Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, О реализации линейных булевых операторов неветвящимися программами с условной остановкой, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 146–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:11:21

О реализации линейных булевых операторов неветвящимися программами с условной остановкой

© 1999 г. А. В. Чашкин

Рассматривается сложность реализации линейных булевых операторов неветвящимися программами с условной остановкой. Для почти всех таких операторов найдены точные по порядку оценки среднего времени вычисления их значений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-01068, и ФЦП «Интеграция», проект 473.

В работе рассматривается сложность реализации линейных булевых операторов неветвящимися программами с условной остановкой. Неветвящиеся программы с условной остановкой отличаются от обычных неветвящихся программ тем, что некоторые из операторов и, возможно, некоторые из входов программы помечены целыми числами от 0 до m ; операторы, помеченные нулем, останавливают выполнение программы, если их значение равно единице; i -м значением программы после ее остановки объявляется значение ее последнего выполненного оператора, помеченного числом i , а если такого оператора нет, то i -м значением программы объявляется значение входа, помеченного числом i .

Рассматриваемые программы на различных аргументах могут работать разное время, поэтому естественной мерой сложности таких программ является среднее время работы. Различные вопросы, связанные со средним временем вычисления значений булевых функций и булевых операторов неветвящимися программами с условной остановкой, ранее были рассмотрены в [1, 2]. В этих работах можно найти все неопределяемые ниже понятия, касающиеся неветвящихся программ с условной остановкой. Полагаем, что число переменных всех рассматриваемых ниже операторов больше некоторой положительной постоянной.

Дадим необходимые определения.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество независимых булевых переменных, переменной x_i приписано некоторое число a_i из множества $\{0, 1, \dots, m\}$, $i = 1, \dots, n$.

Неветвящейся программой с условной остановкой назовем последовательность $P = p_1 \dots p_i \dots p_s$, элементами которой являются операторы $p_i = (f_i(p_{i,1}, p_{i,2}), a_i)$, где $a_i \in \{0, 1, \dots, m\}$, f_i — двухместная булева функция, $p_{i,j} \in \{p_1, \dots, p_{i-1}\} \cup X_n$. Оператор p_i назовем оператором первого типа, или функциональным оператором,

если $a_i \neq 0$, и оператором второго типа, или оператором остановки, если $a_i = 0$. Будем говорить, что программа P имеет n входов, m выходов, и ее i -у входу приписана переменная x_i .

Значение оператора p программы P на произвольном двоичном наборе x определим индуктивно. Для первого оператора положим $p_1(x) = f_1(x)$, а при $i > 1$ положим $p_i(x) = f_i(p_{i,1}(x), p_{i,2}(x))$. Через $n(p)$ обозначим номер оператора p в программе P , через q_t — t -й оператор второго типа этой программы. Пусть программа P содержит r операторов остановки. Через $q_{t,j}$, $t \in \{1, 2, \dots, r\}$, обозначим либо оператор p_i с наибольшим номером i , для которого $i < n(q_t)$ и $a_i = j$, либо, если такого оператора нет, переменную x_k с максимальным индексом k , которой приписано число j . Результат действия программы P на наборе x обозначим через $P(x) = (P_1(x), \dots, P_m(x))$, значение его j -й компоненты определим посредством формулы

$$P_j(x) = q_1(x)q_{1,j}(x) \vee \bar{q}_1(x)(q_2(x)q_{2,j}(x) \vee \dots \vee \bar{q}_{r-2}(x)(q_{r-1}(x)q_{r-1,j}(x) \vee \bar{q}_{r-1}(x)q_r(x)q_{r,j}(x)) \dots).$$

Временем работы $T_P(x)$ программы P на наборе переменных x назовем минимальное $n(q_j)$ такое, что $q_j(x) = 1$. Без ограничения общности полагаем, что для каждого x значение хотя бы одного оператора $q_j(x)$ отлично от нуля. Величину

$$T(P) = 2^{-n} \sum T_P(x),$$

где суммирование производится по всем двоичным наборам длины n , назовем средним временем работы программы P . Если для некоторого булева оператора f и любого двоичного набора x справедливо равенство $f(x) = P(x)$, то будем говорить, что программа P вычисляет оператор f . Величину

$$T(f) = \min T(P),$$

где минимум берется по всем программам, вычисляющим f , назовем средним временем вычисления оператора f . Программу P , вычисляющую оператор f , для которой справедливо равенство $T(f) = T(P)$, назовем минимальной программой. Число элементов минимальной схемы из функциональных элементов, реализующей оператор f в базисе из всех двухместных функций, назовем сложностью f и обозначим символом $L(f)$.

Легко видеть, что схемы из функциональных элементов являются частным случаем неветвящихся программ с условной остановкой. Любую схему можно рассматривать как программу без операторов остановки. Поэтому очевидно, что

$$T(f) \leq L(f).$$

Линейные булевы операторы, состоящие из n функций и зависящие от n переменных, далее будем называть линейными (n, n) -операторами.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Для каждого линейного (n, n) -оператора f справедливо неравенство

$$T(f) \leq \frac{n^2}{2 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Для почти всех линейных (n, n) -операторов f справедливо неравенство

$$T(f) \geq \frac{n^2}{6 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Верхняя оценка легко следует из существования вентильных схем, имеющих требуемую сложность [3]. Поэтому ограничимся доказательством нижней оценки.

Введем ряд необходимых понятий и установим некоторые свойства минимальных программ, реализующих линейные операторы.

Через $N(L, n)$ обозначим число неизоморфных программ в базе из всех не более чем двухместных булевых функций, содержащих не более L операторов, имеющих n входов и n выходов. Из леммы 4 в [2] следует, что

$$N(L, n) \leq (cnL)^{2L}, \quad (1)$$

где c — некоторая постоянная.

Пусть f — булев оператор, P — программа, вычисляющая f . Каждому двоичному набору x длины n , рассматриваемому как двоичная запись целого числа, поставим в соответствие его номер $N_P(x)$ такой, что $1 \leq N_P(x) \leq 2^n$; $N_P(x) < N_P(y)$, если $T_P(x) < T_P(y)$; $N_P(x) < N_P(y)$, если $T_P(x) = T_P(y)$ и $x < y$.

Пусть H — произвольное подпространство в $\{0, 1\}^n$, $d = \dim H$ и $\mathcal{B} = \{B_i\}$ — множество всех базисов в H . Рассматривая векторы из H как целые числа, каждому базису $B_i = \{x_1^i, \dots, x_d^i\}$ поставим в соответствие номер — d -разрядное число, j -й разряд которого есть число x_j^i . Базис с минимальным номером назовем минимальным базисом подпространства H .

Пусть f — произвольный линейный оператор, P — минимальная программа, вычисляющая f . Пусть k — натуральный параметр, x_0 такое, что $N_P(x_0) = 2^{n-k} + 1$. Пусть M — множество x таких, что $N_P(x) \leq N_P(x_0)$, $Y = \langle M \rangle$ — линейная оболочка множества M , Z — дополнение к Y в $\{0, 1\}^n$, т.е. Z — такое пространство, что $\{0, 1\}^n = Y \oplus Z$ и $Y \perp Z$.

Заметим, что линейный оператор f однозначно определяется первыми $T_P(x_0)$ операторами своей минимальной программы и множеством $\{f(z_j)\}$, где $\{z_j\}$ — минимальный базис в Z . Действительно, для однозначного определения линейного (n, n) -оператора достаточно знать его действие на n линейно независимых векторах. Если известно $T_P(x_0)$ первых операторов, то можно найти множество M и его образ $f(M)$, и, следовательно, образ базиса пространства Y . Таким образом, первые $T_P(x_0)$ операторов определяют действие f на $\dim Y$ линейно независимых векторах. Значения оператора f на оставшихся $n - \dim Y$ линейно независимых векторах явно зададим образом минимального базиса пространства Z . Так как множество M состоит из $2^{n-k} + 1$ векторов, то $\dim Y \geq n - k + 1$. Следовательно,

$$\dim Z \leq k - 1, \quad (2)$$

т.е. базис пространства Z содержит не более $k - 1$ векторов.

Оценим число линейных операторов, для минимальных программ которых справедливо неравенство

$$T_P(x_0) \leq \frac{n(n-k)}{6 \log_2 n}.$$

В силу неравенства (1) для числа N , равного числу различных программ, сложность которых не превосходит $T_P(x_0)$, справедливо неравенство

$$N \leq \left(cn \frac{n(n-k)}{6 \log_2 n} \right)^{2n(n-k)/(6 \log_2 n)} \leq 2^{n(n-k)}.$$

Из последнего неравенства, неравенства (2) и сделанного выше замечания о величинах, определяющих линейные операторы, видим, что R — число рассматриваемых операторов, не превосходит величины

$$2^{n(n-k)} 2^{n(k-1)} = 2^{n^2-n} = o(2^{n^2}).$$

Следовательно, все минимальные программы почти всех линейных (n, n) -операторов удовлетворяют условию: если $N_P(x_0) = 2^{n-k} + 1$, то

$$T_P(x_0) > \frac{n(n-k)}{6 \log_2 n}. \quad (2)$$

Положим $k = \lceil \log_2 n \rceil$ и $W = \{x | N_P(x) \geq N_P(x_0)\}$. Тогда для среднего времени работы каждой программы P , удовлетворяющей (3),

$$\begin{aligned} T(P) &= 2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} T_P(x) > 2^{-n} \sum_{x \in W} T_P(x_0) \\ &\geq 2^{-n} T_P(x_0) |W| = 2^{-n} (2^n - 2^{n-k}) \frac{n(n-k)}{6 \log_2 n} \\ &> \frac{n^2}{6 \log_2 n} (1 + O(n^{-1})). \end{aligned}$$

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2. Для почти всех линейных (n, n) -операторов f сложности

$$L(f) = L \geq n$$

справедливо равенство

$$T(f) = \Theta(L(f)).$$

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 выбором значения параметра k , в теореме 2 достаточно взять $k = 1$, и использованием величины cL с некоторой достаточно малой постоянной c вместо величины $n(n-k)/(6 \log_2 n)$ (см. (3)).

Введем функцию Шеннона $T(n)$, определенную стандартным образом:

$$T(n) = \max T(f),$$

где максимум берется по всем линейным булевым (n, n) -операторам. Из теоремы 1 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.

$$\frac{n^2}{6 \log_2 n} (1 + o(1)) \leq T(n) \leq \frac{n^2}{2 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Пусть $\mathcal{P}_t$ — множество неветвящихся программ, каждая из которых содержит не более t операторов остановки. Положим

$$T_t(f) = \min T(P),$$

где минимум берется по всем программам P , вычисляющим f и таким, что $P \in \mathcal{P}_t$. Введем функцию

$$T_t(n) = \max T_t(f),$$

где максимум берется по всем линейным булевым (n, n) -операторам f .

Теорема 4. Пусть $t = o(n/\log n)$, тогда

$$T_t(n) = \frac{n^2}{2 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Для почти всех линейных (n, n) -операторов f справедливо неравенство

$$T(f) \geq \frac{n^2}{2 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 1. Единственное отличие вносит тот факт, что для числа программ с ограниченным числом операторов остановки справедлива верхняя оценка $n^t (cL)^{L(1+o(1))}$.

В заключение отметим, что для многих естественных классов булевых функций (булевых операторов) нетрудно показать [1, 2], что использование даже небольшого (растущего) числа операторов остановки, позволяет для почти всех функций (операторов) сделать среднее время вычисления меньше соответствующего обычного времени вычисления. Теорема 4 показывает, что для класса линейных булевых операторов это не так.

Список литературы

1. Чашкин А. В. О среднем времени вычисления значений булевых функций. *Дискретный анализ и исследование операций*. (1997) 4, 60–78.
2. Чашкин А. В. О среднем времени вычисления булевых операторов. *Дискретный анализ и исследование операций*. (1998) 5, 88–103.
3. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования. *Проблемы кибернетики* (1969) 21, 5–102.

Статья поступила 04.07.1998.