Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Времена пребывания в конечном множестве состояний марковских ветвящихся процессов и вероятности вырождения одной модификации процесса Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 39–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 07:25:43

УДК 519.2

Времена пребывания в конечном множестве состояний марковских ветвящихся процессов и вероятности вырождения одной модификации процесса Гальтона–Ватсона

© 2000 г. Б. А. Севастьянов

В многотипном ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона $\mathcal{B}$ выделено конечное множество состояний S . Известно, что во всех нетривиальных ветвящихся процессах число частиц $\mu(t)$ в момент t при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью единица стремится к нулю или бесконечности. Обозначим ν_i — число моментов дискретного времени t , в которых $\mu(t)$ равно i -му состоянию из множества S . В первом параграфе показано, что производящая функция многомерного распределения $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ рациональна. Во втором параграфе для вырождающегося марковского ветвящегося процесса с одним типом частиц $\mathcal{B}_c$ найдено преобразование Лапласа времен пребывания $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ в состояниях множества $S = \{1, 2, \dots, r\}$. В третьем параграфе дан способ вычисления вероятностей вырождения некоторой модификации $\mathcal{B}^*$ ветвящегося процесса $\mathcal{B}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99-0100012, 00-15-96136, и INTAS-RFBR, проект 99-01317.

1. Дискретное время

Обозначим $\mathcal{B}$ многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t)),$$

где $\mu_i(t)$ — число частиц типа T_i в момент времени t , $t = 0, 1, 2, \dots$. Эволюция процесса $\mu(t)$ определяется многомерной производящей функцией

$$h(s) = (h_1(s), h_2(s), \dots, h_m(s)),$$

где $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$,

$$h_i(s) = \sum_{k \in N_0^m} p_{e(i)k} s^k, \quad N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad s^k = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_m^{k_m},$$

$$p_{e(i)k} = \mathbf{P} \mu(1) = k \mid \mu(0) = e(i), \quad e(i) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im}),$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Переходные вероятности (см. [2])

$$p_{nk}(t) = \mathbf{P}\{\mu(t) = k \mid \mu(0) = n\}, \quad n, k \in N_0^m,$$

удовлетворяют условию марковости

$$p_{nk}(t_1 + t_2) = \sum_{v \in N_0^m} p_{nv}(t_1) p_{vk}(t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0,$$

и определяются как коэффициенты разложения

$$h^n(t, s) = \sum_{k \in N_0^m} p_{nk}(t) s^k,$$

где $h^n = h_1^{n_1} h_2^{n_2} \dots h_m^{n_m}$ и $h(t, s)$ — t -я итерация функции $h(s)$:

$$\begin{aligned} h(1, s) &= h(s), \\ h(t, s) &= h(t-1, h(s)), \quad t = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Пусть $S = \{\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(r)\}$ — конечное подмножество множества N_0^m , $\alpha(i) = (\alpha_1(i), \alpha_2(i), \dots, \alpha_m(i))$ и все $\alpha(i)$ отличны от нулевого вектора. Введем обозначение

$$\tilde{p}_{nk}(S, t) = \mathbf{P}\{\mu(t) = k, \mu(u) \notin S, 0 < u < t \mid \mu(0) = n\}.$$

Тогда сумма

$$\tilde{p}_{nk}(S) = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_{nk}(S, t)$$

есть вероятность того, что при $\mu(0) = n$ процесс $\mathcal{B}$ попадает в состояние $k \in N_0^m$, не заходя ни разу в промежуточные моменты времени в множество S . Другое выражение вероятности $\tilde{p}_{nk}(S)$ приведено в [3].

Далее будем придерживаться следующих обозначений:

$$\begin{aligned} a_{nj}(S) &= \tilde{p}_{n\alpha(j)}(S), \quad n \in N_0^m, \quad j = 1, \dots, r, \\ a_{ij}(S) &= \tilde{p}_{\alpha(i)\alpha(j)}(S), \quad i, j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Введем случайные величины

$$\nu_i = \sum_{i=1}^{\infty} I\{\mu(t) = \alpha(i)\}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1)$$

где $I(B)$ — индикатор события B . Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, $x = (x_1, \dots, x_r)$ и

$$\varphi_n(x) = \mathbf{M}\{x^\nu \mid \mu(0) = n\}, \quad x^\nu = x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r}, \quad n \in N_0^m,$$

— производящая функция многомерного распределения $\nu_1, \dots, \nu_r$.

Пусть

$$b_i(S) = 1 - \sum_{j=1}^r a_{ij}(S).$$

Введем $r \times r$ матрицу

$$A(x, S) = \|a_{ij}(S)x_j\|_{i,j=1,\dots,r},$$

векторы-строки

$$a_n(x, S) = (a_{n1}(S)x_1, \dots, a_{nr}(S)x_r), \quad b(S) = (b_1(S), \dots, b_r(S))$$

и пусть $b'(S)$ — соответствующий вектор-столбец.

Теорема 1. Пусть процесс $\mathcal{B}$ неразложим и не содержит финальных классов. Тогда производящая функция $\varphi_n(x_1, \dots, x_r)$, где $n \in N_0^m$, определяется формулой

$$\varphi_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^r a_{ni}(S) + a_n(x, S)(I - A(x, S))^{-1}b'(S), \quad (2)$$

где I — диагональная матрица.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_r = 0 \mid \mu(0) = n\} = 1 - \sum_{i=1}^r a_{ni}(S). \quad (3)$$

Если траектория $\mu(t)$, $t = 1, 2, \dots$, заходит в множество S , то она с вероятностью 1 находится там в конечном числе моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l$. Состояния $\mu(t_k)$, $k = 1, \dots, l$, представляют собой цепь Маркова с переходной матрицей $A(1, S)$. Если $\mu(t_l) = \alpha(j)$, то с вероятностью $\beta_j(S)$ при $t > t_l$ все состояния $\mu(t) \notin S$. Формулу (1) можно записать в виде

$$\nu_i = \sum_{k=1}^{\infty} I\{\mu(t_k) = \alpha(i)\}.$$

Каждая траектория $\mu(t)$, выходящая из состояния $\mu(0) = n$, либо с вероятностью $1 - \sum_{i=1}^r a_{ni}(S)$ ни разу не попадет в S , либо в момент t_1 с вероятностью $a_{ni}(S)$ попадет в состояние $\alpha(i)$, а затем в момент t_l из состояния $\alpha(j)$ с вероятностью $b_j(S)$ покидает навсегда S . Поэтому вклад в производящую функцию $\varphi_n(x)$ при посещениях $\mu(t)$ множества S можно представить в виде

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_n(x, S)(A(x, S))^{l-1}b'(S) = a_n(x, S)(I - A(x, S))^{-1}b'(S). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует утверждение (2). Сходимость ряда в формуле (4) вытекает из условий теоремы.

Следствие 1. Случайная величина ν_i при условии $\mu(t) = n \in N_0^m$ имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\nu_i = 0 \mid \mu(0) = n\} &= 1 - a_{ni}(\{\alpha(i)\}), \\ \mathbf{P}\{\nu_i = l \mid \mu(0) = n\} &= a_{ni}(\{\alpha(i)\})(1 - a_{ii}(\{\alpha(i)\}))a_{ii}(\{\alpha(i)\})^{l-1}, \quad l \geq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. В этом случае формула (2) превращается в

$$\varphi_n(x_i) = 1 - a_{ni}(\{\alpha(i)\}) + \frac{a_{ni}(\{\alpha(i)\})x_i(1 - a_{ii}(\{\alpha(i)\}))}{(1 - a_{ii}(\{\alpha(i)\}))x_i} \quad (6)$$

Отсюда следует (5).

2. Непрерывное время

Пусть в марковском ветвящемся процессе $\mathcal{B}_c$ с одним типом частиц каждая частица ω имеет случайную продолжительность жизни $\eta(\omega)$ с показательным распределением $\mathbf{P}\{\eta(\omega) > t\} = e^{-ct}$; случайные величины $\eta(\omega)$ независимы. В конце своей жизни частица ω превращается в n частиц; вероятностный закон $\{p_n\}$ такого превращения определяется производящей функцией

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

(см. [2]). Состояние процесса в момент t определяется числом частиц $\mu(t)$. Обозначим $\tau_i, i = 1, 2, \dots, r$, времена пребывания в состояниях $i \in S = \{1, 2, \dots, r\}$ после первого скачка $\mu(t)$ из состояния $\mu(0) = n, n \geq 1$. Обозначим

$$\psi(c\lambda) = \frac{1}{1 + c\lambda}$$

преобразование Лапласа случайной величины $\eta(\omega)$.

Лемма 1. Если процесс $\mathcal{B}_c$ попадает в состояние $k \in S$, то время пребывания ξ_k в этом состоянии до первого скачка из него имеет показательное распределение с преобразованием Лапласа $\psi(kc\lambda)$.

Доказательство. Обозначим $\eta_j, j = i, 2, \dots, k$, время жизни j -й частицы, входящей в совокупность k частиц. Так как

$$\xi_k = \min\{\eta_j, 1 \leq j \leq k\},$$

и η_j независимы, то

$$\mathbf{P}\{\xi_k > x\} = \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\{\eta_j > x\} = e^{-xck},$$

что и доказывает лемму.

Число частиц $\mu(t)$ в ветвящемся процессе $\mathcal{B}_c$ имеет ступенчатые траектории со скачками в точках $t_1, t_2, \dots$; в точках скачка вероятности

$$\mathbf{P}\{\mu(t_k + 0) = k \mid \mu(t_k - 0) = n\} = p(n, k)$$

следующим образом выражаются через распределение $\{p_j\}$: $p(n, k) = p_{k-n+1}$ при $k \geq n - 1$ и $p(n, k) = 0$ при $k < n - 1$.

Обозначим $a_{kj}, 1 \leq j \leq r$, вероятность того, что траектория $\mu(t)$, начинающаяся с состояния $\mu(0) = k$, впервые попадает в множестве $S \cup \{0\}$ в состояние $\mu(t) = j$. Нетрудно видеть, что $a_{kj} = 0$ при $j \leq k - 2$, $a_{kj} = p_{j-k+1}$ при $0 \leq k - 1 \leq j \leq r - 1$, $a_{kr} = 1$ при $k > r$ и, наконец,

$$a_{kr} = \sum_{j \geq r-k+1} p_j, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Введем $r \times r$ матрицу

$$A(x) = \|a_{ij}x_j\|_{1 \leq i, j \leq r}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, и r -векторы

$$\begin{aligned} a_n(x) &= (a_{n1}x_1, a_{n2}x_2, \dots, a_{nr}x_r), \quad n = 1, 2, \dots, \\ b &= (p_0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Пусть ν_j — число посещений ветвящимся процессом $\mu(t)$ после первого скачка состояния j , $j = 1, \dots, r$, и

$$\varphi_n(x) = \mathbf{M}\{x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r} \mid \mu(0) = n\}.$$

Лемма 2. Пусть

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

удовлетворяет условиям $p_0 p_1 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$ и $h'(1) \leq 1$. Тогда для соответствующего ветвящегося процесса $\mathcal{B}_c$ с непрерывным временем производящая функция $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) = a_{n0} + (1 - a_{n0})a_n(x)(I - A(x))^{-1}b'.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 2. Одномерное распределение ν_1 имеет производящую функцию

$$\varphi_n(x_1) = a_{n0} + (1 - a_{n0}) \frac{p x_1 p_0}{1 - (1 - p_0)x_1}.$$

Теорема 2. В условиях леммы 2 преобразование Лапласа $\psi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ времен пребывания $\tau_1, \dots, \tau_r$ в состояниях множества S марковского ветвящегося процесса $\mathcal{B}_c$ при условии $\mu(0) = n$ имеет вид

$$\psi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \varphi_n(\psi(c\lambda_1), \psi(2c\lambda_2), \dots, \psi(rc\lambda_r)). \quad (7)$$

Доказательство. Если состояние $k \in S$ посещается процессом ν_k раз, то время пребывания в нем равно сумме случайного числа ν_k независимых одинаково распределенных слагаемых, преобразование Лапласа каждого из которых равно $\psi(kc\lambda_k)$; поэтому преобразование Лапласа суммы равно $\psi^{\nu_k}(kc\lambda_k)$. Осредняя

$$\prod_{k=1}^r \psi^{\nu_k}(kc\lambda_k)$$

по $\nu_1, \dots, \nu_r$, получаем (7).

Из теоремы 2 и следствия 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. При $n > 1$ плотность распределения ν_1 равна $sp_0 e^{-xcp_0}$, $x > 0$.

3. Вероятности вырождения модифицированного процесса

Рассмотрим следующую модификацию $\mathcal{B}^*$ надкритического ветвящегося процесса $\mathcal{B}$, рассмотренного в первом параграфе. Будем предполагать, что переходные вероятности p_{nk} процессов $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}$ совпадают, если $n \notin S$, где S некоторое фиксированное конечное подмножество N_0^m . Для $n \in S$ в процессе $\mathcal{B}^*$ переходные вероятности задаются числами

$$\pi_{nk}, \quad \pi_{nk} \geq 0, \quad \sum_{k \in N_0^m} \pi_{nk} = 1.$$

Далее мы будем пользоваться обозначениями из первого параграфа. Как известно, вероятности вырождения $q = (q_1, q_2, \dots, q_r)$ надкритического процесса $\mathcal{B}$ удовлетворяют уравнению $q = h(q)$ и $q \leq 1, q \neq 1$, а вероятность вырождения процесса, начинающегося с состояния $\mu(0) = n$, равна $q^n = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_r^{n_r}$ (см. [2]). Обозначим $q_n(S)$ вероятность вырождения процесса $\mathcal{B}$, начинающегося с состояния $\mu(0) = n$ и ни разу не заходящего в множество S .

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$q_n(S) = q^n - \sum_{k \in S} a_{nk}(S) q^k.$$

Доказательство тривиально.

Обозначим q_n^* вероятность вырождения модифицированного процесса $\mathcal{B}^*$, начинающегося с $\mu(0) = n \in N_0^m$.

Теорема 3. *Вероятности q_n^* выражаются формулой*

$$q_n^* = q^n - \sum_{k \in S} a_{nk}(S) q^k + \sum_{k \in S} a_{nk}(S) H_k, \quad n \in N_0^m, \quad (8)$$

где $H_k, k \in S$, удовлетворяют системе уравнений

$$H_l = \sum_{n \in N_0^m} \pi_{ln} q^n - \sum_{n \in N_0^m} \sum_{k \in S} \pi_{ln} a_{nk}(S) q^k + \sum_{n \in N_0^m} \sum_{k \in S} \pi_{ln} a_{nk}(S) H_k, \quad l \in S. \quad (9)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$H_k = \sum_{n \in N_0^m} \pi_{kn} q_n^*.$$

Если подставить это выражение H_k в формулу (8), то получим бесконечную систему уравнений для $q_n^*, n \in N_0^m$, которая следует из формулы полной вероятности. Умножая каждое из равенств (8) на π_{ln} и суммируя обе части получающегося равенства по $n \in N_0^m$, получаем конечную систему линейных уравнений (9) относительно $H_k, k \in S$.

Пример 1. Пусть в процессе $\mathcal{B}^*$, $m = 1, S = \{1\}, \pi_{12} = 1$. Тогда система (9) имеет вид

$$H_1 = q^2 - a_{21}(\{1\})q + a_{21}(\{1\})H_1,$$

откуда следует, что

$$H_1 = \frac{q^2 - a_{21}(\{1\})q}{1 - a_{12}(\{1\})} < q$$

и

$$q_n^* = q^n - a_{n1}(\{1\})q + a_{n1}(\{1\})H_1 < q^n.$$

Список литературы

1. Харрис Т. Е., *Теория ветвящихся случайных процессов*. Мир, Москва, 1966.
2. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
3. Севастьянов Б. А., Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1998), **43**, 390–397.

Статья поступила 01.11.2000.