Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанов, Векторные инварианты симметрических групп в случае поля простой характеристики, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:25:22

Векторные инварианты симметрических групп в случае поля простой характеристики

© 2000 г. С. А. Степанов

Пусть R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1 и S_n — симметрическая группа степени $n \geq 1$. Обозначим $A_{mn}^{S_n}$ подалгебру инвариантов алгебры полиномов

$$A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn}]$$

относительно S_n . Согласно классическому результату Г. Вейля, если каждое не равное нулю целое число обратимо в R , то алгебра $A_{mn}^{S_n}$ порождается поляризованными элементарными симметрическими полиномами степеней, не превосходящих n , вне зависимости от величины m . Как недавно было доказано Ричменом, этот результат остается справедливым, если число $|S_n| = n!$ обратимо в R . С другой стороны, для случая, когда R — поле простой характеристики $p \leq n$, Ричменом доказано, что каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, (m + p - n)/(p - 1)\}$. Из этого результата следует, что предложенная Вейлем оценка сверху степеней порождающих элементов перестает быть верной в случае, когда характеристика p поля R делит $|S_n|$. В общем случае доказано, что для произвольного коммутативного кольца R алгебра $A_{mn}^{S_n}$ порождается инвариантами степени, не превосходящей $\max\{n, mn(n - 1)/2\}$. Цель этой статьи состоит в том, чтобы дать простое арифметическое доказательство первого результата Ричмена и усилить его второй результат, также используя новые арифметические аргументы. Независимо аналогичное усиление результата Ричмена о нижняя оценка было предложено Кемпером с использованием другого подхода. Недавний результат Флейшмана показывает, что полученная в статье нижняя оценка является точной, если $m > 1$ и $n = p^\alpha$, где p — простое число.

1. Введение

Пусть m, n — положительные целые числа, R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1 и

$$A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}]$$

— алгебра полиномов от mn переменных x_{ij} над кольцом R . Симметрическая группа S_n действует на алгебре A_{mn} как группа R -автоморфизмов по правилу

$$\sigma(x_{ij}) = x_{i, \sigma(j)}, \quad \sigma \in S_n.$$

Обозначим $A_{mn}^{S_n}$ подалгебру инвариантов алгебры A_{mn} относительно группы S_n и определим поляризованные элементарные полиномы $u_{r_1, \dots, r_m} \in A_{mn}^{S_n}$ от n векторных переменных

$$(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, (x_{1n}, \dots, x_{mn})$$

с помощью формального тождества

$$\prod_{j=1}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) = 1 + \sum_{1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}.$$

Элементы алгебры $A_{mn}^{S_n}$ обычно называются векторными инвариантами относительно S_n . Если кольцо R нетерово, то по теореме Гильберта–Нетер (см. [6, 9]) алгебра $A_{mn}^{S_n}$ — конечно порожденная коммутативная R -алгебра и алгебра A_{mn} конечно порождается как модуль над $A_{mn}^{S_n}$. Более того, если каждое ненулевое целое число обратимо в R , то инварианты $u_{r_1, \dots, r_m}$ составляют полную систему образующих алгебры $A_{mn}^{S_n}$ над R (см. [1], с. 9; [17], с. 37). Другими словами, каждый элемент u алгебры $A_{mn}^{S_n}$ может быть записан в виде полинома от

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

с коэффициентами из R . Приведенная выше система порождающих инвариантов содержит $\binom{m+n}{m} - 1$ элементов, связанных между собой различными алгебраическими соотношениями (см. [4], с. 68, и [14]). Этот результат недавно был обобщен Ричменом следующим образом (см. [11]).

Теорема 1. *Предположим, что $|S_n| = n!$ обратимо в R . Тогда $A_{mn}^{S_n}$ порождается как R -алгебра поляризованными элементарными полиномами*

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

степени, не большей n .

В частности, если R — поле простой характеристики $p > n$, то $n!$ обратимо в R , так что справедлив следующий результат.

Следствие 1. *Пусть R — поле. Если $\text{char } R = 0$ или $\text{char } R = p > n$, то $A_{mn}^{S_n}$ порождается как R -алгебра поляризованными элементарными симметрическими полиномами*

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

В этой статье приводится простое арифметическое доказательство теоремы 1, опирающееся на поляризацию классической формулы Варинга [16] и тесно связанное с первоначальным доказательством Вейля [17] в случае, когда R содержит поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Теорему 1 можно легко обобщить следующим образом. Пусть

$$A = R[x_1, \dots, x_m]$$

— конечно порожденная коммутативная R -алгебра, G — конечная группа R -алгебры автоморфизмов A и A^G — подалгебра инвариантов группы G . Для коммутирующих переменных $z_1, \dots, z_m$ положим

$$F(z_1, \dots, z_m) = \prod_{\sigma \in G} (1 + \sigma(x_1)z_1 + \sigma(x_2)z_2 + \dots + \sigma(x_m)z_m).$$

Если каждое целое число, не равное нулю, обратимо в R , то из теоремы Нетер следует, что A^G порождается как R -алгебра коэффициентами полинома $F(z_1, \dots, z_m)$. Теорема 1 и стандартные рассуждения с использованием оператора Рейнольдса и отображения Нетер (см. [8]; [12], с. 63; [17], с. 275) приводят к следующему утверждению.

Теорема 2. *Если $|G|!$ обратимо в R , то A^G порождается как R -алгебра коэффициентами полинома $F(z_1, \dots, z_m)$. Другими словами, A^G порождается над R инвариантными полиномами от $x_1, \dots, x_m$ степени, не большей $|G|$.*

Теоремы 1 и 3 позволяют построить эффективный алгоритм вычисления полной системы порождающих полиномиальных инвариантов при условии, что $|G|!$ обратимо в R . Существует другое конструктивное доказательство теоремы 3, опирающееся на рассуждения, также восходящие к Нетер (см. [12], с. 29). Оценка сверху для степеней множества порождающих полиномов для алгебры инвариантов, приведенная в теореме 3, известна как граница Нетер (см. также [12], с. 28, и [13]).

Если $|S_n| = n!$ обратимо в R , то верхняя оценка степеней образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$, приведенная в теореме 1, является неупрощаемой. Для случая, когда R — произвольное коммутативное кольцо, в [3] доказано, что алгебра Вейля $A_{mn}^{S_n}$ порождается над R полиномами, степени которых не превышают $\max\{n, mn(n-1)/2\}$. Аналогичный результат был также получен Ричменом (см. [11], предл. 7). С другой стороны, в настоящей статье дана следующая оценка снизу.

Теорема 3. *Пусть α — положительное целое число, S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$ и R — поле простой характеристики p . Если p^α делит n , то любая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, m(p^\alpha - 1)\}$.*

Этот результат улучшает приведенную выше нижнюю оценку, предложенную Ричменом, в случае, когда p — простой делитель n , и показывает, что верхняя оценка, предложенная Нетер, неверна, если n необратимо в R . Как недавно было доказано Флейшманом [5], нижняя оценка теоремы 3 неупрощаема, если $n = p^\alpha$ и $m > 1$.

Теорема 3 может быть легко обобщена следующим образом. Пусть r — положительное целое число, не превосходящее n . В этом случае группа S_r является подгруппой S_n и поэтому $A_{mn}^{S_n} \subseteq A_{mr}^{S_r}$. Это замечание и теорема 3, примененная к S_r , приводят к следующему результату.

Следствие 2. *Пусть λ и $r \leq n$ — положительные целые числа, S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$ и R — поле простой характеристики p . Если p^λ делит r , то каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, m(p^\lambda - 1)\}$.*

Следствие 3. *Пусть S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$ и R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1. Если p — простой делитель $n!$, необратимый в R , то каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, m(p-1)\}$.*

Если R совпадает с кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел, то для получения универсальной нижней оценки, зависящей от m и n , можно использовать известные результаты о распределении простых чисел в коротких интервалах.

Следствие 4. Пусть $R = \mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел и S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$. Тогда каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, c_n m(n-1)\}$, где $c_n = 1/2$ для любых $n \geq 2$; кроме того, $c_n = 5/6$ для $n \geq 25$ и $c_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. В частности, если n — простое число, то каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, m(n-1)\}$.

Аналогичный результат справедлив в случае, когда R — кольцо $\mathbf{Z}_K$ целых чисел числового поля K .

2. Порождающие инварианты симметрической группы

Пусть S_n — симметрическая группа степени $n \geq 1$, действующая на R -алгебре

$$A_{mn} = R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}]$$

как группа R -автоморфизмов, $A_{mn}^{S_n}$ — подалгебра инвариантов алгебры A_{mn} относительно S_n и

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

— поляризованные элементарные симметрические полиномы в $A_{mn}^{S_n}$.

Пусть $v_{s_1, \dots, s_m}$ — инвариантный полином в $A_{mn}^{S_n}$, имеющий вид

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}.$$

Если $m = 1$, то согласно известной формуле Варинга (см. [16], стр. 13, и [2], стр. 99)

$$v_s = \sum_{j=1}^n x_j^s = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}, \quad (1)$$

где $c(k_1, \dots, k_n)$ — целые числа вида

$$c(k_1, \dots, k_n) = (-1)^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n} \frac{(k_1 + \dots + k_n - 1)! s}{k_1! \dots k_n!}.$$

Следующий результат можно рассматривать как обобщение формулы Варинга на случай, когда $m > 1$ (см. также [14, 15]).

Предложение 1. Пусть $s_1, \dots, s_m$ — неотрицательные целые числа,

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}$$

— полином в $A_{mn}^{S_n}$ степени $s = s_1 + \dots + s_m$ и

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

— поляризованные элементарные симметрические полиномы от векторов

$$(x_{1j}, \dots, x_{mj}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Для неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$ и $k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}$ таких, что

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n &= s, \\ k_{1\nu} + \dots + k_{m\nu} &= \nu k_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n, \end{aligned}$$

пусть

$$w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}} = \sum_{A_{m,n}} \frac{k_\nu!}{l_{\nu 1}! \dots l_{\nu k_\nu}!} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} u_{r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}}^{l_{\nu\mu}},$$

где сумма берется по множеству $A_{m,n}$ всех неотрицательных целых чисел $r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}$ и $l_{\nu 1}, \dots, l_{\nu k_\nu}$ таких, что

$$\begin{aligned} r_{i1}l_{\nu 1} + \dots + r_{ik_\nu}l_{\nu k_\nu} &= k_{i\nu}, \\ l_{\nu 1} + \dots + l_{\nu k_\nu} &= k_\nu, \\ r_{1\mu} + \dots + r_{m\mu} &= \nu \end{aligned}$$

при $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \mu \leq k_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$.

Тогда

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \frac{s_1! \dots s_m!}{s!} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = s} c(k_1, \dots, k_n) \sum_{B_{m,n}} \prod_{\nu=1}^n w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}},$$

где $s = s_1 + \dots + s_m$ и внутренняя сумма берется по множеству $B_{m,n}$ всех целых неотрицательных чисел $k_{i1}, \dots, k_{in}$ таких, что

$$\begin{aligned} k_{i1} + \dots + k_{in} &= s_i, \\ k_{1\nu} + \dots + k_{m\nu} &= \nu k_\nu \end{aligned}$$

при $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \nu \leq n$.

Доказательство. Положим в (1)

$$x_j = x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Поскольку

$$(x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m)^s = \sum_{s_1 + \dots + s_m = s} \frac{s!}{s_1! \dots s_m!} x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m},$$

справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^n (x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m)^s = \sum_{s_1 + \dots + s_m = s} \frac{s!}{s_1! \dots s_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} \right) z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq n} \prod_{k=1}^{\nu} (x_{1j_k}z_1 + \dots + x_{mj_k}z_m) = \sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}$$

и следовательно, в силу (1)

$$\sum_{j=1}^n (x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m)^s = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{r_1+\dots+r_m=\nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{k_\nu}.$$

В результате получаем, что

$$\sum_{s_1+\dots+s_m=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} \right) z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{r_1+\dots+r_m=\nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{k_\nu}.$$

Теперь, поскольку

$$\left(\sum_{r_1+\dots+r_m=\nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{k_\nu} = \sum_{k_{1\nu}+\dots+k_{m\nu}=\nu k_\nu} w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}} z_1^{k_{1\nu}} \dots z_m^{k_{m\nu}},$$

где

$$w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}} = \sum_{C_{m,\nu}} \frac{k_\nu!}{l_{\nu 1}! \dots l_{\nu k_\nu}!} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} u_{r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}},$$

и суммирование проводится по множеству $C_{m,\nu}$ всех неотрицательных целых чисел $r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}$ и $l_{\nu 1}, \dots, l_{\nu k_\nu}$ таких, что

$$\begin{aligned} r_{i1}l_{\nu 1} + \dots + r_{is_\nu}l_{\nu k_\nu} &= k_{i\nu}, & 1 \leq i \leq m, \\ r_{1\mu} + \dots + r_{m\mu} &= \nu, & 1 \leq \mu \leq k_\nu, \\ l_{\nu 1} + \dots + l_{\nu k_\nu} &= k_\nu, \end{aligned}$$

находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{s_1+\dots+s_m=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} \right) z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} \\ = \sum_{s_1+\dots+s_m=s} \left(\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) \sum_{B_{m,n}} \prod_{\nu=1}^n w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}} \right) z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m}, \end{aligned}$$

где суммирование в последней сумме проводится по множеству $B_{m,n}$ всех неотрицательных целых чисел $k_{i1}, \dots, k_{i\nu}$, $i = 1, \dots, m$, таких, что

$$\begin{aligned} k_{i1} + \dots + k_{i\nu} &= s_i, & 1 \leq i \leq m, \\ k_{1\nu} + \dots + k_{m\nu} &= \nu k_\nu, & 1 \leq \nu \leq n. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} = \frac{s_1! \dots s_m!}{s!} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) \sum_{B_{m,n}} \prod_{\nu=1}^n w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}},$$

что и доказывает предложение.

Если $s = s_1 + \dots + s_m \leq n + 1$, то

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \frac{s_1! \dots s_m!}{s!} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=s} c(k_1, \dots, k_n) \sum_{B_{m,n}} \prod_{\nu=1}^n w_{k_{1\nu}, \dots, k_{m\nu}}$$

есть полином от $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, с рациональными коэффициентами, знаменатели которых не делятся ни на одно простое число $p \geq n + 1$. С помощью этого замечания получаем следующее утверждение.

Следствие 5. Если $n!$ обратимо в R и $s = s_1 + \dots + s_m \leq n + 1$, то

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}$$

есть полином над R от $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, степень которого не больше, чем n .

Покажем теперь, что если $n!$ обратимо в R , то любой векторный инвариант в $A_{mn}^{S_n}$ можно представить как полином над R от инвариантов $v_{s_1, \dots, s_m}$.

Предложение 2. Пусть f — одночлен в A_{mn} и

$$v = \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u.$$

Если $n!$ обратимо в R , то v — полином над R от инвариантов

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m},$$

где $s_1, \dots, s_m$ — неотрицательные целые числа такие, что

$$0 \leq s_1 + \dots + s_m \leq \deg f.$$

Доказательство. Запишем f в виде $f = f_1 \dots f_n$, где каждый множитель f_j — одночлен в $R[x_{1j}, \dots, x_{mj}]$. Положим

$$d(f) = \max_{1 \leq j \leq n} (\deg f_j)$$

и докажем предложение 2 индукцией по $\delta(f) = \deg f - d(f)$. Предположим вначале, что $\delta(f) = 0$. Тогда

$$f = f_j = x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m},$$

где $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s_1, \dots, s_m$ — натуральные числа, $s_1 + \dots + s_m = \deg f$, и

$$v = \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}.$$

Предположим теперь, что $\delta(f) > 0$, и пусть $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таково, что

$$d(f) = \deg f_j < \deg f.$$

Определим v_j и v'_j , полагая

$$v_j = \sum_{u \in \{\sigma(f_j) | \sigma \in S_n\}} u, \quad v'_j = \sum_{u' \in \{\sigma(f/f_j) | \sigma \in S_n\}} u'.$$

По предположению индукции v_j и v'_j — полиномы от

$$v_{s_1, \dots, s_m}, \quad 0 \leq s_1 + \dots + s_m \leq \deg f.$$

Для каждого $\tau \in S_n$ пусть U_τ — множество всех пар (u, u') таких, что

$$u \in \{\sigma(f_j) | \sigma \in S_n\}, \quad u' \in \{\sigma(f/f_j) | \sigma \in S_n\}, \quad uu' = \tau(f),$$

и заметим, что отображение

$$U_{id} \rightarrow U_\tau, \quad (u, u') \rightarrow (\tau(u), \tau(u'))$$

является биекцией. Таким образом, $|U_\tau| = |U_{id}|$ для всех $\tau \in S_n$. Заметим также, что $d(uu') \geq d(f)$ для всех $u \in \{\sigma(f_j) | \sigma \in S_n\}$ и $u' \in \{\sigma(f/f_j) | \sigma \in S_n\}$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда $uu' \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}$. Поэтому

$$v_j v'_j = |U_{id}| \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u + \sum_{f': \deg f' = \deg f, d(f') > d(f)} \sum_{u \in \{\sigma(f') | \sigma \in S_n\}} u.$$

По предположению индукции инвариант

$$v_j v'_j - |U_{id}| \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u = \sum_{f': \deg f' = \deg f, d(f') > d(f)} \sum_{u \in \{\sigma(f') | \sigma \in S_n\}} u$$

есть полином над R от $v_{s_1, \dots, s_m}$, $0 \leq s_1 + \dots + s_m \leq \deg f$. Мощность U_{id} не превосходит мощности $\{\sigma(f_j) | \sigma \in S_n\}$, которая в свою очередь не превосходит мощности $\{x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m} | 1 \leq j \leq n\}$, так что $1 \leq |U_{id}| \leq n$. Поскольку $n!$ необратимо в R , заключаем, что

$$\sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u$$

есть полином над R от $v_{s_1, \dots, s_m}$, $0 \leq s_1 + \dots + s_m \leq \deg f$. Это завершает доказательство.

Пусть S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$ и

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}$$

— однородный полином в $A_{m,n}^S$ степени $s_1 + \dots + s_m \geq 1$. Пусть R — поле простой характеристики p , делящей n . Следующий результат показывает, что оценка Вейля не выполняется при $m > n \geq 2$.

Предложение 3. Пусть R — поле простой характеристики p и S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$. Если p делит n и $m > n$, то элемент $v_{11\dots 11} \in A_{mn}^{S_n}$ нельзя представить в виде полинома над R от инвариантов

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Доказательство. Для доказательства от противного предположим, что $v_{11\dots 11}$ можно представить в виде полинома над R от $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, и запишем $v_{11\dots 11}$ в виде

$$v_{11\dots 11} = \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=m} a_{s_1, \dots, s_n} \sum_{R_m(s_1, \dots, s_n)} \prod_{\nu=1}^n \prod_{\sigma_\nu=1}^{s_\nu} u_{r_{1\sigma_\nu}, \dots, r_{m\sigma_\nu}}$$

с некоторыми коэффициентами $a_{s_1, \dots, s_n} \in R$, где $R_m(s_1, \dots, s_n)$ — множество всех целых неотрицательных чисел r_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$ таких, что

$$\begin{aligned} r_{1\sigma_\nu} + \dots + r_{m\sigma_\nu} &= \nu, & 1 \leq \sigma_\nu \leq s_\nu, & \quad 1 \leq \nu \leq n, \\ r_{i\sigma_1} + \dots + r_{i\sigma_n} &= 1, & 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Не теряя общности, можно предположить, что если $k \leq n$ — наименьшее положительное число такое, что $s_k \geq 1$, то

$$r_{1\sigma_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_k = 1, \\ 0, & \text{если } 2 \leq \sigma_k \leq s_k. \end{cases}$$

Дифференцируя приведенное выше равенство по x_{11} и учитывая, что

$$\frac{\partial u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}} = \begin{cases} 0 & \text{если } r_1 = 0, \\ u_{0, r_2, \dots, r_m}^{(1, 0, \dots, 0)} & \text{если } r_1 = 1, \end{cases}$$

где $u_{0, r_2, \dots, r_m}^{(1, 0, \dots, 0)}$ — соответствующий элементарный симметрический полином от векторов $(x_{2j}, \dots, x_{mj})$, $1 \leq j \leq n$, получаем, что

$$x_{21} \dots x_{m1} = \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=m} a_{s_1, \dots, s_n} \sum_{j=1}^n \Psi_{s_1, \dots, s_n}^{(j)}, \quad (2)$$

где

$$\Psi_{s_1, \dots, s_n}^{(j)} = \sum_{R_m(s_1, \dots, s_n)} u_{0, r_{2\sigma_k}, \dots, r_{m\sigma_k}}^{(1, 0, \dots, 0)} \prod_{\sigma_k=2}^{s_k} u_{0, r_{2\sigma_k}, \dots, r_{m\sigma_k}} \prod_{\nu=1, \nu \neq k}^n \prod_{\sigma_\nu=1}^{s_\nu} u_{0, r_{2\sigma_\nu}, \dots, r_{m\sigma_\nu}}.$$

Обозначим $\omega_{0, r_2, \dots, r_m}$ значение $u_{0, r_2, \dots, r_m}$ в точке

$$(x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}) = (1, \dots, 1; \dots; 1, \dots, 1).$$

Поскольку $m > n \geq 2$, каждая двоичная последовательность $(0, r_2, \dots, r_m)$, входящая в последнее равенство, содержит l ненулевых членов для некоторого $1 \leq l \leq n$. В этом случае

$$\omega_{0, r_2, \dots, r_m} = n(n-1) \dots (n-l+1),$$

и полагая в (2)

$$x_{11} = \dots = x_{m1} = \dots = x_{1n} = \dots = x_{mn} = 1,$$

получаем соотношение

$$1 = n \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = m} b_{s_1, \dots, s_n},$$

невозможное в R для любого простого числа p , делящего n . Это доказывает предложение 3.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть S_n — симметрическая группа степени n . Предположим, что f — одночлен в A_{mn} и $w \in A_{mn}^{S_n}$ — полиномиальный инвариант относительно S_n . Поскольку $\sigma(w) = w$ для любого $\sigma \in S_n$, полиномы w и $\sigma(w)$ имеют одинаковые коэффициенты. Это показывает, что любой полиномиальный инвариант в S_n является R -линейной комбинацией инвариантов

$$v = \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u,$$

где f пробегает одночлены, появляющиеся в w .

Пусть $(i_1, \dots, i_\mu)$ — последовательность элементов $i_1, \dots, i_\mu \in \{1, \dots, n\}$. Вначале докажем, что каждый инвариант w_μ вида

$$w_\mu = \sum_{j=1}^n x_{i_1, j} \dots x_{i_\mu, j}$$

является полиномом над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Если $\mu \leq n+1$, то утверждение теоремы 1 следует из предложения 1. Предположим теперь, что $\mu > n+1$, и проведем доказательство индукцией по μ . Пусть

$$\tilde{x}_{i_s, j} = \begin{cases} x_{i_s, j}, & \text{если } s \leq n, \\ x_{i_{n+1}, j} x_{i_{n+2}, j} \dots x_{i_{\mu+1}, j}, & \text{если } s = n+1, \end{cases}$$

при $j = 1, 2, \dots, n$, тогда

$$w_{\mu+1} = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{i_1, j} \dots \tilde{x}_{i_n, j} \tilde{x}_{i_{n+1}, j}.$$

Пусть

$$\tilde{A}_{mn} = R[\tilde{x}_{11}, \dots, \tilde{x}_{m1}; \dots; \tilde{x}_{1n}, \dots, \tilde{x}_{mn}]$$

и $\tilde{A}_{mn}^{S_n}$ — подалгебра инвариантов алгебры $\tilde{A}_{mn}$. Из следствия 5 вытекает, что $w_{\mu+1}$ — полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов

$$\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m} \in \tilde{A}_{mn}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Так как каждый полином $\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m}$ имеет вид

$$\tilde{u}_{r_1, \dots, r_m} = \sum_{\bar{u} \in \{\tau(\tilde{f}) | \tau \in G\}} \tilde{u},$$

для некоторого одночлена $\tilde{f} \in \tilde{A}_{mn}$ степени, не большей n , согласно предложению 1 он может быть записан в виде полинома над R от инвариантов

$$\tilde{v}_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{1j}^{s_1} \dots \tilde{x}_{mj}^{s_m}$$

степени, не большей n . Кроме того, каждый инвариант $\tilde{v}_{s_1, \dots, s_m}$ имеет вид

$$\tilde{v}_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{t_1} \dots x_{mj}^{t_j},$$

где $1 \leq t_1 + \dots + t_m \leq \mu$. По предположению индукции каждый инвариант $\tilde{v}_{s_1, \dots, s_m}$ является полиномом над R от

$$u_{r_1, \dots, r_m}, \quad 1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n,$$

поэтому $w_{\mu+1}$ — также полином над R от поляризованных элементарных симметрических полиномов $u_{r_1, \dots, r_m}$, $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$.

Для завершения доказательства заметим, что в силу предложения 2 каждый элемент $v \in A_{mn}^{S_n}$ можно записать в виде полинома над R от инвариантов w_μ .

4. Доказательство теоремы 3

Рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 3, те же, что и в доказательстве предложения 3. Пусть S_n — симметрическая группа степени $n \geq 2$ и p — простой делитель n . Пусть R — поле характеристики p и $A_{mn}^{S_n}$ — алгебра векторных инвариантов над R относительно S_n . Пусть

$$v_{s_1, \dots, s_m}, \quad s_1 + \dots + s_m \geq 1,$$

обозначает полином в $A_{mn}^{S_n}$ вида

$$v_{s_1, \dots, s_m} = \sum_{j=1}^n x_{1j}^{s_1} \dots x_{mj}^{s_m}.$$

Напомним, что каждый векторный инвариант $v \in A_{mn}^{S_n}$ является R -линейной комбинацией инвариантов

$$w = \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in S_n\}} u,$$

где f пробегает одночлены из A_{mn} , встречающиеся в v .

Для доказательства теоремы 3, достаточно показать, что если p^α делит n , то каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит хотя бы один порождающий элемент v степени $m(p^\alpha - 1)$. Главным является то, что инвариант $v_{p^\alpha-1, \dots, p^\alpha-1}$

степени $m(p^\alpha - 1)$ не может быть представлен в виде полинома над R от векторных инвариантов меньшей степени.

Обозначим $W_{mn}^{S_n}$ множество образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ вида

$$w = \sum_{u \in \{\sigma(f) \mid \sigma \in S_n\}} u,$$

где f — одночлен в A_{mn} степени, меньшей $m(p^\alpha - 1)$. Каждый векторный инвариант $v \in A_{mn}^{S_n}$, степень которого меньше, чем $m(p^\alpha - 1)$, можно представить в виде R -линейной комбинации элементов $w \in W_{mn}^{S_n}$, поэтому достаточно доказать, что инвариант $v_{p^\alpha-1, \dots, p^\alpha-1}$ непредставим в виде полинома над R от элементов $w \in W_{mn}^{S_n}$. Пусть l — мощность $W_{mn}^{S_n}$. Занумеруем элементы множества $W_{mn}^{S_n}$ числами $1, 2, \dots, l$ и предположим, чтобы прийти к противоречию, что инвариант $v_{p^\alpha-1, \dots, p^\alpha-1}$ является полиномом над R от $w_1, \dots, w_l$, то есть

$$v_{p^\alpha-1, \dots, p^\alpha-1} = \sum_M a_{\mu_1, \dots, \mu_l} w_1^{\mu_1} \dots w_l^{\mu_l}, \quad a_{\mu_1, \dots, \mu_l} \in R, \quad (3)$$

где M — множество всех неотрицательных целых чисел $\mu_1, \dots, \mu_l$ таких, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu_1 + \dots + \mu_l \leq m(p^\alpha - 1), \\ \mu_1 \deg w_1 + \dots + \mu_l \deg w_l &= m(p^\alpha - 1). \end{aligned}$$

Сравнивая степени одночленов, появляющихся в обеих сторонах последнего равенства (относительно каждой из переменных $x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}$), находим, что $\mu_k \in \{0, 1, \dots, p^\alpha - 1\}$, $1 \leq k \leq l$, и $\mu_1 + \dots + \mu_l > 1$; кроме того, каждый инвариант

$$w_k = \sum_{u \in \{\sigma(f_k) \mid \sigma \in S_n\}} u,$$

который появляется в правой части с ненулевым коэффициентом, порождается одночленом $f_k \in A_{mn}$ вида

$$f_k = (x_{1j_{11}^{(k)}} \dots x_{1j_{1\nu_1}^{(k)}}) \dots (x_{mj_{m1}^{(k)}} \dots x_{mj_{m\nu_m}^{(k)}}),$$

где $1 \leq j_{ij_{i1}}^{(k)} \leq \dots \leq j_{i\nu_i}^{(k)} \leq n$ и $j_{i\nu_i}^{(k)} \leq p^\alpha - 1$ хотя бы для одного i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим ω_k значение w_k в точке

$$(x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{1n}, \dots, x_{mn}) = (1, \dots, 1; \dots; 1, \dots, 1)$$

и заметим, что $\omega_k = |\text{orb}(f_k)|$, где

$$\text{orb}(f_k) = \{\sigma(f_k) \mid \sigma \in S_n\}$$

есть орбита f_k относительно S_n . Если

$$S_n(f_k) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(f_k) = f_k\}$$

является группой изотропии f_k , то

$$|\text{orb}(f_k)| = \frac{|S_n|}{|S_n(f_k)|} = \frac{n!}{|S_n(f_k)|}.$$

Поскольку $j_{i\nu_i^{(k)}} \leq p^\alpha - 1$ для каждого $k = 1, 2, \dots, l$ и хотя бы для одного i , $i = 1, 2, \dots, m$, показатель степени p в разложении на простые множители каждого из чисел $|S_n(f_k)|$ меньше, чем показатель степени p в разложении $n!$. Отсюда следует, что $|\text{orb}(f_k)|$ делится на p , и поэтому $\omega_k = 0$ в R для всех $k = 1, 2, \dots, l$. Дифференцируя тождество (3) по x_{11} , полагая

$$x_{11} = \dots = x_{m1} = \dots = x_{1n} = \dots = x_{mn} = 1$$

в получающемся равенстве и учитывая, что каждое произведение

$$w_1^{\mu_1} \dots w_l^{\mu_l}$$

в правой части (3) содержит по крайней мере два множителя, скажем w_k и $w_{k'}$, $1 \leq k \leq k' \leq l$, приходим к равенству $p - 1 = 0$, что невозможно в R .

Инвариант $v_{p^\alpha-1, \dots, p^\alpha-1}$ нельзя представить в виде полинома над R от векторных инвариантов меньшей степени, поэтому каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ должна содержать хотя бы один порождающий элемент степени $m(p^\alpha - 1)$. Замечая теперь, что каждая система образующих R -алгебры $A_{mn}^{S_n}$ содержит порождающий элемент степени n (например, инвариант $w = x_{11} \dots x_{1n}$), находим, что она содержит порождающий элемент v степени не меньшей $\max\{n, m(p^\alpha - 1)\}$.

5. Доказательство следствия 3

Пусть R — коммутативное кольцо с единичным элементом 1, p — простой делитель $n!$ и I — максимальный идеал в R , содержащий p . Тогда $F = R/I$ — поле характеристики p . Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi: R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}] \rightarrow F[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}],$$

который оставляет на месте все переменные x_{ij} , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Этот гомоморфизм индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\psi: R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}]^{S_n} \rightarrow F[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}]^{S_n}.$$

Таким образом, ψ отображает каждое множество образующих

$$R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}]^{S_n}$$

в множество образующих

$$F[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}]^{S_n}.$$

Из этого факта и следствия 2 заключаем, что каждая система образующих R -алгебры $R[x_{11}, \dots, x_{m1}; \dots; x_{n1}, \dots, x_{mn}]^{S_n}$ содержит порождающий элемент степени, не меньшей $\max\{n, m(p-1)\}$. В частности, если $n = p$ — простое число, то она содержит порождающий элемент, степень которого не меньше, чем $\max\{n, m(n-1)\}$.

Список литературы

1. Benson D. J., *Polynomial invariants of finite groups*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
2. Bourbaki N., *Elements of mathematics, Algebra II*. Springer, Berlin, 1990.
3. Campbell H. E. A., Hughes I., Pollack R. D., Vector invariants of symmetric groups, *Canad. Math. Bull.* (1990) **33**, 391–397.
4. Dieudonne J. A., Carrel J. B., *Invariant theory, old and new*. Academic Press, New York, 1971.
5. Fleischmann P., A new degree bound for vector invariants of symmetric groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1998) **350**, 1703–1712.
6. Hilbert D., Über die vollen Invariantensystem. *Math. Ann.* (1893) **42**, 313–373.
7. Kemper G., Lower degree bounds for modular invariants and a question of I. Hughes. *Transformation Groups* (1998) **3**, 135–144.
8. Noether E., Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Math. Ann.* (1916) **77**, 89–92.
9. Noether E., Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p . *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1926), 28–35.
10. Richman D. R., Invariants of finite groups over fields of characteristic p . *Adv. Math.* (1996) **124**, 25–48.
11. Richman D. R., Explicit generators of the invariants of finite groups. *Adv. Math.* (1996) **124**, 49–76.
12. Smith L., *Polynomial invariants of finite groups*. A. K. Peters, Wellesley, MA, 1995.
13. Smith L., Polynomial invariants of finite groups. A survey of recent developments. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1997) **34**, 211–250.
14. Stepanov S. A., Transcendence bases of the algebra of vector invariants for a symmetric group. *Proc. Intern. Conf. Number Theory*, Berlin, 1999, 487–501.
15. Степанов С. А., Полиномиальные инварианты конечных групп над полями простой характеристики. *Дискретная математика* (1999) **11**, 3–14.
16. Waring E., *Meditationes Algebraicae*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1782.
17. Weyl H., *The classical groups, their invariants and representations*. New Jersey, 1939.

Статья поступила 18.08.2000.