Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, О подстановках с длинами циклов из случайного множества, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 4, 53–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:01:33

О подстановках с длинами циклов из случайного множества

© 2000 г. А. Л. Якимив

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых бернуллиевых случайных величин, принимающих значение 1 с вероятностью $\sigma \in (0, 1]$. По этой последовательности построим случайное множество $A \subseteq N = \{1, 2, 3, \dots\}$ следующим образом: число $n \in N$ включается в A тогда и только тогда, когда $\xi_n = 1$. Через $T_n = T_n(A)$ обозначим множество подстановок степени n , длины циклов которых принадлежат множеству A . В статье находится асимптотика при $n \rightarrow \infty$ числа элементов множества $T_n(A)$. Этот результат подтверждает гипотезу, высказанную В. Ф. Колчиным в 1989 году на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова. При каждом фиксированном A на $T_n(A)$ задается равномерное распределение. В этом случае получены предельные теоремы для числа циклов, общего и фиксированной длины, в случайной подстановке из $T_n(A)$.

Ранее аналогичные задачи решались для различных классов детерминированных множеств A .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 00-15-96136 и 00-01-00090.

1. Введение

Зафиксируем некоторое множество $A \subseteq N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Обозначим $T_n = T_n(A)$ множество всех подстановок степени n , длины циклов которых принадлежат множеству A . На множестве T_n зададим равномерное распределение. Через ζ_{nm} обозначим число циклов в случайной подстановке из T_n , имеющих длину $m \in A$. Общее число циклов такой случайной подстановки равно

$$\zeta_n = \sum_{m \in A} \zeta_{nm}.$$

Будем писать $f(n) \sim g(n)$ при $n \rightarrow \infty$, если $f(n)/g(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Через $|X|$ будем обозначать число элементов конечного множества X . Положим

$$A(n) = \{m: m \in A, m \leq n\}.$$

Большое число работ посвящено изучению асимптотики $|T_n|$ и распределений случайных величин ζ_n и ζ_{nm} при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $m \in A$ для различных классов множеств A (см. [1–17]).

Сформулируем результаты, полученные в статье [13], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема А. Пусть для произвольного фиксированного $c > 1$ при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} |k: k \leq n, k \in A| \rightarrow \sigma > 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} |k: k \in A, m - k \in A| \rightarrow \sigma^2 \quad (2)$$

равномерно по $m \in [n, cn]$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$|T_n| \sim n! n^{\sigma-1} L(n) e^{-\sigma\gamma} / \Gamma(\sigma),$$

где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, причем

$$L(n) = \exp \left\{ \sum_{m \in A(n)} \frac{1}{m} - \sigma \ln n \right\},$$

γ — постоянная Эйлера, Γ — гамма-функция.

Теорема В. Пусть выполнены соотношения (1) и (2). Тогда распределение случайной величины

$$\zeta'_n = (\zeta_n - l(n)) / \sqrt{\sigma \ln n}$$

слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному распределению, где

$$l(n) = \sum_{m \in A(n)} \frac{1}{m}.$$

Теорема С. Пусть выполнены соотношения (1) и (2). Тогда для произвольного фиксированного $m \in A$ распределение случайной величины ζ_{nm} слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к пуассоновскому распределению с параметром $1/m$.

Эти результаты были получены автором в 1988 году и опубликованы в [13]. Они докладывались на семинаре по вероятностным методам в дискретной математике в Математическом институте им. В. А. Стеклова, где В. Ф. Колчин высказал гипотезу о том, что аналогичные утверждения справедливы, когда множество A является случайным множеством, для которого определяющие его случайные величины ξ_n такие, что $n \in A$, если $\xi_n = 1$, независимы и $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \sigma > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Подтверждению этой гипотезы и посвящена настоящая статья.

2. Формулировки основных результатов

Пусть задана последовательность ξ_n , $n \in N$, независимых бернуллиевых случайных величин. Положим

$$p_0 = 0, \quad p_n = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\}, \quad n \in N.$$

По этой последовательности построим случайное множество A следующим образом: элемент $n \in N$ будем включать в множество A тогда и только тогда, когда $\xi_n = 1$. Будем предполагать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \rightarrow \sigma > 0 \quad (3)$$

и для каждого фиксированного $c > 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i p_{m-i} \rightarrow \sigma^2 \quad (4)$$

равномерно по $m \in [n, cn]$.

Для каждой реализации множества A , как и ранее, введем множество $T_n = T_n(A)$ и случайные величины ζ_{nm} и ζ_n , $n, m \in N$ (если $T_n(A)$ оказалось пустым, то полагаем ζ_{nm} и ζ_n равными нулю).

В параграфе 3 мы покажем, что справедливы следующие теоремы, являющиеся аналогами теорем А, В и С.

Теорема 1. Пусть выполнены соотношения (3) и (4). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|T_n(A)|}{n!L(n)} n^{1-\sigma} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\sigma)} e^{\sigma\gamma}$$

почти наверное (п.н.), где

$$L(n) = \exp\{l(n) - \sigma \ln n\},$$

$$l(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \xi_m.$$

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (3) и (4). Тогда для произвольного фиксированного $x \in R$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{(\zeta_n - l(n))/\sqrt{\sigma \ln n} \leq x \mid A\} \rightarrow \Phi(x) \quad \text{п.н.}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Теорема 3. Пусть выполнены соотношения (3) и (4). Тогда для каждого фиксированного $m \in N$ и $k \in N$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{nm} = k \mid A\} \rightarrow \frac{\xi_m \exp\{-1/m\}}{m^k k!} \quad \text{п.н.}$$

и

$$\mathbf{P}\{\zeta_{nm} = 0 \mid A\} \rightarrow 1 - \xi_m + \xi_m e^{-1/m} \quad \text{п.н.}$$

Следствие 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$

$$p_n \rightarrow \sigma > 0. \quad (5)$$

Тогда выполнены соотношения (3) и (4).

При $p_n = \sigma$ для всех $n \in N$ отсюда следует справедливость упомянутой выше гипотезы.

Следствие 2. Пусть B — некоторое фиксированное подмножество множества N асимптотической плотности нуль, то есть при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} |k: k \leq n, k \in A| \rightarrow 0.$$

Тогда, если при $n \rightarrow \infty$

$$p_n \rightarrow \sigma > 0 \quad (6)$$

для $n \in N \setminus B$, то выполнены соотношения (3) и (4).

Следствие 1 показывает, что для справедливости теорем 1–3 совсем неважно, как ведут себя числа p_n на любом конечном фиксированном интервале изменения n , достаточно лишь выполнения соотношения (5).

3. Доказательство теорем 1–3

В силу теорем А, В, С для доказательства теорем 1–3 достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow \sigma \quad \text{п. н.} \quad (7)$$

и для произвольного фиксированного $c > 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xi_{m-k} \rightarrow \sigma^2 \quad \text{п. н.} \quad (8)$$

равномерно по $m \in [n, cn]$.

Соотношение (7) является непосредственным следствием соотношения (3) и усиленного закона больших чисел для последовательности ξ_m , $n \in N$. Соотношение же (8), которое не следует из (4) и усиленного закона больших чисел, будет доказано ниже.

Заметим, что в силу (4) соотношение (8) равносильно соотношению

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m) \rightarrow 0 \quad \text{п. н.} \quad (9)$$

равномерно по $m \in [n, cn]$, где

$$X(k, m) = \xi_k \xi_{m-k} - p_k p_{m-k}.$$

Далее мы покажем, что для всех $n \in N$ и $m \geq n$ выполнено неравенство

$$\mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^n X(k, m) \right)^6 \leq c_1 n^3, \quad (10)$$

где $c_1 = 111 \cdot 6!$. Сначала, пользуясь справедливостью (10), выведем отсюда соотношение (9). Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, 1]$. Положим

$$A_{mn}(\varepsilon) = \left\{ \omega: \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m) \right| > \varepsilon \right\},$$

$$B(\varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{cn} A_{mn}(\varepsilon).$$

Заметим, что для произвольного $k \in N$ в силу (10) и неравенства Чебышева

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B(\varepsilon)) &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{m=n}^{cn} \mathbf{P}(A_{mn}(\varepsilon)) \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{m=n}^{cn} \frac{cn^3}{(\varepsilon n)^6} \end{aligned}$$

и правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(B(\varepsilon)) = 0, \quad (11)$$

то есть с вероятностью единица имеет место лишь конечное число событий $A_{mn}(\varepsilon)$. Положим

$$B = \bigcup_{\varepsilon \leq 1} B(\varepsilon).$$

Через B' обозначим множество тех элементарных исходов ω , для которых

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m)$$

не стремится к нулю равномерно по $m \in [n, cn]$. Покажем, что $B = B'$.

Пусть $\omega \in B$. Тогда существует $\varepsilon \in (0, 1]$ такое, что $\omega \in B(\varepsilon)$, иными словами, для произвольного $k \in N$ найдутся такие $n \geq k$ и $m \in [n, cn]$, что

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m) \right| > \varepsilon,$$

стало быть,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m)$$

не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $m \in [n, cn]$.

Пусть теперь $\omega \in B'$. Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, 1]$ и произвольного $k \in N$ существуют такие $n \geq k$ и $m \in [n, cn]$, что

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k, m) \right| > \varepsilon,$$

то есть, $\omega \in B$. При $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq 1$ справедливо включение $B(\varepsilon_1) \subseteq B(\varepsilon_2)$, поэтому

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(1/k)$$

и согласно (11) $\mathbf{P}(B') = \mathbf{P}(B) = 0$, откуда следует (9).

Для доказательства теорем 1–3 остается показать, что справедливо неравенство (10). Для этого прежде всего заметим, что

$$\mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^6 \leq 6! (\Sigma_1 + \dots + \Sigma_{11}), \quad (12)$$

(для краткости здесь и далее вместо $X(k, m)$ пишем X_k), где

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} X_i^6,$$

$$\Sigma_2 = \sum |\mathbf{M} X_i^5 X_j|$$

(во второй сумме суммирование проводится по всем i и j от 1 до n таким, что $i \neq j$),

$$\Sigma_3 = \sum |\mathbf{M} X_i^4 X_j X_k|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k от 1 до n таким, что $i \neq j, i \neq k, j < k$),

$$\Sigma_4 = \sum |\mathbf{M} X_i^4 X_j^2|$$

(как и для Σ_2 , суммирование проводится по всем i и j от 1 до n таким, что $i \neq j$),

$$\Sigma_5 = \sum |\mathbf{M} X_i^3 X_j^2 X_k|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k от 1 до n таким, что $i \neq j, i \neq k, j \neq k$),

$$\Sigma_6 = \sum_{k=1}^n |\mathbf{M} X_i^3 X_j^3|$$

(как для Σ_2 и Σ_4 , суммирование проводится по всем i и j от 1 до n таким, что $i \neq j$),

$$\Sigma_7 = \sum |\mathbf{M} X_i^2 X_j^2 X_k, 2|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k от 1 до n таким, что $i \neq j, j \neq k$),

$$\Sigma_8 = \sum |\mathbf{M} X_i^3 X_j X_k X_l|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k, l от 1 до n таким, что $i \neq j, i \neq k, i \neq l, j < k < l$),

$$\Sigma_9 = \sum |\mathbf{M} X_i^2 X_j^2 X_k X_l|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k, l от 1 до n таким, что $i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k < l$),

$$\Sigma_{10} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_u|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k, l, u от 1 до n таким, что $i \neq j, i \neq k, i \neq l, i \neq u, j < k < l < u$),

$$\Sigma_{11} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_u X_v|$$

(суммирование проводится по всем i, j, k, l, u, v от 1 до n таким, что $i < j < k < l < u < v$).

В силу тривиального неравенства

$$|X_k| \leq 1 \quad (13)$$

легко получаем, что

$$\Sigma_k \leq n^3, \quad k = 1, \dots, 7. \quad (14)$$

Оценим Σ_8 . Положим

$$\Sigma_{8,1} = \sum |\mathbf{M}X_i^3 X_j X_k X_l|,$$

где суммирование проводится по i, j, k, l тем же, что и для Σ_8 , но дополнительно удовлетворяющим условиям $l \neq m - i, l \neq m - j, l \neq m - k, l \neq m - l$. Нетрудно видеть, что $\Sigma_{8,1} = 0$, так как при указанных условиях случайная величина X_l не зависит от $X_i^3 X_j X_k$ и $\mathbf{M}X_l = 0$. Поэтому

$$\Sigma_8 \leq \Sigma_{8,2} + \Sigma_{8,3} + \Sigma_{8,4} + \Sigma_{8,5}$$

где в суммах $\Sigma_{8,2}, \dots, \Sigma_{8,5}$ суммирование проводится по тем же слагаемым, что и в Σ_8 , но при дополнительном условии $l = m - i, l = m - j, l = m - k, l = m - l$, соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\Sigma_{8,2} \leq \Sigma_3 \leq n^3,$$

$$\Sigma_{8,3} \leq \Sigma_5 \leq n^3,$$

$$\Sigma_{8,4} \leq \Sigma_5 \leq n^3.$$

Наконец,

$$\Sigma_{8,5} \leq \sum_{i,j,k=1}^n |\mathbf{M}X_i^3 X_j X_k X_{m/2}| \leq n^3$$

(при нецелых a мы полагаем $X_a = 0$). В результате получаем неравенство

$$\Sigma_8 \leq n^3. \quad (15)$$

Далее оценим Σ_9 . Для этого заметим, что

$$\Sigma_{9,1} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j^2 X_k X_l|,$$

где суммирование проводится по i, j, k, l тем же, что и в сумме Σ_9 , но при дополнительных условиях, что $l \neq m - i, l \neq m - j, l \neq m - k, l \neq m - l$, равна нулю, так как при этих условиях X_l не зависит от $X_i^2 X_j^2 X_k$ и $\mathbf{M}X_l = 0$. Поэтому

$$\Sigma_9 \leq \Sigma_{9,2} + \Sigma_{9,3} + \Sigma_{9,4} + \Sigma_{9,5}$$

где в суммах $\Sigma_{9,2}, \dots, \Sigma_{9,5}$ суммирование проводится по тем же слагаемым, что и в Σ_9 , но при дополнительном условии $l = m - i, l = m - j, l = m - k, l = m - l$, соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\Sigma_{9,2} &\leq \Sigma_5 \leq n^3, \\ \Sigma_{9,3} &\leq \Sigma_5 \leq n^3, \\ \Sigma_{9,4} &\leq \Sigma_7 \leq n^3, \\ \Sigma_{9,5} &\leq \sum_{i,j,k=1}^n |\mathbf{M}X_i^2 X_j^2 X_k X_{m/2}| \leq n^3.\end{aligned}$$

Объединяя эти оценки, получаем, что

$$\Sigma_9 \leq n^3. \quad (16)$$

Оценим теперь Σ_{10} . Как и выше, сумма

$$\Sigma_{10,1} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_u|,$$

где суммирование проводится по i, j, k, l тем же, что и в сумме Σ_{10} , но при дополнительных условиях, что $l \neq m - i, l \neq m - j, l \neq m - k, l \neq m - l$, равна нулю. Поэтому

$$\Sigma_{10} \leq \Sigma_{10,2} + \Sigma_{10,3} + \Sigma_{10,4} + \Sigma_{10,5} + \Sigma_{10,6},$$

где в суммах $\Sigma_{10,2}, \dots, \Sigma_{10,6}$ суммирование проводится по тем же слагаемым, что и в Σ_{10} , но при дополнительном условии $u = m - i, u = m - j, u = m - k, u = m - l, u = m - u$ соответственно. Ясно, что

$$\Sigma_{10,2} \leq \Sigma_8 \leq 4n_3$$

и при $t = 3, 4, 5$

$$\Sigma_{10,t} \leq \Sigma_9 \leq 4n^3.$$

Заметим, что

$$\Sigma_{10,6} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_{m/2}| = 0,$$

так как в условиях суммирования $j < k < l < m/2, i \neq m/2$ и поэтому

$$\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_{m/2} = \mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l \mathbf{M}X_{m/2}$$

и

$$\mathbf{M}X_j = \mathbf{M}X_k = \mathbf{M}X_l = 0.$$

Из трех индексов j, k, l только один может равняться i и один равняться $m - i$, а случайная величина с третьим из этих индексов будет независима от всех остальных и $\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l$ будет равняться нулю. Объединяя эти оценки, получаем, что

$$\Sigma_{10} \leq 4n^3 + 3 \cdot 4n^4 = 16n^3. \quad (17)$$

Остается оценить Σ_{11} . Прежде всего заметим, что сумма

$$\Sigma_{11,1} = \sum |\mathbf{M}X_i^2 X_j X_k X_l X_u|,$$

где суммирование проводится по всем i, j, k, l, u от 1 до n таким, что $i < j < k < l < u < v$ и $v \neq m - i, v \neq m - j, v \neq m - k, v \neq m - l, v \neq m - u, v \neq m - v$, равна нулю. Стало быть

$$\Sigma_{11} \leq \sum_{t=2}^7 \Sigma_{11,t},$$

где в суммах $\Sigma_{11,2}, \dots, \Sigma_{11,7}$ суммирование проводится по тем же слагаемым, что и в Σ_{11} , но при дополнительном условии $v = m - i, v = m - j, v = m - k, v = m - l, v = m - u, v = m - v$, соответственно. Ясно, что

$$\Sigma_{11,t} \leq \Sigma_{10} \leq 16n^3, \quad t = 2, \dots, 6.$$

Заметим также, что

$$\Sigma_{11,7} = \sum |\mathbf{M}X_i X_j X_k X_l X_u X_{m/2}| = 0$$

(суммирование проводится по всем i, l, k, l, u от 1 до n таким, что $i < j < k < l < u < m/2$), поскольку

$$\mathbf{M}X_i = \mathbf{M}X_j = \mathbf{M}X_k = \mathbf{M}X_l = \mathbf{M}X_u = 0$$

и случайные величины $X_i, X_j, X_k, X_l, X_u, X_{m/2}$ независимы в совокупности, так как сумма любой пары индексов из $\{i, j, k, l, u\}$ меньше m . В результате получаем оценку

$$\Sigma_{11} \leq 80n^3. \quad (18)$$

Объединяя оценки (12) и (14)–(18), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\sum X_k \right)^6 &\leq 6! n^3 (7 + 4 + 4 + 16 + 80) \\ &= 6! 111n^3. \end{aligned}$$

Теоремы 1–3 доказаны.

Список литературы

1. Бендер Э. А., Асимптотические методы в теории перечислений. В кн: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, 266–310.
2. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е., О некоторых классах случайных величин на циклах случайных подстановок. *Матем. сб.* (1979) **108**, №1, 91–104.
3. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики. *Изв. АН СССР, серия матем.* (1944) **8**, 3–48.
4. Колчин А. В., *Суммы независимых случайных величин и некоторые комбинаторные задачи*. Канд. диссертация, МГУ, Москва, 1994.
5. Колчин В. Ф., О числе подстановок с ограничениями на длины циклов. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 97–109.
6. Павлов А. И., О числе циклов и цикловой структуре подстановок некоторых классов. *Матем. сб.* (1984) **124**, №4, 536–556.
7. Павлов А. И., О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. сб.* (1986) **129**, №2, 252–263.

8. Павлов А. И., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Теория вероятн. и ее примен.* (1986) **31**, №3, 618–619.
9. Павлов А. И., О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1991) **3**, №1, 109–123.
10. Павлов А. И., О числе подстановок с конечным множеством длин циклов. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1994) **207**, 256–267.
11. Павлов А. И., О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. *Матем. заметки* (1997) **62**, №6, 881–891.
12. Якимив А. Л., О числе A -подстановок. *Матем. сб.* (1989) **100**, №2, 294–303.
13. Якимив А. Л., О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 125–134.
14. Якимив А. Л., О случайных подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Вероятностные процессы и их применения*. МИЭМ, Москва, 24–27.
15. Якимив А. Л., О некоторых классах подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 128–134.
16. Grusho A. A., Properties of random permutations with constrains on the maximum cycle length. *Proc. Third Intern. Petrozavodsk Conf. on Probab. Methods in Discrete Math.*, 1993, 459–469.
17. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 25.04.2000.