Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Буравлев, Повторения с точностью до перестановок
в последовательности независимых испытаний, *Дискрет.
матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 53–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:17:18

УДК 519.2

Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний

© 1999 г. С. М. Буравлев

В работе изучаются случайные характеристики, связанные с повторениями отрезков с точностью до перестановки исходов, в последовательности независимых полиномиальных испытаний. Результаты работы являются обобщением аналогичных результатов для точных повторений, которые были получены А. М. Зубковым и В. Г. Михайловым.

1. Постановка задачи. Основные результаты

Пусть $X = x_1, x_2, \dots, x_N$ — последовательность независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных величин, принимающих значения из множества $A = \{1, 2, \dots, v\}$, и

$$\mathbf{P}(x_i = s) = p_s(N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, v, \quad \bar{p} = (p_1(N), \dots, p_v(N)).$$

В дальнейшем для краткости $p_s(N)$ будем обозначать через p_s .

Пусть S_v — симметрическая группа подстановок вида

$$Z = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & v \\ s_1, & \dots, & s_v \end{pmatrix}.$$

Определим при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N-n+1$, случайные величины $\eta_{ij}(S_v, n)$, полагая

$$\eta_{ij}(S_v, n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует такая подстановка } Z \in S_v, \\ & \text{что } x_{j+t} = Z(x_{i+t}), \quad t = 0, 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [1] исследовались предельные распределения случайных величин, связанных с повторениями в последовательности независимых испытаний. В этом случае соответствующая случайная величина $\eta_{ij}(n) = 1$, если $x_{j+t} = x_{i+t}$, $t = 0, 1, \dots, n-1$, то есть связь знаков отрезков определялась одной тождественной подстановкой

$$Z = E = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & v \\ 1, & \dots, & v \end{pmatrix}.$$

Определим следующие случайные величины (с. в.):

$$\xi(S_v, n, N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \eta_{ij}(S_v, n), \quad (1)$$

равную числу пар отрезков длины n , связанных подстановками из S_v , в последовательности X ;

$$\tau(S_v, n) = \min\{N: \xi(S_v, n, N) > 0\}, \quad (2)$$

равную длине последовательности X , содержащей ровно одну пару отрезков длины n , связанных подстановками из S_v ;

$$\mu(S_v, n) = \max\{n: \xi(S_v, n, N) > 0\}, \quad (3)$$

равную максимальной длине пары отрезков в последовательности X , связанных подстановками из S_v .

Теорема 1. Пусть $\bar{p} = (1/v, \dots, 1/v)$, $\Delta = v!/v^n$. Если $n/v \geq \ln v + 1$, то

$$\lambda(n, v, N) = \frac{\binom{n}{2}}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) ((v)_m)^2 < \binom{N}{2} \Delta,$$

где $\sigma(n, m)$ — числа Стирлинга второго рода, и при $N, n, v \rightarrow \infty$ так, что параметр $\lambda(n, v, N) \rightarrow \lambda > 0$,

$$\mathbf{P}(\xi(S_v, n, N) = s) \rightarrow \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}$$

для любого фиксированного $s = 0, 1, \dots$

Если при этом $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, то $\lambda(n, v, N) \sim \binom{N}{2} \Delta$.

Следствие 1. Пусть $\bar{p} = (1/v, \dots, 1/v)$, $\Delta = v!/v^n$. Если $n/v \geq \ln v + 1$ и $n, v \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{1}{v! v^n} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m) ((v)_m)^2 \rightarrow \theta, \quad \theta \in (0, \infty),$$

то

$$\mathbf{P}(\sqrt{\Delta} \tau(S_v, n) \leq x) \rightarrow 1 - \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \theta \right\}$$

для любого действительного $x > 0$.

Если $n, v \rightarrow \infty$ так, что $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\sqrt{\Delta} \tau(S_v, n) \leq x) \rightarrow 1 - \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}.$$

Теорема 2. Пусть $N, v \rightarrow \infty$, $N^2 v! \geq v^{v \ln v + v}$, $\bar{p} = (1/v, \dots, 1/v)$. Тогда

(а) если

$$\left| \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} - \left\langle \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} \right\rangle \right| \ln v \rightarrow \infty,$$

где $\langle x \rangle$ — ближайшее целое к x , то

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = [\ln(N^2 v!)/\ln v]) \rightarrow 1;$$

(b) если

$$\left(\frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} - \left\langle \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} \right\rangle \right) \ln v = O(1),$$

$$\lambda(\langle k \rangle, v, N) = \binom{N}{2} \frac{1}{v^{2\langle k \rangle}} \sum_{m=1}^v \sigma(\langle k \rangle, m) ((v)_m)^2 \rightarrow \lambda, \quad k = \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v},$$

или

$$\left(\frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} - \left\langle \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v} \right\rangle \right) \ln v \rightarrow \ln(2\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty,$$

$$N^2 v! > v^{v(\ln v + \omega(v))}, \quad \omega(v) \rightarrow \infty,$$

то

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = \langle \ln(N^2 v!) / \ln v \rangle - 1) \rightarrow e^{-\lambda},$$

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = \langle \ln(N^2 v!) / \ln v \rangle) \rightarrow 1 - e^{-\lambda}.$$

Введем обозначения

$$p^* = \max_{1 \leq i \leq v} p_i, \quad (4)$$

$$\delta(n, v, \bar{p}) = \sum_{m=1}^v \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n, \\ \alpha_1, \dots, \alpha_m > 0}} \frac{n! m!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq v} p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_m}^{\alpha_m} \right)^2.$$

Теорема 3. Пусть

$$\Delta' = (p^*)^{2n} v^n v!, \quad p^* v \leq c < e^{1/2},$$

вероятности $\bar{p} = (p_1, \dots, p_v)$ определяют полиномиальную схему, $n/v \geq \ln v + 1$. Если $N, n, v \rightarrow \infty$ так, что $\binom{N}{2} \Delta' = O(1)$ и

$$\lambda(n, v, \bar{p}, N) = \binom{N}{2} \delta(n, v, \bar{p}) \rightarrow \lambda > 0,$$

то для любого фиксированного $s = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}(\xi(S_v, n, N) = s) \rightarrow \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}.$$

Следствие 2. Пусть

$$\bar{p} = (p_1, \dots, p_v), \quad \Delta' = (p^*)^{2n} v^n v!, \quad p^* v \leq c < e^{1/2}, \quad n/v \geq \ln v + 1.$$

Если $n, v \rightarrow \infty$ так, что $\Delta' \delta(n, v, \bar{p})^{-1} = O(1)$, то

$$\mathbf{P}(\sqrt{\delta(n, v, \bar{p})} \tau(S_v, n) \leq x) \rightarrow 1 - \exp\{-x^2/2\}.$$

для любого фиксированного $x > 0$.

Теорема 4. Пусть $N, v \rightarrow \infty$ так, что $p^* v \leq c < e^{1/2}$, $N^2 v! \geq v^{v \ln v + v}$, тогда

(a) если

$$\left| \frac{\ln(N^2 v!)}{|\ln((p^*)^2 v)|} - \left\langle \frac{\ln(N^2 v!)}{|\ln((p^*)^2 v)|} \right\rangle \right| |\ln((p^*)^2 v)| \rightarrow \infty,$$

то

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = \lfloor \ln(N^2 v!) / |\ln((p^*)^2 v)| \rfloor) \rightarrow 1;$$

(b) если

$$\left(\frac{\ln(N^2 v!)}{|\ln((p^*)^2 v)|} - \left\langle \frac{\ln(N^2 v!)}{|\ln((p^*)^2 v)|} \right\rangle \right) |\ln((p^*)^2 v)| = O(1),$$

$$\binom{N}{2} \delta(\langle k \rangle, v, \bar{p}) \rightarrow \lambda > 0, \quad \binom{N}{2} (p^*)^{2\langle k \rangle} v^{\langle k \rangle} v! = O(1), \quad k = \frac{\ln(N^2 v!)}{|\ln((p^*)^2 v)|},$$

то

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = \langle \ln(N^2 v!) / |\ln((p^*)^2 v)| \rangle - 1) \rightarrow e^{-\lambda},$$

$$\mathbf{P}(\mu(S_v, N) = \langle \ln(N^2 v!) / |\ln((p^*)^2 v)| \rangle) \rightarrow 1 - e^{-\lambda}.$$

Замечание 1. Теорему 1 можно получить как следствие теоремы 3. Однако непосредственное доказательство теоремы 3 было бы более длинным из-за громоздкости формул и выкладок.

2. Доказательство теоремы 1

При доказательстве будем использовать известный метод [2] доказательства сходимости к закону Пуассона и придерживаться в ряде случаев схемы, изложенной в [1]. Для краткости случайные величины (1)–(3) будем, соответственно, обозначать через $\xi(n, N)$, $\tau(n)$, $\mu(N)$ а $\eta_{ij}(S_v, n)$ через $\eta_{ij}(n)$.

Для доказательства сходимости распределения случайной величины $\xi(n, N)$ к пуассоновскому [2] достаточно показать, что выполнены следующие соотношения:

$$\max_{i,j} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \rightarrow \lambda; \quad (5)$$

для любого фиксированного целого $r \geq 2$

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_r j_r}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_r j_r}(n) = 1) \rightarrow 0, \quad (7)$$

где $I_r(n, N) = \{ \{(i_k, j_k), 1 \leq i_k < j_k \leq N - n + 1, k = 1, \dots, r\} : (i_{k_1}, j_{k_1}) \neq (i_{k_2}, j_{k_2}), \text{ если } k_1 \neq k_2 \text{ хотя бы два из } 2r \text{ отрезков } [i_k, \dots, i_k + n - 1], [j_k, \dots, j_k + n - 1] \text{ пересекаются} \}$ — множество наборов упорядоченных пар; для каждого фиксированного $r = 2, 3, \dots$

$$\frac{\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_k j_k}(n) = 1)}{\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_k j_k}(n) = 1)} \rightarrow 1 \quad (8)$$

равномерно по всем наборам попарно различных пар натуральных чисел $\alpha_r = \{(i_k, j_k), 1 \leq i_k < j_k \leq N - n + 1, k = 1, \dots, r\} \notin I_r(n, N)$.

В нашем случае, если $\alpha_r \notin I_r(n, N)$, то есть если $2r$ отрезков попарно не пересекаются, то в силу независимости элементов последовательности X

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_k j_k}(n) = 1) = \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_k j_k}(n) = 1),$$

и соотношение (8) есть точное равенство.

Введем следующие обозначения: пусть $\sigma(k, m)$ — числа Стирлинга второго рода, то есть

$$x^k = \sum_{m=0}^k \sigma(k, m)(x)_m, \quad (x)_m = x(x-1)\dots(x-m+1);$$

$X^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in A, i = 1, \dots, k\}$ — множество упорядоченных k -выборок элементов множества A , $|X^{(k)}| = v^k$; $X_m^{(k)}$ — множество k -выборок элементов множества A , $|X_m^{(k)}| = v^k$;

$$X_m^{(k)} \subseteq X^{(k)}, \quad X^{(k)} = \bigcup_{m=1}^{\min(k, v)} X_m^{(k)}, \quad |X_m^{(k)}| = (v)_m \sigma(k, m);$$

$X_i(n) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1})$, $i = 1, 2, \dots, N - n + 1$, — случайная n -выборка элементов множества A , начинающаяся с i -го места в последовательности X .

Так как для любой n -выборки, содержащей ровно m различных элементов множества A , существует $(v)_m$ n -выборок, связанных с ней подстановками из симметрической группы S_v , то

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 i_2}(n) = \eta_{i_2 i_3}(n) = \dots = \eta_{i_{c-1} i_c}(n) = 1) = \frac{1}{v^{cn}} \sum_{m=1}^{\min(n, v)} \sigma(n, m)((v)_m)^c \quad (9)$$

при $1 \leq i_1 < i_1 + n - 1 < i_2 < i_2 + n - 1 < \dots < i_{c-1} + n - 1 < i_c < i_c + n - 1 \leq N$.

В частности, при $c = 2$, $v \leq n$, $j - 1 \geq n$,

$$\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) = \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2. \quad (10)$$

Доказательство выполнения условий (5)–(7) разобьем на леммы.

Лемма 1. Если $n, v \rightarrow \infty$ и $n/v \geq \ln v + 1$, то

$$\frac{v!}{v^n} \exp\{-e^{-1}\} < \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 < \frac{v!}{v^n} = \Delta,$$

и при $\lambda(n, v, N) \rightarrow \lambda > 0$

$$\binom{N}{2} \Delta < \lambda (\exp\{-e^{-1}\})^{-1}.$$

Если $n, v \rightarrow \infty$ так, что $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 = \Delta(1 + o(1)),$$

и $\binom{N}{2} \Delta \rightarrow \lambda$ при $\lambda(n, v, N) \rightarrow \lambda > 0$.

Доказательство. При $v \geq 2$ очевидна двусторонняя оценка

$$\sigma(n, v)(v!)^2 < \sum_{m=1}^v |X_m^{(n)}|(v)_m < v!v^n.$$

Так как $n, v \rightarrow \infty$ и $v = o(n)$, воспользовавшись асимптотической формулой [3]

$$\sigma(n, v) = \frac{v^n}{v!} \exp\{-ve^{-n/v}\}(1 + O(n^{-3})), \quad (11)$$

и оценкой $\exp\{-ve^{-n/v}\} \geq \exp\{e^{-1}\}$ при $n/v \geq \ln v + 1$, получаем необходимые двусторонние оценки и ограниченность величины $\binom{N}{2}\Delta$.

Если $n/v - \ln v \rightarrow \infty$, то из (11) следует, что

$$\sigma(n, v)(v!)^2 = v^n v! \exp\{-ve^{-n/v}\}(1 + o(1)) = v^n v!(1 + o(1))$$

и $\binom{N}{2}\Delta \rightarrow \lambda$.

Если $\lambda(n, v, N) \rightarrow \lambda > 0$, то из неравенства $\ln \left(\binom{N}{2}\Delta \right) \geq \ln \lambda$ следует, что

$$n \leq \frac{2 \ln N + \ln v! - \ln(2\lambda)}{\ln v}.$$

Так как $v = o(n)$ и $n < N$, то $v = o(N)$, и, учитывая неравенство $v! < v^n$, получаем, что

$$\frac{n}{N} < \frac{2 \ln N + v \ln v - \ln(2\lambda)}{N \ln v} \rightarrow 0. \quad (12)$$

Лемма 2. Если $j - i < n$, то

$$\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \leq \Delta.$$

Доказательство. Условие $j - i < n$ означает, что соответствующие отрезки $X_i(n)$ и $X_j(n)$ зацепляются. Необходимым и достаточным условием выполнения события $\{\eta_{ij}(n) = 1\}$ является выполнение равенств $x_{i+t} = Z(x_{j+t})$, $t = 0, 1, \dots, n-1$, для некоторой подстановки $Z \in S_v$. Графически это выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+s-1} & x_{i+s} & x_{i+s+1} & \dots & x_{i+n-1} \\ & & & & \parallel & \parallel & & \parallel \\ & & & & x_j & x_{j+1} & \dots & x_{j+n-1-s} & x_{j+n-s} & \dots & x_{j+n-1}, \end{array}$$

где $s = j - i < n$, $x_{i+s} = x_j$, $x_{i+s+1} = x_{j+1}$, $\dots$, $x_{i+n-1} = x_{j+n-1-s}$.

Тогда величины $x_i, \dots, x_{i+s-1}$ являются свободными (на них не накладывается никаких ограничений), а остальные величины $x_j, \dots, x_{j+n-1}$ однозначно определяются свободными и некоторой подстановкой Z . Так как таких подстановок имеется не более $v!$, получаем верхнюю оценку для искомой вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \leq \frac{v^s v!}{v^{s+n}} = \Delta, \quad j - i < n.$$

С помощью (10), лемм 1, 2 и (12) легко проверяются соотношения (5). Так как

$$\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \leq \Delta, \quad \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 \leq \Delta,$$

то

$$\left| \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) - \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 \right| \leq \Delta,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq N-n+1} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N-n+1 \\ j-i \geq n}} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N-n+1 \\ j-i < n}} \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 \\ & \quad + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N-n+1 \\ j-i < n}} \left(\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) - \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 \right) \\ &= \binom{N}{2} \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 + O(nN\Delta) \rightarrow \lambda. \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что

$$\mathbf{E}\xi(n, N) = \binom{N}{2} \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^2 + O(nN\Delta) = \lambda(n) + o(1). \quad (13)$$

Для краткости $\lambda(n, v, N)$ обозначено через $\lambda(n)$.

Для слагаемых в (7) имеет место оценка

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_r j_r}(n) = 1) \leq \Delta^r,$$

и так как $|I_r(n, N)|$ имеет порядок $O(nN^{2r-1})$ (см. [1]), учитывая (12), находим, что

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_r j_r}(n) = 1) = O(\Delta^r n N^{2r-1}) = O\left(\frac{n}{N}\right) = o(1).$$

Осталось проверить условие (6). Каждому набору $\alpha_r = \{(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, r\}$ из $I_r(n, N)$ сопоставим множество

$$U(\alpha_r) = \bigcup_{k=1}^r ([i_k, i_k + n - 1] \cup [j_k, j_k + n - 1]),$$

где $[l, t] = \{l, l+1, \dots, t\}$. Обозначим через $A(\alpha_r)$ число связанных компонент (отрезков) множества $U(\alpha_r)$; очевидно, что $1 \leq A(\alpha_r) \leq 2r - 1$, если $\alpha_r \in I_r(n, N)$.

Две компоненты связности множества $U(\alpha_r)$ будем называть симметричными, если $\{(\gamma_s, \beta_s), s = 1, 2, \dots, t\} \in \alpha_r$, отрезки с началами $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ и $\beta_1, \dots, \beta_t$ образуют по одной компоненте связности соответственно и не присутствуют в других парах набора α_r , других начал отрезков в этих компонентах связности нет, и

$$\gamma_k - \gamma_s = \beta_k - \beta_s, \quad k \neq s, \quad k, s = 1, 2, \dots, t. \quad (14)$$

Величину t будем называть длиной симметричных компонент связности; при $t = 1$ отрезки $[\gamma_1, \gamma_1 + n - 1]$ и $[\beta_1, \beta_1 + n - 1]$ образуют изолированные компоненты связности.

Введем следующие обозначения, пусть

$$P(\alpha_r) = \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_r j_r}(n) = 1);$$

$J_t(n, N) = \{(\gamma_s, \beta_s), 1 \leq \gamma_s < \beta_s \leq N - n + 1, s = 1, 2, \dots, t\}$ — множество всевозможных наборов, образующих симметричные компоненты связности длины t , $2 \leq t \leq r$; $I_{r,1}(n, N)$ — множество наборов $\alpha_r \in I_r(n, N)$, состоящих только из симметричных компонент связности; $I_{r,1}(a_1, \dots, a_r; n, N)$ — множество наборов $\alpha_r \in I_{r,1}(n, N)$, состоящих из a_t симметричных компонент связности длины t , $t = 1, 2, \dots, r$; так как $I_{r,1}(n, N) \subset I_r(n, N)$, в $I_{r,1}(n, N)$ существует хотя бы одна симметричная компонента связности длины, большей единицы, и поэтому

$$a_1 + 2a_2 + \dots + ra_r = r, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 + \dots + a_r > 0;$$

$$I_{r,2}(n, N) = I_r(n, N) \setminus I_{r,1}(n, N).$$

Так как

$$\begin{aligned} I_r(n, N) &= I_{r,1}(n, N) \cup I_{r,2}(n, N), \\ I_{r,1}(n, N) \cap I_{r,2}(n, N) &= \emptyset, \end{aligned}$$

для доказательства (6) достаточно показать, что для любого $r \geq 2$

$$\sum_{I_{r,1}(n, N)} P(\alpha_r) \rightarrow 0, \quad \sum_{I_{r,2}(n, N)} P(\alpha_r) \rightarrow 0.$$

Множество пар $\alpha_r \in I_{r,1}(a_1, \dots, a_r; n, N)$ можно разбить на подмножества пар, соответствующих симметричным компонентам связности:

$$\alpha_r = \bigcup_{t=1}^r \bigcup_{j=1}^{a_t} \alpha_t^{(j)},$$

поэтому

$$I_{r,1}(a_1, \dots, a_r; n, N) \subset (J_1(n, N))^{a_1} \times \dots \times (J_r(n, N))^{a_r}$$

Далее, учитывая независимость элементов последовательности X и последнее соотношение, находим, что

$$P(\alpha_r) = \prod_{t=1}^r \prod_{j=1}^{a_t} P(\alpha_t^{(j)}), \quad \alpha_r \in I_{r,1}(a_1, \dots, a_r; n, N),$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{I_{r,1}(n, N)} P(\alpha_r) &= \sum_{\substack{a_1 + 2a_2 + \dots + ra_r = r \\ a_1 \geq 0, a_2 + \dots + a_r > 0}} \sum_{I_{r,1}(a_1, \dots, a_r; n, N)} \prod_{t=1}^r \prod_{j=1}^{a_t} P(\alpha_t^{(j)}) \\ &< \sum_{\substack{a_1 + 2a_2 + \dots + ra_r = r \\ a_1 \geq 0, a_2 + \dots + a_r > 0}} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N - n + 1} P(\alpha_1) \right)^{a_1} \prod_{t=2}^r \left(\sum_{J_t(n, N)} P(\alpha_t) \right)^{a_t}. \end{aligned}$$

В силу конечности числа сумм в последнем неравенстве для доказательства того, что

$$\sum_{I_{r,1}(n,N)} P(\alpha_r) \rightarrow 0,$$

достаточно показать, что

$$\sum_{J_r(n,N)} P(\alpha_r) \rightarrow 0$$

для каждого фиксированного $r \geq 2$.

Определим множества

$$I_r^{(a)}(n, N) = \{\alpha_r \in I_{r,2}(n, N) : A(\alpha_r) = a\},$$

тогда (см. [1])

$$I_{r,2}(n, N) = \bigcup_{a=1}^{2r-1} I_r^{(a)}(n, N), \quad |I_r^{(a)}(n, N)| = O(n^{2r-a} N^a).$$

Лемма 3. Если $\alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N)$, то

$$P(\alpha_r) \leq \Delta^{(a+1)/2}, \quad 1 \leq a \leq 2r-1.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу r . Пусть $r = 2$ и

$$\alpha_2 = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \in I_2^{(a)}(n, N), \quad 1 \leq a \leq 3.$$

Необходимым и достаточным условием осуществления события

$$\{\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1\}$$

является выполнение равенств

$$x_{i_k+t} = Z_k(x_{j_k+t}), \quad Z_k \in S_v, \quad k = 1, 2, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (15)$$

Обозначим через w число различных неизвестных, участвующих в системе (15). Если число свободных неизвестных в (15) равно w' , то остальные однозначно определяются ими и подстановками Z_1 и Z_2 , которых существует не более $(v!)^2$. Поэтому для оценки вероятности $P(\alpha_2)$ можно использовать неравенство

$$P(\alpha_2) \leq v^{w'-w} (v!)^2. \quad (16)$$

Пусть $a = 1$. В этом случае очевидно, что

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) \leq \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1).$$

Поэтому из соотношения (10) и леммы 2 следует, что $P(\alpha_2) \leq \Delta$.

Пусть $a = 2$. Для определенности положим $i_1 \leq i_2$. Возможны три случая.

1. Если $[i_1, j_1 + n - 1] \cap [i_2, j_2 + n - 1] = \emptyset$, то

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) = \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \mathbf{P}(\eta_{i_2 j_2}(n) = 1) \leq \Delta^2 < \Delta^{3/2}.$$

2. Один из четырех отрезков является изолированным, а остальные три зацепляются между собой. Положим для определенности, что это отрезок с началом i_1 и $j_1 < i_2$. Графически этот случай можно изобразить следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} i_1 & & \dots & & i_1 + n - 1 & \dots & & & & & & & & & & & \\ \dots & j_1 & \dots & i_2 & \dots & * & \dots & j_1 + n - 1 & \dots & * & \dots & i_2 + n - 1 & \dots & j_2 + n - 1. \end{array}$$

Символом $*$ обозначены допустимые положения начала отрезка j_2 .

В обоих случаях, $j_2 < j_1 + n - 1$ или $j_2 > j_1 + n - 1$, в качестве свободных переменных в (15) можно выбрать $x_{j_1}, \dots, x_{j_2-1}$, поэтому

$$w' = j_2 - j_1, \quad w = 2n + j_2 - j_1$$

и из (16) следует, что $P(\alpha_2) \leq \Delta^2 < \Delta^{3/2}$.

3. Компоненты связности $U(\alpha_2)$ образуются из отрезков разных пар. Пусть, например, $i_1 \leq i_2$ и $j_1 < j_2$:

$$i_1 \quad \dots \quad i_2 \quad \dots \quad i_1 + n - 1 \quad \dots \quad i_2 + n - 1 \quad \dots \quad j_1 \quad \dots \quad * \quad \dots \quad j_1 + n - 1 \quad \dots$$

Символом $*$ обозначены допустимые положения начала отрезка j_2 .

Тогда, если $j_2 - j_1 > i_2 - i_1$ (при $i_1 \leq i_2$), то в качестве свободных переменных выбираем $x_{j_1}, \dots, x_{j_2-1}$, и

$$w' = j_2 - j_1, \quad w = 2n + j_2 - j_1;$$

если $j_2 - j_1 < i_2 - i_1$ (при $i_1 < i_2$), то выбираем $x_{i_1}, \dots, x_{i_2-1}$, и

$$w' = i_2 - i_1, \quad w = 2n + i_2 - i_1,$$

поэтому $P(\alpha_2) \leq \Delta^2 < \Delta^{3/2}$.

Заметим, что так как $\alpha_2 \notin I_{2,2}(n, N)$, то $i_2 - i_1 \neq j_2 - j_1$, в противном случае, то есть при $i_2 - i_1 = j_2 - j_1$, оценка (16) не верна. Действительно, так как $w' = i_2 - i_1 + n$, $w = 2(i_2 - i_1 + n)$, справедливо неравенство

$$P(\alpha_2) < \Delta^2 v^{n-i_2+i_1}, \quad n - i_2 + i_1 > 0. \quad (17)$$

Случай $j_2 > j_1$ рассматривается аналогично, при $i_2 - i_1 = j_1 - j_2$ исключения вида (17) не происходит.

При $a = 3$ возможны три случая.

1. Если одной из трех связанных компонент $U(\alpha_2)$ является $[i_1, j_1 + n - 1]$ или $[i_2, j_2 + n - 1]$, то согласно (10) и леммам 1 и 2

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_2 j_2}(n) = 1) = \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \mathbf{P}(\eta_{i_2 j_2}(n) = 1) \leq \Delta^2.$$

2. Пусть максимальная по длине компонента $U(\alpha_2)$ содержит $n + s$, $s < n$, целочисленных точек и является объединением отрезков, начала которых принадлежат разным парам из α_2 . Графически этот случай можно изобразить следующим образом (для определенности полагаем $j_1 < i_2$, $i_2 - j_1 = s$):

$$\begin{array}{cccccccc} i_1 & \dots & i_1 + s & \dots & i_1 + n - 1 & \dots & & \\ \dots & j_1 & \dots & i_2 & \dots & j_1 + n - 1 & \dots & i_2 + n - 1 \dots \\ & & & j_2 & \dots & & & j_2 + n - 1 \end{array}$$

В этом случае в (15) можно выбрать $x_{j_1}, \dots, x_{i_2+n-1}$ в качестве свободных переменных, поэтому $w' = n + s$, а $w = 3n + s$, и из (16) следует, что $P(\alpha_2) \leq \Delta^2$.

3. Рассмотрим случай, когда какие-нибудь два начала отрезков из пар (i_1, j_1) и (i_1, j_2) совпадают, например, $i_1 = i_2$, $j_1 \neq j_2$. В этом случае знаки трех непересекающихся отрезков попарно связаны подстановками из S_v . Из (9) при $c = 3$ следует, что

$$\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_1 j_2}(n) = 1) = \frac{1}{v^{3n}} \sum_{m=1}^v \sigma(n, m)((v)_m)^3.$$

Используя оценку

$$\sum_{m=1}^v |X_m^{(n)}|((v)_m)^2 < v^2(v!)^2,$$

получаем, что $\mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = \eta_{i_1 j_2}(n) = 1) < \Delta^2$.

Таким образом, при $r = 2$ оценки для вероятности $P(\alpha_2)$ получены. Предположим, что они выполняются для всех $\alpha_r \in I_{r,2}(n, N)$, и рассмотрим наборы индексов

$$\alpha_{r+1} = \{(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, r+1\} \in I_{r+1,2}(n, N).$$

Из определения множества $I_{r+1,2}(n, N)$ следует, что при $r \geq 2$ для любого набора $\alpha_{r+1} \in I_{r+1,2}(n, N)$ существует пара $(i_k, j_k) \in \alpha_{r+1}$ такая, что $\alpha_{r+1} \setminus (i_k, j_k) \in I_{r,2}(n, N)$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_r = \{(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, r\} \in I_{r,2}(n, N)$, а для вероятности $P(\alpha_r)$ верны предположения индукции.

Возможны следующие случаи:

- (a) $a' = A(\alpha_{r+1}) \leq A(\alpha_r) = a$;
- (b) $a' = a + 2$;
- (c) $a' = a + 1$.

В случаях (a) и (b) очевидно, что соответственно

$$\begin{aligned} P(\alpha_{r+1}) &\leq P(\alpha_r) \leq \Delta^{(a+1)/2} \leq \Delta^{(a'+1)/2}, \\ P(\alpha_{r+1}) &= P(\alpha_r) \mathbf{P}(\eta_{i_{r+1} j_{r+1}}(n) = 1) \leq \Delta^{(a+3)/2} \leq \Delta^{(a'+1)/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай (c). Если $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1] \cap [j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1] \neq \emptyset$, то

$$P(\alpha_{r+1}) = P(\alpha_r) \mathbf{P}(\eta_{i_{r+1} j_{r+1}}(n) = 1) \leq \Delta^{(a+1)/2} \Delta = \Delta^{(a'+1)/2} \Delta^{1/2} < \Delta^{(a'+1)/2}.$$

Пусть $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1] \cap [j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1] = \emptyset$ и $s = |U(\alpha_r) \cap [i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]|$ (случай пересечения $U(\alpha_r)$ с $[j_{r+1}, j_{r+1} + n - 1]$ рассматривается аналогично).

Можно пронумеровать отрезки так, что при $a' = a + 1$ пересечение $U(\alpha_r)$ с отрезком $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]$ будет по точкам $i_{r+1}, \dots, i_{r+1} + s - 1$, $0 < s \leq n$ ($i_r = i_{r+1}$ при $s = n$):

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & i_{r+1} & \dots & i_{r+1} + s - 1 & i_{r+1} + s & \dots & i_{r+1} + n - 1 & \dots \\ \dots & j_{r+1} & \dots & j_{r+1} + s - 1 & j_{r+1} + s & \dots & j_{r+1} + n - 1 & \dots \end{array}$$

(Аналогично рассматривается случай, когда пересечение $U(\alpha_r)$ с $[i_{r+1}, i_{r+1} + n - 1]$ происходит по хвосту отрезка.)

Величины $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{r+1}+s-1}$ однозначно определяются некоторой подстановкой и величинами $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_{r+1}+s-1}$, для набора $x_{i_{r+1}+s}, \dots, x_{i_{r+1}+n-1}$ существует не более v^{n-s} способов выбора, а для набора $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_{r+1}+n-1}$ не более $v!$ способов, поэтому

$$P(\alpha_{r+1}) = P(\alpha_r, \eta_{i_{r+1}j_{r+1}}(n) = 1) \leq P(\alpha_r) \frac{v^{n-s}v!}{v^{2n-s}} = \Delta^{(a+1)/2} \Delta < \Delta^{(a'+1)/2}.$$

Таким образом, лемма 3 доказана.

Если $n/v \geq \ln v + 1$, то

$$\begin{aligned} \ln(n^t \Delta) &< (v-n) \ln v + t \ln n = (v-n + \ln n) \ln v + (t - \ln v) \ln n \\ &\leq -(n - \ln n - n/(\ln v + 1)) \ln v + (t - \ln v) \ln n, \end{aligned}$$

и правая часть стремится к $-\infty$ при $n, v \rightarrow \infty$, откуда следует, что для любого фиксированного натурального t

$$n^t \Delta \rightarrow 0. \quad (18)$$

Из леммы 3, соотношения $N \Delta^{1/2} n^{-1} \rightarrow 0$ и (18) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{I_{r,2}(n,N)} P(\alpha_r) &= \sum_{a=1}^{2r-1} \sum_{I_r^{(a)}(n,N)} P(\alpha_r) < \sum_{a=1}^{2r-1} \sum_{I_r^{(a)}(n,N)} \Delta^{(a+1)/2} \\ &= O \left(\sum_{a=1}^{2r-1} n^{2r-a} N^a \Delta^{(a+1)/2} \right) = O(n^{2r-1} \Delta N) = O(n^{2r-1} \Delta^{1/2}) = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$\sum_{J_r(n,N)} P(\alpha_r) \rightarrow 0.$$

Оценим вероятность $P(\alpha_r)$ для $\alpha_r \in J_r(n, N)$. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 4. Если $n, v \rightarrow \infty$ и $n/N \geq \ln v + 1$, то

$$\frac{v!}{v^n} \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m) = O(1/v).$$

Доказательство. Разобьем область суммирования по параметру d на две суммы и оценим каждую из них.

Пусть $2 \leq d \leq n - v \ln v$, тогда $v \ln v \leq n - d \leq n - 2$. В этом случае $v = o(n - d)$ и для оценки $\sigma(n - d, m)$ можно воспользоваться соотношением (11). Рассмотрим следующее отношение:

$$\begin{aligned} \frac{m^{n-d}}{m!} \frac{(m+1)!}{(m+1)^{n-d}} &= (m+1) \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{n-d} < v \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{n-d} \\ &= v \exp \left\{ (n-d) \ln \left(1 - \frac{1}{v}\right) \right\} < v \exp \left\{ -\frac{n-d}{v} \right\} < v \exp \left\{ -\frac{v \ln v}{v} \right\} = 1. \end{aligned}$$

Так как в рассматриваемых пределах изменения параметров

$$\frac{m^{n-d}}{m!} \frac{(m+1)!}{(m+1)^{n-d}} < 1,$$

заменяя множитель $m^{n-d}/m!$ на максимальное значение $v^{n-d}v!$ и учитывая неравенство $\exp\{-me^{-(n-d)/m}\} < 1$, получаем, что

$$\frac{v!}{v^n} \sum_{d=2}^{n-v \ln v} \sum_{m=1}^v \sigma(n-d, m) = O\left(\sum_{d=2}^{n-v \ln v} \frac{1}{v^{d-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{(n-d)^3}\right)\right)\right) = O\left(\frac{1}{v}\right).$$

Пусть $n - v \ln v < d \leq n - 1$, тогда $1 \leq n - d < v \ln v$. Так как

$$\sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m) < v^{n-d}$$

и по условию $v - n + v \ln v \leq 0$, легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{v!}{v^n} \sum_{d=n-v \ln v+1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m) &< \frac{v!}{v^n} \sum_{d=n-v \ln v+1}^{n-d} v^{n-d} \\ &= O(v! v^{-n+v \ln v-1}) = O(e^{-v} v^{v-n+v \ln v-1/2}) = O(e^{-v} v^{1/2}). \end{aligned}$$

Лемма 5. В условиях теоремы 1

$$\sum_{J_2(n, N)} P(\alpha_2) = O(1/v).$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $i_1 < i_2$. Графически равенства (15) в этом случае выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} & \overbrace{\quad d \quad} & \overbrace{\quad n-d \quad} & \overbrace{\quad d \quad} & & & \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_2} & \dots & x_{i_1+n-1} & \dots & x_{i_2+n-1} \\ & \downarrow Z_1 & & \downarrow Z_1, Z_2 & & \downarrow Z_2 & \\ x_{j_1} & \dots & x_{j_2} & \dots & x_{j_1+n-1} & \dots & x_{j_2+n-1} \end{array}$$

Обозначим $P(\alpha_2; d)$, $\alpha_2 \in J_2(n, N)$, вероятность $P(\alpha_2)$ при $i_2 - i_1 = j_2 - j_1 = d$ и оценим ее.

Пусть $X_{i_2}(n-d)$ содержит m различных элементов из множества A . Через $|X_{m_1, s, m}^{(d)}|$ обозначим число выборок $X_{i_1}(d)$ с m_1 различными элементами из множества A , s из которых совпадает (без учета кратности) с элементами выборки $X_{i_2}(n-d)$.

Число пар отрезков $X_{i_2}(n-d)$ и $X_{j_2}(n-d)$, связанных подстановкой из S_v , равно $|X_m^{(n-d)}|(v)_m$. Далее, $X_{i_1}(d)$ можно выбрать $|X_{m_1, s, m}^{(d)}|$ способами, а для $X_{j_1}(d)$ имеем $(v-m)_{(m_1-s)}$ возможных вариантов, так как для s элементов, совпадающих с элементами из $X_{i_2}(n-d)$, образы определены однозначно. Поскольку случайные выборки $X_{i_1+n-1}(d)$ и $X_{j_1+n-1}(d)$ не зависят от $X_{i_1}(d)$ и $X_{j_1}(d)$, так как их элементы

связаны своими подстановками, а испытания в последовательности X независимы, для них справедливы аналогичные рассуждения. В итоге получаем, что

$$P(\alpha_2; d) = \frac{1}{v^{2n+2d}} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} |X_m^{(n-d)}|(v)_m \times \left(\sum_{m=1}^{\min(d, v)} \sum_{s=0}^{\min(m_1, m)} |X_{m_1, s, m}^{(d)}|(v-m)_{(m_1-s)} \right)^2 \quad (19)$$

и

$$\sum_{J_2(n, N)} P(\alpha_2) = O \left(N^2 \sum_{d=1}^{n-1} P(\alpha_2; d) \right). \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что

$$|X_{m_1, s, m}^{(d)}| = \sigma(d, m_1) \binom{m_1}{s} (m)_s (v-m)_{(m_1-s)} = |X_{m_1}^{(d)}| \frac{\binom{m_1}{s} (m)_s (v-m)_{(m_1-s)}}{(v)_{m_1}}.$$

Действительно, зафиксируем произвольное разбиение множества из d элементов на m_1 блоков, число таких разбиений равно $\sigma(d, m_1)$. Далее $\binom{m_1}{s}$ способами выбираем s блоков, в которые будем ставить элементы, общие для $X_{i_1}(d)$ и $X_{i_2}(n-d)$, число способов расстановки в эти блоки таких элементов равно $(m)_s$. В остальные (m_1-s) блоков элементы можно расставить $(v-m)_{(m_1-s)}$ способами.

Отметим, что

$$\sum_{s=0}^{\min(m_1, m)} |X_{m_1, s, m}^{(d)}| = |X_{m_1}^{(d)}| = (v)_{m_1} \sigma(d, m_1). \quad (21)$$

Рассмотрим в (20) слагаемое при $d=1$:

$$\Sigma_1 = O(N^2 P(\alpha_2; 1)) = O \left(N^2 \frac{1}{v^{2n+2}} \sum_{m=1}^v \sigma(n-1, m) ((v)_m)^2 ((v-m)^2 + m)^2 \right).$$

Оценим отдельно в этой сумме слагаемое при $m=v$, мы его обозначим через $\Sigma_{1,1}$, оставшуюся сумму для $m < v$ обозначим через $\Sigma_{1,2}$. Если $m=v$, то

$$\Sigma_{1,1} = O \left(N^2 \frac{1}{v^{2n+2}} \sigma(n-1, m) (v!)^2 v^2 \right) = O \left(N^2 \frac{1}{v^{2n+2}} \frac{v^{n-1}}{v!} (v!)^2 v^2 \right) = O \left(\frac{1}{v} \right).$$

Если $m < v$, то $((v-m)^2 + m)^2 \leq v^2 (v-m)^2$ и

$$\Sigma_{1,2} = O \left(N^2 \frac{1}{v^{2n}} \sum_{m=1}^{v-1} \frac{m^{n-1}}{m!} ((v)_{(m+1)})^2 \right).$$

Учитывая, что $(1 - 1/v) < \exp\{-1/v\}$ и $n/N \geq \ln v + 1$, находим, что

$$\frac{m^{n-1}}{m!} \frac{(m+1)!}{(m+1)^{n-1}} < v \left(1 - \frac{1}{v} \right)^{n-1} < v \exp \left\{ -\frac{n-1}{v} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{1}{v} - 1 \right\}$$

и

$$\frac{m^{n-1}}{m!} < \exp \left\{ \frac{1}{v} - 1 \right\} \frac{(m+1)^{n-1}}{(m+1)!}, \quad m = 1, 2, \dots, v-2.$$

Применяя последнее неравенство для $m+1, \dots, v-2$, получаем, что

$$\frac{m^{n-1}}{m!} < \exp \left\{ \left(\frac{1}{v} - 1 \right) (v-1-m) \right\} \frac{(v-1)^{n-1}}{(v-1)!},$$

поэтому в силу ограниченности величины $\binom{N}{2} \Delta$

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,2} &= O \left(N^2 \frac{(v!)^2}{v^{2n}} \sum_{m=1}^{v-1} \exp \left\{ \left(\frac{1}{v} - 1 \right) (v-1-m) \right\} \frac{(v-1)^{n-1}}{(v-1)!} \right) \\ &= O \left(\left(1 - \frac{1}{v} \right)^{n-1} \right) = O(e^{-(n-1)/v}) = O \left(\frac{1}{v} \right). \end{aligned}$$

Далее, из (19) с учетом (21) и неравенства $(v-m)_{(m_1-s)} < (v-m)!$ следует, что при $d \geq 2$

$$P(\alpha_2; d) < \Delta^2 \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m).$$

Из этого неравенства, (20) и леммы 4 получаем, что

$$\sum_{J_2(n, N)} P(\alpha_2) = \Sigma_1 + O \left(\Delta \sum_{d=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, v) \right) = O \left(\frac{1}{v} \right).$$

Оценим вероятность $P(\alpha_r)$, $\alpha_r \in J_r(n, N)$, для произвольного натурального значения $r > 2$.

Если для некоторого набора пар начал отрезков $\alpha_r \in J_r(n, N)$ существует такое его подмножество D , что $A(\alpha_r \setminus D) = 4$, то

$$P(\alpha_r) \leq P(\alpha_r \setminus D) = P(\alpha_{t'}) P(\alpha_{t''}) \leq P(\alpha_1)^2 \leq \Delta^2,$$

где $\alpha_r \setminus D = \alpha_{t'} \cup \alpha_{t''}$. Поэтому, учитывая оценку $|J_r(n, N)| = O(n^{r-1} N^2)$ и (18), получаем, что

$$\sum_{J_r^{(1)}(n, N)} P(\alpha_r) = O(n^{r-1} N^2 \Delta^2) = O(n^{r-1} \Delta) = o(1),$$

где

$$J_r^{(1)}(n, N) = \{\alpha_r \in J_r(n, N) : \exists D \subseteq \alpha_r, A(\alpha_r \setminus D) = 4\} \subset J_r(n, N).$$

Таким образом, осталось показать, что

$$\sum_{J_r^{(2)}(n, N)} P(\alpha_r) = o(1),$$

где $J_r^{(2)}(n, N) = J_r(n, N) \setminus J_r^{(1)}(n, N)$.

Не ограничивая общности, можно полагать, что для начала пар отрезков набора $\alpha_r \in J_r^{(2)}(n, N)$ выполняются неравенства $i_1 < \dots < i_r < i_1 + n$, что графически выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 i_1 & i_2 & \dots & i_{r-1} & i_r & \dots & i_1 + n & i_2 + n & \dots & i_{r-1} + n & i_r + n \\
 * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * \\
 \hline
 & d_1 & & & d_{r-1} & & d_r & & & & \\
 \hline
 j_1 & j_2 & \dots & j_{r-1} & j_r & & j_1 + n & j_2 + n & & j_{r-1} + n & j_r + n \\
 * & * & \dots & * & * & & * & * & & * & *
 \end{array}$$

Положим $i_s - i_{s-1} = d_{s-1}$, $s = 2, \dots, r$, $i_1 + n - i_r = d_r$, тогда

$$d_s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad d_1 + \dots + d_r = n.$$

Через $P(\alpha_r; d_1, \dots, d_r)$ обозначим вероятность $P(\alpha_r)$ с указанными расстояниями между началами отрезков i_s и j_s , $s = 1, 2, \dots, r$. Тогда

$$S_r = \sum_{\alpha_r \in J_r^{(2)}(n, N)} P(\alpha_r) = O \left(N^2 \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_r = n \\ d_1, \dots, d_r > 0}} P(\alpha_r; d_1, \dots, d_r) \right).$$

Лемма 6. В условиях теоремы 1 при $r \geq 3$

$$S_r = O(1/v^{r-2}).$$

Доказательство. Покроем область суммирования в S_r тремя множествами, которые определяются условиями на параметры d_{r-1} и d_r , и оценим каждую из соответствующих сумм $S_{r,1}$, $S_{r,2}$, $S_{r,3}$.

В сумме $S_{r,1}$ значения параметра d_r ограничиваются условием

$$v \ln v \leq d_r \leq n - r + 1.$$

Из простых комбинаторных рассуждений и оценок, вытекающих из (19), следует, что

$$\begin{aligned}
 P(\alpha_r; d_1, \dots, d_{r-1}, d_r) &< P(\alpha_2; d_1 + \dots + d_{r-1}, d_r) \\
 &< \frac{1}{v^{4n-2d_r}} \sum_{m=1}^{\min(d_r, v)} |X_m^{(d_r)}|(v)_m (v^{d_1 + \dots + d_{r-1}} (v - m)!)^2,
 \end{aligned}$$

поэтому

$$S_{r,1} = O \left(N^2 \Delta^2 \sum_{\substack{d_r = v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-1} > 0}}^{n-r+1} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_{r-1} = n - d_r \\ d_1, \dots, d_{r-1} > 0}} \sum_{m=1}^{\min(d_r, v)} \sigma(d_r, m) \right).$$

Так как $\sigma(d_r, m) \leq v^{d_r} (v!)^{-1}$ при $d_r \geq v \ln v$, то

$$\begin{aligned}
 S_{r,1} &= O \left(N^2 \Delta^2 \sum_{\substack{d_r = v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-1} > 0}}^{n-r+1} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_{r-1} = n - d_r \\ d_1, \dots, d_{r-1} > 0}} v^{d_r+1}/v! \right) \\
 &= O \left(\sum_{d_r = v \ln v}^{n-r+1} \binom{n-d_r-1}{r-2} \left(\frac{1}{v} \right)^{n-d_r-1} \right) = O \left(\sum_{d_r = r-2}^{n-v \ln v+1} \binom{d_r}{r-2} \left(\frac{1}{v} \right)^{d_r} \right).
 \end{aligned}$$

Из разложения в ряд Тейлора функции $(1-x)^{-r}$ при $r > 0$ (см. [4])

$$\frac{1}{(1-x)^r} = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(r-1+d)_d}{d!} x^d = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \binom{r-1+d}{r-1} x^d, \quad (22)$$

следует, что при $v \rightarrow \infty$, $k > r$

$$\sum_{d=r}^k \binom{d}{r} \left(\frac{1}{v}\right)^d < \left(\frac{1}{v}\right)^r \left(\frac{v}{v-1}\right)^{r+1} = O\left(\frac{1}{v_r}\right).$$

Поэтому $S_{r,1} = O(1/v^{r-2})$.

В сумме $S_{r,2}$ значения параметра d_{r-1} ограничиваются условием

$$v \leq d_{r-1} \leq n + r - 1.$$

Покажем, что

$$S_{r,2} = O(e^{-v} v^{-1/2} S_{r-1}).$$

Пусть $\alpha_r \in J_r^{(2)}(n, N)$, а индексы $((i_1, j_1), \dots, (i_{r-1}, j_{r-1}))$ определяют набор $\alpha_{r-1} \in J_{r-1}^{(2)}(n, N)$. Обозначим для краткости $d_{r-1} = d$.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \{\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_r j_r}(n) = 1\} \\ \subseteq \{\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_{r-1} j_{r-1}}(n) = 1\} \cap \{\eta_{i_{r-1}+n, i_{r-1}+n}(d) = 1\}. \end{aligned}$$

Так как для определения пар величин $(x_{j_{r-1}+n+t}, x_{i_{r-1}+n+t})$, $t = 0, 1, \dots, d-1$, связанных подстановкой Z_r , существует не более $v^d(v-1)!$ способов, то для вероятности $P(\alpha_r)$ справедлива оценка

$$P(\alpha_r) \leq P(\alpha_{r-1}) \frac{(v-1)!}{v^d}.$$

Из нее следует, что

$$\begin{aligned} S_{r,2} &= O\left(\sum_{\alpha_{r-1} \in J_{r-1}^{(2)}(n, N)} \sum_{d=v}^{n-r+1} \frac{(v-1)!}{v^d}\right) \\ &= O((v-1)! v^{-v} \sum_{\alpha_{r-1} \in J_{r-1}^{(2)}(n, N)} P(\alpha_{r-1})) = O(e^{-v} v^{-1/2} S_{r-1}). \end{aligned}$$

В сумме $S_{r,3}$ область изменения параметров d_r и d_{r-1} ограничивается условиями

$$1 \leq d_{r-1} < v, \quad 1 \leq d_r \leq v \ln v.$$

Покажем, что

$$S_{r,3} = O(e^{-v} v^{r-3/2}).$$

Доказательство проведем индукцией по числу r . Пусть $r = 3$. В силу (17) справедливы неравенства

$$P(\alpha_3; d_1, d_2, d_3) \leq P(\alpha_3; d_1 + d_2, d_3) < \Delta^2 v^{n-d_1-d_2},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 S_{3,3} &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+d_2+d_3=n \\ 1 \leq d_2 < v \\ 1 \leq d_3 \leq v \ln v}} P(\alpha_3; d_1, d_2, d_3)\right) = O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+d_2+d_3=n \\ 1 \leq d_2 < v \\ 1 \leq d_3 \leq v \ln v}} P(\alpha_2; d_1 + d_2, d_3)\right) \\
 &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+d_2+d_3=n \\ 1 \leq d_2 < v \\ 1 \leq d_3 \leq v \ln v}} \Delta^2 v^{n-d_1-d_2}\right) \\
 &= O\left(v! \sum_{d_2=1}^{v-1} \sum_{d_3=1}^{v \ln v} v^{-n+d_3}\right) = O\left(\frac{v!v}{v^{n-v \ln v}}\right) = O(e^{-v} v^{3/2}).
 \end{aligned}$$

Предположим, что $S_{r-1,3} = O(e^{-v} v^{r-5/2})$, и рассмотрим $S_{r,3}$:

$$\begin{aligned}
 S_{r,3} &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_{r-1} < v, \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-2} > 0}} P(\alpha_r)\right) \\
 &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_{r-1} < v, \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-2} > 0}} P(\alpha_{r-1}; d_1, \dots, d_{r-3}, d_{r-2} + d_{r-1}, d_r)\right) \\
 &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v, \\ 0 < d_{r-1} + d_{r-2} < v \\ d_1, \dots, d_{r-3} > 0}} P(\alpha_{r-1}; d_1, \dots, d_{r-3}, d_{r-2} + d_{r-1}, d_r)\right) \\
 &\quad + O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v, \\ v \leq d_{r-1} + d_{r-2} \leq n-r+1 \\ d_1, \dots, d_{r-3} > 0}} P(\alpha_{r-1}; d_1, \dots, d_{r-3}, d_{r-2} + d_{r-1}, d_r)\right) \\
 &= O\left(\sum_{d_{r-1}=0}^{v-1} N^2 \sum_{d_{r-2}=1}^{v-d_{r-1}-1} \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-3} > 0}} P(\alpha_{r-1}; d_1, \dots, d_{r-3}, d_{r-2} + d_{r-1}, d_r)\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{d_{r-1}=0}^{v-1} N^2 \sum_{d_{r-2}=v-d_{r-1}}^{n-r+1} \sum_{\substack{d_1+\dots+d_r=n \\ 1 \leq d_r \leq v \ln v \\ d_1, \dots, d_{r-3} > 0}} P(\alpha_{r-1}; d_1, \dots, d_{r-3}, d_{r-2} + d_{r-1}, d_r)\right) \\
 &= O(e^{-v} v^{r-5/2})v + O(S_{r-1,2})v = O(e^{-v} v^{r-5/2})v + O(e^{-v} v^{1/2} S_{r-2}) = O(e^{-v} v^{r-3/2}).
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции и оценкой для $S_{r,2}$.

Таким образом, при любом фиксированном $r \geq 3$

$$\begin{aligned} S &< S_{r,1} + S_{r,2} + S_{r,3} \\ &= O(1/v^{r-2}) + O(e^{-v}v^{-1/2}S_{r-1}) + O(e^{-v}v^{r-3/2}) = O(1/v^{r-2}). \end{aligned}$$

Из лемм 5 и 7 следует, что для любого фиксированного $r \geq 2$

$$\sum_{J_r(n,N)} P(\alpha_r) = o(1).$$

Тем самым соотношение (6) и теорема 1 доказаны.

Замечание 2. Применение подхода работы [5] при $k = 2$, основанного на оценке условных вероятностей через число компонент связности и разбиения множества $I_{r+1}(n, N)$ с использованием множеств $K(\alpha_r, a)$, не дает в нашем случае нужных оценок. Это связано с тем, что условная вероятность появления симметричных компонент связности, которая описывается случаем $a = 0$, оценивается единицей.

3. Доказательство теоремы 3

Для выполнения события $\{\eta_{i_1 j_1}(n) = \dots = \eta_{i_r j_r}(n) = 1\}$ необходимым и достаточным условием является выполнение равенств

$$x_{ik+t} = Z_k(x_{jk+t}), \quad Z_k \in S_v, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad t = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если w — число различных неизвестных, участвующих в этой системе, а w' — число свободных переменных, то есть переменных, которые вместе с подстановками Z_k , $k = 1, 2, \dots, r$, однозначно определяют остальные, то для вероятности $P(\alpha_r)$, $\alpha_r \in I_r(n, N)$, справедлива оценка

$$P(\alpha_r) \leq (p^*)^w v^{w'} (v!)^r. \quad (23)$$

Пусть $j - i \geq n$. Простыми комбинаторными рассуждениями легко устанавливается, что вероятность $\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1)$ имеет вид (4) и в силу (23)

$$\mathbf{P}(\delta(n, v, \bar{p})) \leq (p^*)^{2n} v^n v! = \Delta'.$$

Если $j - i < n$, то учитывая рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2, соотношения $w = n + s$, $w' = s < n$, $p^* v \geq 1$ и (23), получаем, что

$$\mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) \leq (p^*)^{n+s} v^s v! = (p^*)^{2n} v^n v! (vp^*)^{s-n} < \Delta'.$$

Так как $\binom{N}{2} \Delta' = O(1)$, $v = o(n)$, $n/N < 1$, $p^* \geq 1/v$, то

$$2 \ln N + n \ln n((p^*)^2 v) + \ln v! = O(1),$$

откуда

$$\frac{n}{N} = O\left(\frac{\ln v! + 2 \ln N}{|N \ln(1/v)|}\right) = o(1).$$

Легко проверить выполнение соотношений (5) и (7):

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{P}(\eta_{ij}(n) = 1) = \lambda(n, v, \bar{p}, N) + O(nN\Delta') \rightarrow \lambda,$$

$$\sum_{I_r(n, N)} \mathbf{P}(\eta_{i_1 j_1}(n) = 1) \dots \mathbf{P}(\eta_{i_r j_r}(n) = 1) < O(nN^{2r-1}(\Delta')^r) = O\left(\frac{n}{N}\right) \rightarrow 0.$$

С учетом (23) устанавливаются оценки для вероятности

$$P(\alpha_r), \quad \alpha_r \in I_r^{(a)}(n, N),$$

аналогичные полученным в лемме 3:

$$P(\alpha_r) \leq (\Delta')^{(a+1)/2}, \quad 1 \leq a \leq 2r-1.$$

Например, в случае (с) леммы 3 для $r = 2$ и $a = 2$:

$$P(\alpha_2) \leq (p^*)^{2n+j_2-j_1} v^{j_2-j_1} v! = (\Delta')^2 (vp^*)^{j_2-j_1-2n} < (\Delta')^2 < (\Delta')^{3/2}.$$

Если $n \geq v \ln v + v$ и $p^* = O(1/v)$, то (см. (18))

$$\ln(n^t \Delta') = O\left(\ln n(t - \ln v) + \ln v \left(\frac{n}{\ln v} - n + \ln n\right)\right) \rightarrow -\infty$$

и $n^t \Delta' \rightarrow 0$ для любого фиксированного натурального $t < \infty$.

Учитывая эти соотношения и $N(\Delta')^{1/2} n^{-1} \rightarrow 0$, получаем, что

$$\sum_{I_{r,2}(n, N)} P(\alpha_r) = O(n^{2r-1} \Delta' N) = O(n^{2r-1} (\Delta')^{1/2}) \rightarrow 0.$$

Лемму 5 заменяют следующие оценки (смысл обозначения $P(\alpha_2; d)$ аналогичен равновероятному случаю):

$$\sum_{J_2(n, N)} P(\alpha_2) = O\left(N^2 \sum_{d=1}^{n-1} P(\alpha_2; d)\right),$$

$$P(\alpha_2; d) < (p^*)^{2n+2d} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} |X_m^{(n-d)}|(v)_m$$

$$\times \left(\sum_{m_1=1}^{\min(d, v)} \sum_{s=0}^{\min(m_1, m)} |X_{m_1, s, m}^{(d)}|(v-m)_{(m_1-s)} \right)^2,$$

$$P(\alpha_2; 1) < (p^*)^{2n+2} \sigma(n-1, v) (v!)^2 v^2, \quad d=1, \quad m=v,$$

$$P(\alpha_2; 1) < (p^*)^{2n+2} (v!)^2 v^2 \sum_{m=1}^{v-1} \frac{(v-1)^{n-1}}{(v-1)!} e^{m+1-v}, \quad d=1, \quad m < v,$$

$$P(\alpha_2; d) < (p^*)^{2n+2d} (v!)^2 v^{2d} \sum_{m=1}^{\min(n-d, v)} \sigma(n-d, m), \quad d \geq 2.$$

Поэтому, используя обозначения леммы 5, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{J_2(n,N)} P(\alpha_2) &= \Sigma_{1,2} + \Sigma_{1,2} + O\left(N^2 \sum_{d=2}^{n-v \ln v} P(\alpha_2; d)\right) + O\left(N^2 \sum_{d=n-v \ln v+1}^{n-1} P(\alpha_2; d)\right) \\ &= O((p^*)^2 v) + O((p^*)^2 v) + O((p^*)^4 v^3) + O(v!((p^*)^2)^{n-v \ln v+1}) \\ &= O(1/v) + O(v!((p^*)^2 v)^{v+1}) = O(b^v v^{-1/2}) + O(1/v) = o(1), \end{aligned}$$

где $b = c^2/e < 1$.

Оценим S_r для $\alpha_r \in J_r^{(2)}(n, N)$, $r \leq 3$, (см. лемму 6).

Пусть $v \ln v \leq d_r \leq n - r + 1$, тогда (смысл обозначения $P(\alpha_r; d_1, \dots, d_r)$ аналогичен равновероятному случаю)

$$\begin{aligned} P(\alpha_r; d_1, \dots, d_{r-1}, d_r) &< P(\alpha_2; d_1 + \dots + d_{r-1}, d_r) \\ &< (p^*)^{4n-2d_r} \sum_{m=1}^{\min(d_r, v)} |X_m^{(d_r)}|(v)_m (v^{d_1+\dots+d_{r-1}} (v-m)!)^2, \\ S_{r,1} &= O\left(N^2 \sum_{d_r=v \ln v}^{n-r+1} \sum_{\substack{d_1+\dots+d_{r-1}=n-d_r \\ d_j > 0}} (p^*)^{4n-2d_r} (v!)^2 v^{2n-2d_r} \sum_{m=1}^v \sigma(d_r, m)\right) \\ &= O\left((p^* v)^2 \sum_{d_r=v \ln v}^{n-r+1} \binom{n-d_r-1}{r-2} ((p^*)^2 v)^{n-d_r-1}\right) \\ &= O\left((p^* v)^2 \sum_{d_r=r-2}^{n-v \ln v-1} \binom{d_r}{r-2} ((p^*)^2 v)^{d_r}\right) = O((p^* v)^2 ((p^*)^2 v)^{r-2}) = O\left(\frac{1}{v}\right)^{r-2}. \end{aligned}$$

Оценка последней суммы происходит с использованием разложения (22) в точке $x = (p^*)^2 v$.

Рассмотрим случай, когда $v \leq d_r \leq n + r - 1$.

Воспользуемся следующей оценкой (для краткости $d_{r-1} = d$):

$$P(\alpha_r) < P(\alpha_{r-1}) (p^*)^{2d} v^d (v-1)!.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{r,2} &= O\left(\sum_{\alpha_{r-1} \in J_{r-1}^{(2)}(n,N)} P(\alpha_{r-1}) \sum_{d=v}^{n-r+1} (p^*)^{2d} v^d (v-1)!\right) \\ &= O(S_{r-1} (v-1)! ((p^*)^2 v)^v) = O(b^v v^{-1/2} S_{r-1}), \quad b = c^2/e < 1. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leq d_{r-1} < v$, $1 \leq d_r \leq v \ln v$, тогда с учетом (17)

$$P(\alpha_3; d_1, d_2, d_3) \leq P(\alpha_2; d_1 + d_2, d_3) < (\Delta')^2 ((p^*)^2 v)^{d_1+d_2-n},$$

поэтому

$$\begin{aligned} S_{3,3} &= O\left(N^2 \sum_{\substack{d_1+d_2+d_3=n \\ 1 \leq d_2 < v, \\ 1 \leq d_3 \leq v \ln v}} P(\alpha_2; d_1 + d_2, d_3)\right) \\ &= O\left(v! \sum_{d_2=1}^{v-1} \sum_{d_3=1}^{v \ln v} ((p^*)^2 v)^{n-d_3}\right) = O(v! v((p^*)^2 v)^v) = O(b^v v^{3/2}). \end{aligned}$$

Далее, используя аналогичное предположение индукции для $S_{r-1,3}$, получаем, что

$$S_r = O\left(\frac{1}{v^{r-2}}\right) + O(b^v v^{-1/2} S_{r-1}) + O(b^v v^{r-3/2}) + O(b^v v^{1/2} S_{r-2}) = O\left(\frac{1}{v^{r-2}}\right),$$

при $b = c^2/e < 1$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство следствий 1 и 2. При любом $x \in (0, \infty)$ (см. [1])

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sqrt{\Delta} \tau(n) > x) &= \mathbf{P}(\xi(n, N(x)) = 0), & N(x) &= [x \Delta^{-1/2}], \\ \mathbf{P}(\sqrt{\delta(n, v, \bar{p})} \tau(n) > x) &= \mathbf{P}(\xi(n, N(x)) = 0), & N(x) &= [x(\delta(n, v, \bar{p}))^{-1/2}] \end{aligned}$$

соответственно.

Из условия следствия 1 и леммы 1 следует, что

$$N(x) \rightarrow \infty, \quad \lambda(n, v, N(x)) \rightarrow x^2 \theta / 2,$$

поэтому случайная величина $\xi(n, N(x))$ имеет предельное распределение Пуассона с параметром $\lambda = x^2 \theta / 2$.

Аналогично, из условий следствия 2 вытекает, что

$$N(x) \rightarrow \infty, \quad \binom{N(x)}{2} \Delta' = O(1).$$

Поэтому случайная величина $\xi(n, N(x))$ имеет предельное распределение Пуассона с параметром $x^2 / 2$.

Доказательство теоремы 2. Из определения случайной величины $\mu(N)$ следует, что для целых значений числа t

$$\mathbf{P}(\mu(N) < t) = \mathbf{P}(\xi(t, N) = 0),$$

поэтому

$$\mathbf{P}(\mu(N) = t) = \mathbf{P}(\xi(t+1, N) = 0) - \mathbf{P}(\xi(t, N) = 0).$$

Пусть

$$k = \frac{\ln(N^2 v!)}{\ln v}. \quad (24)$$

С учетом (13) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi([k] + 1, N) = 0) &= 1 - \sum_{t \geq 1} \mathbf{P}(\xi([k] + 1, N) = t) \geq 1 - \mathbf{E}\xi([k] + 1, N) \\ &= 1 + O(\lambda([k] + 1)) + O(Nk\Delta([k] + 1)), \end{aligned}$$

где $\Delta(k) = v!/v^k$.

В условиях теоремы легко показывается, что $\lambda([k] + 1) = o(1)$, $O(Nk\Delta([k] + 1)) = o(1)$, где k то же, что в (24). Поэтому $\mathbf{P}(\xi([k] + 1, N) = 0) = 1 + o(1)$.

Для оценки вероятности $\mathbf{P}(\xi = 0)$ воспользуемся неравенством $\mathbf{P}(\xi = 0) \leq \mathbf{D}\xi/(\mathbf{E}\xi)^2$. Из (13) и условий теоремы следует, что $\mathbf{E}\xi([k], N) = \lambda([k]) + O(Nk\Delta([k])) \sim \lambda([k]) \rightarrow \infty$.

Повторяя рассуждения, аналогичные доказательствам лемм 3–5, можно показать, что второй биномиальный момент B_2 случайной величины $\xi(k, N)$ имеет вид $B_2 = \lambda([k])^2/2 + o(1)$. Поэтому $\mathbf{D}\xi(k, N) \sim \lambda([k])$ и $\mathbf{P}(\xi([k], N) = 0) \leq 1/\lambda([k]) \rightarrow 0$. Случай (а) теоремы доказан.

В случае (б) используем равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu(N) = \langle k \rangle - 1) &= \mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle, N) = 0) - \mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle - 1, N) = 0), \\ \mathbf{P}(\mu(N) = \langle k \rangle) &= \mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle + 1, N) = 0) - \mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle, N) = 0). \end{aligned}$$

Если выполнена первая часть условия (б), то $\langle k \rangle / v \geq \ln v + 1$ и для случайной величины $\xi(\langle k \rangle, N)$ справедлива теорема 1 с параметром $\lambda \sim \lambda(\langle k \rangle, v, N)$. Если выполнены условия второй части, то $k/v > \ln v + \omega(v)$, где $\omega(v) \rightarrow \infty$, $\lambda(\langle k \rangle) \sim \binom{N}{2} v!/v^{\langle k \rangle} = \lambda$ и для случайной величины $\xi(\langle k \rangle, N)$ также справедлива теорема 1. Далее, аналогично случаю (а) показывается, что $\mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle - 1, N) = 0) \rightarrow 0$, $\mathbf{P}(\xi(\langle k \rangle + 1, N) = 0) \rightarrow 1$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2 при $k = \ln(N^2 v!) / |\ln((p^*)^2)|$.

Автор благодарен А. М. Зубкову за обсуждение результатов данной работы и ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №1, 173–181.
2. Севастьянов Б. А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **17**, №4, 333–338.
3. Медведев Ю. И., Ивченко Г. И., Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №1, 151–156.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Гостехиздат, Москва, 1951.
5. Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №1, 182–187.

Статья поступила 15.10.1996.

Переработанный вариант поступил 16.09.1998.