значений аргументов $y_1, \dots, y_n$ занимает не более чем квадратичное время и выполняется на линейной зоне.

Второй этап работы машины $\mathcal{M}$ полностью детерминирован. Здесь происходит вычисление предикатов вида

$$v_1 = v_2, \quad \neg(v_1 = v_2), \quad v_1 v_2 = v_3, \quad \neg(v_1 v_2 = v_3),$$

где v_1, v_2, v_3 — значения аргументов $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$, либо константы, входящие в предикат ρ . Очевидно, что проверку выполнения равенств $v_1 = v_2$ и $v_1 v_2 = v_3$ можно выполнить за не более чем квадратичное время и на линейной зоне. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $k \geq 1$, $0 < \gamma < 1$ и предикат ρ вычислим k -альтернирующей машиной Тьюринга за полиномиальное время и на зоне, ограниченной функцией вида n^γ . Тогда ρ есть рудиментарный предикат.

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [4] (детерминированный вариант теоремы 2) и теоремы 1 из [5] (недетерминированный вариант теоремы 2). Поэтому мы его опускаем.

Назовем рудиментарный предикат $\exists$ -предикатом, если его можно представить в форме (1), где

$$Q_1 = \dots = Q_n = \exists$$

и предикат ρ построен из предикатов равенства и конкатенации с помощью операций логики высказываний и явных преобразований. Аналогичным образом определяем рудиментарный $\forall$ -предикат. Легко видеть, что отрицанием рудиментарного $\exists$ -предиката является рудиментарный $\forall$ -предикат и наоборот.

Если рудиментарные предикаты вычислять непосредственно по формуле (1), то, вообще говоря, время вычисления будет зависеть экспоненциальным образом от длины записи аргументов. Теорема 1 из [5] и теорема 2 настоящей работы оставляют мало надежд на то, что эту тривиальную экспоненциальную оценку удастся понизить до полиномиальной. Поэтому на данном этапе исследований класса $\mathbf{R}$ представляет интерес выделение в $\mathbf{R}$ как можно более широких классов предикатов, для которых имеется полиномиальная верхняя оценка времени детерминированного вычисления. Теорема 3, доказываемая ниже, говорит о том, что к таким классам относятся классы рудиментарных $\exists$ - и $\forall$ -предикатов.

Говоря здесь и далее о полиномиальном времени вычисления и о полиномиальных алгоритмах, мы имеем в виду, что выбран достаточно широкий класс абстрактных вычислительных устройств (например, этими устройствами могут быть многоленточные машины Тьюринга [7]) и полиномиальные алгоритмы реализуются детерминированно за полиномиальное (от длины входа) время в этом классе вычислительных устройств. Что касается вопроса о представлении в этих устройствах рассматриваемых ниже формул, то, не углубляясь в технические детали, будем предполагать, что выбран некоторый естественный способ кодирования формул словами некоторого конечного алфавита.

Прежде чем переходить к теореме 3, установим одно вспомогательное утверждение технического характера. Как обычно, предикаты $\neg(x = y)$ и $\neg(xy = z)$ будем обозначать через $x \neq y$ и $xy \neq z$.

Лемма 1. Предикаты $x \neq y$ и $xy \neq z$ можно получить из предикатов равенства и конкатенации с помощью логических операций конъюнкции и дизъюнкции, явных преобразований и навешивания ограниченных кванторов существования.

Доказательство. Мы рассмотрим только предикат $xy \neq z$. Предикат $x \neq y$ получается аналогично более простыми построениями.

Очевидно, что слово xy отлично от слова z в том и только том случае, когда выполняется хотя бы одно из условий.

- (1) Слово xy есть собственное начало слова z .
- (2) Слово z есть собственное начало слова xy .
- (3) Существует такое слово v , которое является собственным началом слов xy и z , при этом для некоторого символа $a, a \in \{1, 2\}$, слово va есть начало (не обязательно собственное) слова xy , а слово vb , где $b \in \{1, 2\}$ и $b \neq a$, — начало (тоже не обязательно собственное) слова z .

Условие 2 естественным образом разбивается на три следующих попарно не пересекающихся подслучая:

- (2a) Слово z есть собственное начало слова x .
- (2b) $z = x$.
- (2c) Слово z есть конкатенация слова x и собственного начала слова y .

В свою очередь условие 3 также можно разбить на три попарно не пересекающихся подслучая:

- (3a) Слово v есть собственное начало слова x .
- (3b) $v = x$.
- (3c) Слово v есть конкатенация слова x и собственного начала слова y .

Каждому из пп. 1, 2a–2c, 3a–3c будет сопоставлена формула рассматриваемого в лемме типа, которая определяет описанный в условии пункта предикат. Дизъюнкция этих семи формул и будет задавать предикат $xy \neq z$.

- (1) $(\exists v_1)_{v_1 \leq z} (\exists v_2)_{v_2 \leq z} ((xy = v_1) \& (v_1 v_2 = z))$.
- (2a) $(\exists v)_{v \leq x} (zv = x)$.
- (2b) $z = x$.
- (2c) $(\exists v_1)_{v_1 \leq y} (\exists v_2)_{v_2 \leq y} ((xv_1 = z) \& (v_1 v_2 = y))$.

В случае 3a формула имеет вид

$$(\exists v)_{v \leq x} (\exists v_1)_{v_1 \leq x} (\exists v_2)_{v_2 \leq z} ((v_1 = x \vee v_1 v_1 = x) \& (v_2 = z \vee v_2 v_2 = z) \vee (v_2 = x \vee v_2 v_1 = x) \& (v_1 = z \vee v_1 v_2 = z))$$

(встречающиеся в этой формуле предикаты типа $v_1 v_1 = x$ необходимо представить в форме

$$(\exists v_3)_{v_3 \leq x} ((v_1 = v_3) \& (v_3 v_1 = x))).$$

В случае 3b формула имеет вид

$$(\exists v_1)_{v_1 \leq y} (\exists v_2)_{v_2 \leq z} \\ ((1 = y \vee 1v_1 = y) \& (x2 = z \vee x2v_2 = z) \vee (2 = y \vee 2v_1 = y) \& (x1 = z \vee x1v_2 = z)).$$

Наконец, в случае 3с формула имеет вид

$$(\exists v_1)_{v_1 \leq y} (\exists v_2)_{v_2 \leq y} (\exists v_3)_{v_3 \leq z} ((v_1 1 = y \vee v_1 1v_2 = y) \& (xv_1 2 = z \vee xv_1 2v_3 = z) \\ \vee (v_1 2 = y \vee v_1 2v_2 = y) \& (xv_1 1 = z \vee xv_1 1v_3 = z)).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Любой рудиментарный $\exists$ -предикат можно вычислить подходящим детерминированным полиномиальным алгоритмом.

Доказательство. Пусть рудиментарный $\exists$ -предикат

$$\sigma(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n)$$

представим в форме (1), где $Q_1 = \dots = Q_n = \exists$ и предикат ρ получается из предикатов равенства и конкатенации с помощью операций логики высказываний и явных преобразований. Будем предполагать, что в качестве операций логики высказываний выбраны операции $\&$, $\vee$, $\neg$. Согласно доказанной лемме операцию $\neg$ из этого перечня можно исключить. После приведения предиката ρ к дизъюнктивной нормальной форме получим, что

$$\sigma(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) \equiv (\exists y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \leq z_n} (K_1 \vee \dots \vee K_p), \quad (4)$$

где $K_1, \dots, K_p$ — конъюнкции предикатов типа

$$u = v, \quad uv = w, \quad u = a, \quad ua = w, \quad au = w, \quad uv = a, \quad ua = b, \quad au = b, \quad (5)$$

u, v, w — переменные из множества $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$, a, b — константы. Согласно известным логическим правилам, правая часть формулы (4) эквивалентна формуле

$$(\exists y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \leq z_n} K_1 \vee \dots \vee (\exists y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \leq z_n} K_p.$$

Следовательно, при оценке сложности вычисления предиката σ можно ограничиться рассмотрением лишь предикатов вида

$$(\exists y_1)_{y_1 \leq z_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \leq z_n} K, \quad (6)$$

где конъюнкция K подчиняется сформулированным выше условиям для конъюнкций $K_1, \dots, K_p$.

Пусть $l_1 = |z_1|, \dots, l_n = |z_n|$, где $|z_i|$ — длина слова z_i . Область изменения каждой переменной y_i в формуле (6) разобьем на l_i попарно не пересекающихся областей

$$|y_i| = 1, \dots, |y_i| = l_i - 1, (|y_i| = l_i, y_i \leq z_i). \quad (7)$$

Соответственно этому разбиению каждый квантор $(\exists y_i)_{y_i \leq z_i}$ в формуле (6) заменим на l_i ограниченных кванторов

$$(\exists y_i)_{|y_i|=1}, \dots, (\exists y_i)_{|y_i|=l_i-1}, (\exists y_i)_{|y_i|=l_i, y_i \leq z_i}.$$

В результате формулу (6) можно эквивалентным образом представить в виде дизъюнкции $l_1 \dots l_n$ формул, каждая из которых имеет вид

$$(\exists y_1)_{y_1 \in D_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \in D_n} K, \quad (8)$$

где для любого $i, 1 \leq i \leq n$, множество D_i определяется одним из условий (7). Величина $l_1 \dots l_n$, очевидно, ограничена сверху полиномом степени n от $l_1 + \dots + l_n$, то есть от длины записи аргументов $z_1, \dots, z_n$. Поэтому в дальнейшем будем оценивать лишь сложность вычисления предикатов (8).

Рассмотрим множество D_i , когда $|y_i| = l_i, y_i \leq z_i$ и $z_i \neq 2^2 \dots 2$. Пусть $y_1^i, \dots, y_{l_i}^i$ — разряды диадического представления y_i , $z_1^i, \dots, z_{l_i}^i$ — аналогичные разряды представления z_i . Если величина z_i фиксирована, $r_1, \dots, r_s$ — номера всех разрядов слова $z_1^i \dots z_{l_i}^i$, равных 2, и $r_1 < \dots < r_s$, то множество D_i разбиваем на $s + 1$ попарно не пересекающихся подмножеств:

$$\begin{aligned} D_i^1 &= \{y_i: y_i \in D_i, y_{r_1}^i = 1, y_{r_1+1}^i = z_{r_1+1}^i, \dots, y_{l_i}^i = z_{l_i}^i\}, \\ &\dots \\ D_i^s &= \{y_i: y_i \in D_i, y_{r_s}^i = 1, y_{r_s+1}^i = z_{r_s+1}^i, \dots, y_{l_i}^i = z_{l_i}^i\}, \\ D_i^{s+1} &= \{z_i\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим одну особенность строения множеств $D_i^1, \dots, D_i^s$, которая легко усматривается из определения. Двоичные разряды $y_1^i, \dots, y_{l_i}^i$ чисел y_i , составляющих множество $D_i^t, 1 \leq t \leq s$, делятся на две группы: в первой группе (разряды $y_{r_t}^i, y_{r_t+1}^i, \dots, y_{l_i}^i$) они фиксированы (и, за исключением разряда $y_{r_t}^i$, совпадают с соответствующими разрядами числа z_i), во второй группе (разряды $y_1^i, \dots, y_{r_t-1}^i$) произвольны. Множество D_i^{s+1} состоит из одного числа z_i , поэтому при $y_i \in D_i^{s+1}$ все двоичные разряды числа y_i фиксированы.

Если величина z_i фиксирована, а в формулу (8) входит квантор $(\exists y_i)_{y_i \in D_i}$, где множество D_i определяется последней из формул (7), то этот квантор можно заменить последовательностью из $s + 1$ ограниченных кванторов

$$(\exists y_i)_{y_i \in D_i^1}, \dots, (\exists y_i)_{y_i \in D_i^{s+1}}.$$

Таким образом, при фиксированных значениях аргументов $z_1, \dots, z_n$ формула (8) эквивалентна дизъюнкции не более $l_1 \dots l_n$ формул вида

$$(\exists y_1)_{y_1 \in E_1} \dots (\exists y_n)_{y_n \in E_n} K, \quad (10)$$

где для любого $i, 1 \leq i \leq n$, множество E_i совпадает либо с одним из первых $l_i - 1$ множеств ряда (7), либо с одним из множеств (9). Поэтому при вычислении предиката σ можно ограничиться рассмотрением лишь формул вида (10).

Пусть $x_{k_i}^i \dots x_1^i$ — диадическое представление $x_i, 1 \leq i \leq m$. Предположим, что значения всех аргументов $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ фиксированы,

$$x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m, \quad z_1 = b_1, \dots, z_n = b_n.$$

Покажем, как проверить истинность предиката (10).

Заменим в конъюнкции K каждый из входящих в нее предикатов (5) его аналогом, полученным из указанных представлений аргументов $y_1, \dots, y_n$ и констант $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$. Например, предикаты $x_1 y_1 = y_2$ и $x_1 x_2 = y_1$ следует заменить соответственно предикатами

$$a_{k_1}^1 \dots a_1^1 y_k^1 \dots y_1^1 = y_l^2 \dots y_1^2, \quad a_{k_1}^1 \dots a_1^1 a_{k_2}^2 \dots a_1^2 = y_k^1 \dots y_1^1, \quad (11)$$

где k, l — размерности множеств E_1, E_2 . Заметим, что $y_k^1, \dots, y_1^1$ и $y_l^2, \dots, y_1^2$ могут быть как двоичными переменными, так и двоичными константами, определяемыми константами b_1 и b_2 . Если, например, $k < l_1$, то $y_k^1, \dots, y_1^1$ суть двоичные переменные. В противном случае для некоторого r , $r < l_1$, $y_r^1, \dots, y_1^1$ являются двоичными переменными, $y_r^1 = 1$ и $y_l^1, \dots, y_{r+1}^1$ совпадают соответственно с $b_{l_1}^1, \dots, b_{r+1}^1$.

В результате этой замены могут образоваться противоречивые равенства. Например, в формулах (11) могут либо не выполняться равенства $k_1 + k = l$ или $k_1 + k_2 = k$, либо некоторая двоичная константа из левой части одного из равенств (11) может не совпадать с стоящей на соответствующей позиции двоичной константой из правой части равенства. В этом случае, разумеется, формула (10) при заданных значениях $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ будет ложной.

Предполагая, что равенства типа (11) не содержат противоречий, заменим каждое из них эквивалентной системой равенств вида

$$y_j^i = y_q^t, \quad y_j^i = c, \quad (12)$$

где c — двоичная константа. Образует транзитивное замыкание W совокупности всех равенств (12), построенных для всех подформул (5) конъюнкции K . Это множество W может также оказаться противоречивым, содержа одновременно равенства вида $y_j^i = c, y_j^i = d$, где $c \neq d$. Тогда будет ложным и предикат (10). В противном случае множество W разбивается на непротиворечивые классы эквивалентности, каждый из которых имеет вид

$$v_1 = \dots = v_q \quad \text{или} \quad v_1 = \dots = v_q = c, \quad (13)$$

где $v_1, \dots, v_q$ — двоичные y -переменные, c — двоичная константа (истинные равенства вида $c = c$ опускаем). В этом случае истинность предиката (10) эквивалентна существованию значений двоичных y -переменных, удовлетворяющих равенствам (13). Поскольку каждая из формул

$$(\exists v_1) \dots (\exists v_q)(v_1 = \dots = v_q), \quad (\exists v_1) \dots (\exists v_q)(v_1 = \dots = v_q = c)$$

истинна, истинным будет и значение предиката (10). Теорема доказана.

Следствие 1. *Любой рудиментарный $\forall$ -предикат можно вычислить подходящим детерминированным полиномиальным алгоритмом.*

Достаточно заметить, что отрицание рудиментарного $\forall$ -предиката является рудиментарным $\exists$ -предикатом.

3. Иерархия рудиментарных предикатов

Как установлено в [5], при определении рудиментарных предикатов соотношения вида $y \leq z$, фигурирующие в ограниченных кванторах, можно заменить более общими соотношениями вида $y \leq T$, где T — произвольный словарный терм, составленный из слов в алфавите $\{1, 2\}$ и символов переменных. В связи с этим элементарными рудиментарными предикатами естественно считать все предикаты вида $T = V$, где T, V — произвольные словарные термы. Класс всех рудиментарных предикатов, полученных из этих элементарных предикатов с помощью операций логики высказываний, обозначим через $R\Sigma_0$. Положим $R\Pi_0 = R\Sigma_0$. Для любого $k, k \geq 0$, определим $R\Sigma_{k+1}$ (соответственно $R\Pi_{k+1}$) как класс всех рудиментарных предикатов, представимых в форме

$$(Qy_1)_{y_1 \leq T_1} \dots (Qy_n)_{y_n \leq T_n} \rho(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

где $Q = \exists$ (соответственно $Q = \forall$), $T_1, \dots, T_n$ — словарные термы и ρ — предикат из класса $R\Pi_k$ (соответственно $R\Sigma_k$). Положим

$$R\Delta_k = R\Sigma_k \cap R\Pi_k.$$

Как и для арифметической иерархии Клини (см. также словарную иерархию в [8]), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R\Sigma_0 \subseteq R\Sigma_1 \subseteq R\Sigma_2 \subseteq \dots, \quad R\Pi_0 \subseteq R\Pi_1 \subseteq R\Pi_2 \subseteq \dots, \\ R\Sigma_k \cup R\Pi_k \subseteq R\Delta_{k+1}, \quad \rho \in R\Sigma_k \iff \neg \rho \in R\Pi_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если предикаты ρ, σ принадлежат классу $R\Sigma_k$ (соответственно $R\Pi_k$), то этому же классу принадлежат предикаты $\rho \& \sigma$ и $\rho \vee \sigma$.

Используя технику работы [5] или технику доказательства леммы из предыдущего раздела, можно показать, что класс рудиментарных $\exists$ -предикатов совпадает с классом $R\Sigma_1$, а класс рудиментарных $\forall$ -предикатов — с классом $R\Pi_1$.

Если $a \in \{1, 2\}$, то пусть $\alpha_a(x)$ обозначает предикат «слово x состоит только из символов a ». Очевидно, что

$$\alpha_a(x) \equiv (ax = xa).$$

Поэтому $\alpha_a \in R\Sigma_0$ и $\alpha_a \in R\Pi_0$.

Определим ряд предикатов, каждый из которых принадлежит классу $R\Delta_1$. Справедливы соотношения

$$(x \leq y) \equiv (\exists z)_{z \leq y} (x = z), \quad (x < y) \equiv (x \leq y) \& (x \neq y).$$

Следовательно, предикаты $x \leq y$, $x < y$ входят в класс $R\Sigma_1$. Формулы

$$(x < y) \equiv (\forall z)_{z \leq x} (y \neq z), \quad (x \leq y) \equiv (x < y) \vee (x = y)$$

показывают, что предикаты $x \leq y$, $x < y$ входят также в класс $R\Pi_1$.

Пусть $|x|$ есть длина диадического представления x . Следующие две эквивалентности устанавливают принадлежность предиката $|x| = |y|$ классу $R\Delta_1$:

$$\begin{aligned} (|x| = |y|) &\equiv (\exists z)_{z \leq x} (\alpha_1(z) \& (z \leq y) \& (x < 1z) \& (y < 1z)), \\ (|x| = |y|) &\equiv (\forall u)_{u \leq x} (\forall v)_{v \leq y} ((\alpha_1(u) \& \alpha_1(v) \& (x < 1u) \& (y < 1v) \Rightarrow (u = v))). \end{aligned}$$

На базе предиката $|x| = |y|$ доказываем вхождение предикатов $|x| < |y|$ и $|x| \leq |y|$ сначала в класс $R\Sigma_1$,

$$(|x| \leq |y|) \equiv (\exists z)_{z \leq y} (|x| = |z|), \quad (|x| < |y|) \equiv (|x| \leq |y|) \& (|x| \neq |y|),$$

затем в класс $R\Pi_1$,

$$(|x| < |y|) \equiv (\forall z)_{z \leq x} (|y| \neq |z|), \quad (|x| \leq |y|) \equiv (|x| < |y|) \vee (|x| = |y|).$$

С использованием введенных предикатов можно доказать принадлежность классу $R\Delta_1$ предикатов вида

$$\begin{aligned} |y| &= k_1|x_1| + \dots + k_n|x_n| + l, \\ |y| &< k_1|x_1| + \dots + k_n|x_n| + l, \\ |y| &> k_1|x_1| + \dots + k_n|x_n| + l, \end{aligned}$$

где $k_1, \dots, k_n$ — натуральные числа, а l — целое неотрицательное число. Так, например, для класса $R\Sigma_1$

$$\begin{aligned} (|y| = k_1|x_1| + \dots + k_n|x_n| + l) &\equiv (\exists z)_{z \leq y} (\exists v_1)_{v_1 \leq x_1} \dots (\exists v_n)_{v_n \leq x_n} \\ &\quad (\alpha_1(z) \& \alpha_1(v_1) \& \dots \& \alpha_1(v_n) \\ &\quad \& (|y| = |z|) \& (|x_1| = |v_1|) \& \dots \& (|x_n| = |v_n|) \\ &\quad \& (z = v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} 1^l)), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (|y| < k_1|x_1| + \dots + k_n|x_n| + l) &\equiv (\exists z)_{z \leq y} (\exists v_1)_{v_1 \leq x_1} \dots (\exists v_n)_{v_n \leq x_n} (\exists t)_{t \leq T} \\ &\quad (\alpha_1(z) \& \alpha_1(v_1) \& \dots \& \alpha_1(v_n) \& \alpha_1(t) \\ &\quad \& (|y| = |z|) \& (|x_1| = |v_1|) \& \dots \& (|x_n| = |v_n|) \\ &\quad \& (zt = v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} 1^l)), \end{aligned} \quad (15)$$

где T — терм $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} 1^l$, x^k есть обозначение для конкатенации k слов x и 1^l при $l = 0$ есть пустое слово. При переходе в класс $R\Pi_1$ следует учесть, что

$$\begin{aligned} \neg(\exists z_1)_{z_1 \leq T_1} \dots (\exists z_n)_{z_n \leq T_n} \rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) \\ \equiv (\forall z_1)_{z_1 \leq T_1} \dots (\forall z_n)_{z_n \leq T_n} \neg \rho(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

и что предикаты, входящие в правые части эквивалентностей (14) и (15), принадлежат, в частности, классу $R\Sigma_1$.

Пусть $B(x, y), E(x, y), P(x, y)$ — обозначения соответственно предикатов «слово x является собственным началом слова y », «слово x является собственным концом слова y », «слово x входит в слово y » (в последнем случае предполагается, что слово x не является ни началом, ни концом слова y). Легко показать (см., например, главу 4 в [2]), что все три предиката B, E, P принадлежат классу $R\Sigma_1$. Установим, что они входят также и в класс $R\Pi_1$. Например,

$$B(x, y) \equiv (|x| < |y|) \& (\forall u)_{u \leq y} (\forall v)_{v \leq y} ((uv = y) \& (|u| = |x|) \Rightarrow (u = x)).$$

Аналогичные формулы справедливы для предикатов $E(x, y)$ и $P(x, y)$.

Для любых $n, n \geq 2$, и $k, 0 \leq k < n$, обозначим через $D_{n,k}(x)$ предикат «остаток от деления $|x|$ на n равен k ». Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} D_{n,k}(x) &\equiv (|x| = k) \vee (\exists y)_{y \leq x} (|x| = n|y| + k), \\ D_{n,k}(x) &\equiv \left(\bigwedge_{0 < j < n, j \neq k} (|x| \neq j) \right) \& (\forall y)_{y \leq x} \\ &\quad \left(\bigwedge_{0 \leq j < n, j \neq k} (|x| \neq n|y| + j) \right), \end{aligned}$$

где под $|x| = k$ понимается предикат $|x| = |1^k|$ (при $k = 0$ этот предикат следует опустить). Таким образом, $D_{n,k} \in R\Delta_1$.

Приведенные выше предикаты позволяют доказать принадлежность классам $R\Sigma_1$ и $R\Pi_1$ еще целого ряда содержательно интересных предикатов. Мы не располагаем каким-либо внешним описанием классов $R\Sigma_1$ и $R\Pi_1$. Однако теорема 4 показывает, что подобное описание класса $R\Pi_1$ не может быть слишком простым.

В теореме 4 предполагается, что фиксирована некоторая естественная (геделевская) нумерация предикатов класса $R\Pi_1$. Точнее говоря, нумеруются формулы, задающие предикаты класса $R\Pi_1$. Имея в виду такую нумерацию, можно говорить об алгоритмических проблемах для класса $R\Pi_1$. В частности, будет рассмотрена проблема непустоты: по номеру предиката из класса $R\Pi_1$ определить, является ли данный предикат непустым (не тождественно ложным).

Теорема 4. *Проблема непустоты для класса $R\Pi_1$ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Разработанная выше техника оперирования в классе $R\Pi_1$ дает возможность практически для любого типа абстрактных вычислительных машин эффективно по машине $\mathcal{M}$ определять в классе $R\Pi_1$ предикат $\text{Com}_{\mathcal{M}}(x)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x представляет собой подходящим образом организованную запись вычисления на машине $\mathcal{M}$. Выбрав достаточно мощный класс вычислительных устройств с неразрешимой проблемой непустоты области определения, мы получим неразрешимость проблемы непустоты для класса $R\Pi_1$.

Так же, как в [9], в качестве базового типа вычислительных устройств используем операторные алгоритмы специального вида. Именно, как известно (см. главу 6 в [7]), проблема непустоты области определения алгоритмически неразрешима для операторных алгоритмов, которые содержат лишь команды следующего вида: $[\times 2; i]$ (умножить на 2 и перейти к выполнению команды с номером i), $[\times 3; i]$ (аналогично предыдущей команде), $[: 6; i, j]$ (если рассматриваемое число кратно 6, то разделить его на 6 и перейти к выполнению команды с номером i , в противном случае оставить рассматриваемое число без изменения и перейти к выполнению команды с номером j), $[\text{stop}]$.

Пусть операторный алгоритм $\mathcal{A}$ указанного типа содержит m команд, которые занумерованы числами от 1 до m , причем начальная команда имеет номер 1, а единственная команда $[\text{stop}]$ — номер m . Процесс применения алгоритма $\mathcal{A}$ к числу x состоит в том, что на первом шаге работы алгоритма к числу x применяется команда с номером 1. При этом получается число x_1 и, кроме того, определяется номер i_1 команды, которая будет выполняться на втором шаге. Затем этот процесс повторяется: к числу x_1 применяется команда с номером i_1 и т. д. Процесс применения алгоритма $\mathcal{A}$ к числу x заканчивается при выполнении команды $[\text{stop}]$.

Легко видеть, что при $x \neq 0$ в процессе применения алгоритма $\mathcal{A}$ к числу x не может возникнуть число 0. Поэтому в целях упрощения дальнейшего изложения

мы будем рассматривать применение операторных алгоритмов лишь к натуральным числам. Это ограничение, разумеется, не влияет на неразрешимость проблемы непустоты области определения для указанных операторных алгоритмов.

Итак, для операторного алгоритма $\mathcal{A}$ значение $\mathcal{A}(x)$ определено в том и только том случае, когда существует конечная последовательность пар чисел

$$(x_0, i_0), (x_1, i_1), \dots, (x_t, i_t) \quad (16)$$

такая, что $x_0 = x$, $i_0 = 1$, $i_t = m$, и для всякого $s, 1 \leq s \leq t$, x_s есть результат применения команды с номером i_{s-1} к числу x_{s-1} , а i_s есть номер команды, который описанным выше способом определяется через x_{s-1} и i_{s-1} . Последовательности (16) сопоставим слово в алфавите $\{1, 2\}$

$$1^{x_0} 2^{i_0} 1^{x_1} 2^{i_1} \dots 1^{x_t} 2^{i_t}. \quad (17)$$

Эффективно по $\mathcal{A}$ построим формулу $\Phi(u)$, определяющую предикат $\text{Com}_{\mathcal{A}}(u)$ из класса РП_1 , который выполняется только для слов вида (17). Формула $\Phi(u)$ будет представлять собой конъюнкцию формул, приводимых ниже в пп. 1–5. Для большего понимания структуры формулы Φ каждая из формул пп. 1–5 снабжена кратким комментарием.

Будем говорить, что слово v является правильным началом слова w , если слово v есть собственное начало слова w , то есть $w = vz$ для некоторого слова z , и первая буква слова z отлична от последней буквы слова v . Аналогичным образом определяем понятия «слово v является правильным концом слова w » и «слово v правильно входит в слово w ».

- (1) Собственным началом слова u является 1, а правильным концом — слово 2^m :

$$B(1, u) \ \& \ E(12^m, u).$$

- (2) Правильным началом слова u является слово вида $1^x 2$ (это свойство обеспечивается конъюнкцией предиката п. 1 и нижеследующего предиката):

$$(\forall v)_{v \leq u} ((\alpha_1(v) \ \& \ B(v2, u)) \Rightarrow B(v21, u)).$$

В пп. 3–5 рассматриваются только центральные вхождения слов $w2^i yz$, в граничных случаях по крайней мере одна из переменных v_1, v_2 будет отсутствовать. Мы эти случаи отдельно не рассматриваем.

- (3) Пусть i — номер команды $[\times 2; j]$. Следующая формула утверждает, что за каждым правильным вхождением слова вида $1^x 2^i$ в слово u следует правильное вхождение слова $1^{2x} 2^j$:

$$(\forall v_1)_{v_1 \leq u} (\forall v_2)_{v_2 \leq u} (\forall w)_{w \leq u} (\forall y)_{y \leq u} (\forall z)_{z \leq u} ((u = v_1 w 2^i y z v_2) \ \& \ \alpha_1(w) \ \& \ \alpha_1(y) \ \& \ \alpha_2(z) \ \& \ E(2, v_1) \ \& \ B(1, v_2)) \Rightarrow (y = w^2) \ \& \ (z = 2^j)).$$

Для каждой команды $[\times 2; j]$ в формулу Φ конъюнктивно входит формула этого пункта.

- (4) Пусть i — номер команды $[\times 3; j]$. Нижеследующая формула аналогична формуле из п. 3:

$$(\forall v_1)_{v_1 \leq u} (\forall v_2)_{v_2 \leq u} (\forall w)_{w \leq u} (\forall y)_{y \leq u} (\forall z)_{z \leq u} \\ ((u = v_1 w 2^i y z v_2) \& \alpha_1(w) \& \alpha_1(y) \& \alpha_2(z) \& E(2, v_1) \& B(1, v_2)) \Rightarrow (y = w^3) \& (z = 2^j)).$$

- (5) Пусть i — номер команды $[: 6; j, k]$. По аналогии с пп. 3, 4 формула этого пункта соответствует команде $[: 6; j, k]$:

$$(\forall v_1)_{v_1 \leq u} (\forall v_2)_{v_2 \leq u} (\forall w)_{w \leq u} (\forall y)_{y \leq u} (\forall z)_{z \leq u} \\ ((u = v_1 w 2^i y z v_2) \& \alpha_1(w) \& \alpha_1(y) \& \alpha_2(z) \& E(2, v_1) \& B(1, v_2)) \\ \Rightarrow (D_{6,0}(w) \Rightarrow (w = y^6) \& (z = 2^j)) \\ \& \left(\bigvee_{1 \leq l \leq 5} D_{6,l}(w) \Rightarrow (w = y) \& (z = 2^k) \right).$$

Теорема доказана.

В заключение продемонстрируем некоторые возможности класса $R\Sigma_2$ и установим принадлежность классу $R\Sigma_2$ предиката $y = |x|$ логарифмического типа (ср. с леммой 4 из [4]).

Пусть $a_n a_{n-1} \dots a_1$ — диадическое представление числа y . Чтобы проверить выполнение равенства $y = |x|$, достаточно образовать последовательность пар вида

$$(a_n, 1^{a_n}), (a_n a_{n-1}, 1^{a_n a_{n-1}}), \dots, (a_n a_{n-1} \dots a_1, 1^{a_n a_{n-1} \dots a_1}) \quad (18)$$

и проверить, что $|x| = |1^{a_n a_{n-1} \dots a_1}|$. Переход от пары к паре в последовательности (18) подчиняется довольно простому правилу, которое ниже формализуется средствами класса $R\Sigma_2$. Так же, как в теореме 4, мы хотим перейти от последовательности (18) к слову u , кодирующему эту последовательность. В данном случае слово u будет иметь вид

$$2a_n 21^{n1^{a_n}} \bullet 2a_n a_{n-1} 21^{n1^{a_n a_{n-1}}} \bullet \dots \bullet 2a_n \dots a_2 21^{n1^{a_n \dots a_2}} \bullet 2a_n \dots a_1 21^{n1^{a_n \dots a_1}},$$

где точками $\bullet$ отделены подслова слова u , отвечающие парам последовательности (18). Нетрудно убедиться, что при условии $|x| = a_n \dots a_1$ для длины слова u имеет место оценка

$$|u| \leq 2|x| + c(\log_2 |x|)^2 + d,$$

где c, d — некоторые константы. Следовательно, если выбрать достаточно большое x_0 , то при $x > x_0$ будет справедливо неравенство $u \leq x^3$. Обозначим через $\lambda(u, y)$ предикат «слово u имеет вид (19)». Тогда при $x > x_0$ справедлива эквивалентность

$$(y = |x|) \equiv (\exists u)_{u \leq x^3} (\lambda(u, y) \& \varphi(u, x, y)), \quad (19)$$

где предикат $\varphi(u, x, y)$, используя слово u , проверяет равенство $y = |x|$. Из формулы (19) видно, что предикат φ можно выразить следующим образом:

$$\varphi(u, x, y) \equiv (\exists z)_{z \leq u} (\exists w)_{w \leq u} (\alpha_1(w) \& (u = z 2w) \& (|w| = |x| + |y|)).$$

Приведенная эквивалентность показывает, что $\varphi \in R\Sigma_1$. Поскольку при $x \leq x_0$ значения функции $y = |x|$ можно задать табличным способом, на основании формулы (20) заключаем, что предикат $y = |x|$ будет принадлежать классу $R\Sigma_2$, если этому классу принадлежит предикат λ . Поэтому наши дальнейшие усилия будут направлены на доказательство включения $\lambda \in R\Sigma_2$.

Предикат $\lambda(u, y)$ будет определяться формулой, представляющей собой конъюнкцию формул, содержащихся в пп. 1–6. Каждый из предикатов, задаваемых этими формулами, предваряется кратким содержательным описанием. Напомним еще раз, что предикат $\lambda(u, y)$ рассматривается при достаточно больших x и, следовательно, при достаточно больших y . В частности, можно считать, что $y > 2$.

- (1) Слово вида $2a21^n1^a2$, где $n = |y|$ и a — первый символ диадического представления числа y , является собственным началом слова u :

$$(\exists v)_{v \leq u} (\alpha_1(v) \& (|v| = |y|) \& (B(1, y) \Rightarrow B(212v12, u)) \& (B(2, y) \Rightarrow B(222v112, u))).$$

- (2) Собственным концом слова u является слово вида 1^k2y21^m , где $k, m > |y|$:

$$(\exists v)_{v \leq u} (\exists w)_{w \leq u} (\alpha_1(v) \& \alpha_1(w) \& (|v| > |y|) \& (|w| > |y|) \& E(v2y2w, u)).$$

- (3) Если в слово u входит слово $1^{n+1}2w21^{n+1}$ и слово w не содержит подслова 1^{n+1} , то $|w| \leq |y|$:

$$(\forall w)_{w \leq u} (\forall z)_{z \leq u} ((\alpha_1(z) \& (|z| = |y| + 1) \& P(z2w2z, u) \& (z \neq w) \& \neg B(z, w) \& \neg P(z, w) \& \neg E(z, w)) \Rightarrow (|w| \leq |y|)).$$

- (4) Если слово $1^{n+1}2w21^{n+1}$ входит в слово u и $|w| \leq |y|$, то либо $w = y$, либо w есть собственное начало слова y :

$$(\forall w)_{w \leq u} (\forall z)_{z \leq u} ((\alpha_1(z) \& (|z| = |y| + 1) \& P(z2w2z, u) \& (|w| \leq |y|)) \Rightarrow (w = y) \vee B(w, y)).$$

- (5) Если в слово u входит слово вида $1^{n+1}2w_121^m2w_221^{n+1}$, где $|w_1| \leq |y|$, $|w_2| \leq |y|$, $m > |y|$, то $|w_2| = |w_1| + 1$:

$$\begin{aligned} & (\forall w_1)_{w_1 \leq u} (\forall w_2)_{w_2 \leq u} (\forall z_1)_{z_1 \leq u} (\forall z_2)_{z_2 \leq u} \\ & ((\alpha_1(z_1) \& \alpha_1(z_2) \& (|z_1| = |y| + 1) \& (|z_2| > |y|) \& (|w_1| \leq |y|) \& (|w_2| \leq |y|) \\ & \& P(z_12w_12z_22w_22z_1, u)) \Rightarrow (|w_2| = |w_1| + 1)). \end{aligned}$$

- (6) Если в слово u входит слово вида $1^{n+1}2w21^{m_1}2wa21^{m_2}2$, либо слово u оканчивается на слово вида $1^{n+1}2w21^{m_1}2wa21^{m_2}$, где $m_1 > |y|$, $m_2 > |y|$, $|w| < |y|$ и $a \in \{1, 2\}$, то $m_2 = 2m_1 + a$:

$$\begin{aligned} & (\forall w)_{w \leq u} (\forall z_1)_{z_1 \leq u} (\forall z_2)_{z_2 \leq u} (\forall z_3)_{z_3 \leq u} ((\alpha_1(z_1) \& \alpha_1(z_2) \& \alpha_1(z_3) \& (|z_1| = |y| + 1) \& (|z_2| > |y|) \& (|z_3| > |y|) \& (|w| < |y|) \\ & \Rightarrow (P(z_12w2z_22w12z_32, u) \vee E(z_12w2z_22w12z_3, u) \Rightarrow (z_3 = z_2^21)) \\ & \& ((P(z_12w2z_22w22z_32, u) \vee E(z_12w2z_22w22z_3, u) \Rightarrow (z_3 = z_2^211))). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Кузнецов А. В., К теореме о канонической форме для ординально-рекурсивных функций. В кн.: Гудстейн Р. Л., *Математическая логика*. ИЛ, Москва, 1961, с. 149–154.
2. Смальян Р., *Теория формальных систем*. Наука, Москва, 1981.
3. Непомнящий В. А., Рудиментарные предикаты и тьюринговы вычисления. *Докл. АН СССР* (1970) **195**, №2, 282–284.
4. Непомнящий В. А., Рудиментарная интерпретация двуленточных тьюринговых вычислений. *Кибернетика* (1970) №2, 29–35.
5. Непомнящий В. А., Рудиментарное моделирование недетерминированных тьюринговых вычислений. *Кибернетика* (1973) №2, 23–29.
6. Chandra A. K., Dexter C. K., Stockmeyer L. J., Alternation. *J. ACM* (1981) **28**, №1, 114–133.
7. Мальцев А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
8. Марченко С. С., О представлении словарных предикатов из арифметической иерархии. *Дискретная математика* (1990) **2**, №1, 87–93.
9. Марченко С. С., Неразрешимость позитивной $\forall\exists$ -теории свободной полугруппы. *Сибирский матем. журнал* (1982) **23**, №1, 196–198.

Статья поступила 30.03.2000.