Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, О надежности схем в базисе $\{x \vee y \vee z, x \& y \& z, \bar{x}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 1, 116–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:07:04

О надежности схем в базисе $\{x \vee y \vee z, x \& y \& z, \bar{x}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов

© 2006 г. М. А. Алехина

Рассматривается реализация булевых функций в базисе

$$\{x \vee y \vee z, x \& y \& z, \bar{x}\}$$

схемами из ненадежных функциональных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на входах элементов. Пусть γ — вероятность неисправности каждого входа любого элемента, а ненадежность схемы — наибольшая вероятность ошибки на ее выходе. В работе установлена возможность асимптотически наилучшей по надежности реализации всех булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$. При этом функции x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, реализуются абсолютно надежно, константы 0 и 1 реализуются сколь угодно надежно, а остальные функции с ненадежностью, асимптотически равной γ^3 при $\gamma \rightarrow 0$.

Работа выполнена при поддержке научной программы «Университеты России», проект 04.01.032.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе

$$\{x \& y \& z, x \vee y \vee z, \bar{x}\}$$

(см. [1]). Схема реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все элементы схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния типа 0 (1) на входах. Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход элемента нуль не искажается, а единица с вероятностью γ , $\gamma < 1/2$, может превратиться в нуль. Каждый вход любого элемента схемы переходит в неисправное состояние независимо от другого входа и от состояний других элементов схемы. Неисправности типа 1 на входах элементов определяются аналогично.

Далее будем предполагать, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на входах. Функционирование элементов можно задать таблицами 1–3, в которых p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе соответствующего базисного элемента.

Пусть $P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\tilde{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S , реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы равна $1 - P(S)$.

Таблица 1.

x	y	z	$x \vee y \vee z$	p_0	p_1
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	γ	$1 - \gamma$
0	1	0	1	γ	$1 - \gamma$
0	1	1	1	γ^2	$1 - \gamma^2$
1	0	0	1	γ	$1 - \gamma$
1	0	1	1	γ^2	$1 - \gamma^2$
1	1	0	1	γ^2	$1 - \gamma^2$
1	1	1	1	γ^3	$1 - \gamma^3$

Таблица 2.

x	y	z	$x \& y \& z$	p_0	p_1
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	$3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$	$(1 - \gamma)^3$

Замечание 1. Из таблиц 1–3 легко видеть, что ненадежности дизъюнктора и инвертора равны γ , а ненадежность конъюнктора есть $3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$.

Пусть

$$P(f) = \inf P(S),$$

где S — схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, назовем асимптотически наилучшей (асимптотически оптимальной) по надежности, если $P(A) \sim P(f)$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Очевидно, функцию x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, можно реализовать абсолютно надежно (соответствующая схема состоит лишь из полюса, которому приписана переменная x_i , и не содержит функциональных элементов). Однако произвольную булеву функцию нельзя реализовать абсолютно надежной схемой или схемой сколь угодно высокой надежности

Таблица 3.

x	$\bar{x}$	p_0	p_1
0	1	0	1
1	0	$1 - \gamma$	γ

Рис. 1. Схема $\varphi(S)$

[2]. Поэтому важными представляются ответы на вопросы, какова надежность (ненадежность) наилучшей схемы из ненадежных элементов и какие функции можно реализовать такими схемами.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [3]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $\phi(\tilde{x})$ в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью ε , реализует функцию $\bar{\phi}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. Нейман установил, что при $\varepsilon < 1/6$ произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c\varepsilon$, где c — некоторая абсолютная константа. С ростом числа итераций сложность схемы увеличивается экспоненциально.

Схема из ненадежных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадежностью) и сложностью схемы. Оптимизации сложности схем уделялось главное внимание, например, в работах [4] и [5]. Проблема построения асимптотически наилучших по надежности схем рассматривалась в ряде статей автора (например, [6, 7]) в базисах, содержащих функции не более чем двух переменных. В настоящей работе задача построения асимптотически наилучших по надежности схем впервые решается для базиса $\{x \vee y \vee z, x \& y \& z, \bar{x}\}$, содержащего трехвходовые элементы. Далее будет доказано, что любую функцию, не равную x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, можно реализовать асимптотически наилучшей по надежности схемой, причем ненадежность такой схемы для неконстантной функции асимптотически равна γ^3 при $\gamma \rightarrow 0$ (в то время как ненадежность любого элемента базиса не менее γ , см. замечание 1). Константы 0 и 1 можно реализовать сколь угодно надежно.

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная булева функция, а S — любая схема, ее реализующая. Обозначим $P_1(S, \tilde{a})$ и $P_0(S, \tilde{a})$ вероятности ошибок на выходе схемы S при нулевых и единичных входных наборах $\tilde{a}$ соответственно. Возьмем три экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами дизъюнктора. Построенную схему обозначим $\varphi(S)$ (см. рис. 1).

Лемма 1. Вероятности ошибок на выходе схемы $\varphi(S)$ удовлетворяют неравенствам

$$P_1(\varphi(S), \tilde{a}) \leq 3P_1(S, \tilde{a}) \quad (1)$$

при наборах $\tilde{a}$ таких, что $f(\tilde{a}) = 0$, и

$$P_0(\varphi(S), \tilde{a}) \leq (\gamma + P_0(S, \tilde{a}))^3 \quad (2)$$

при наборах $\tilde{a}$ таких, что $f(\tilde{a}) = 1$.

Доказательство. Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\varphi(S)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} P_1(\varphi(S), \tilde{a}) &= 3P_1(S, \tilde{a})(1 - P_1(S, \tilde{a}))^2(1 - \gamma) \\ &\quad + 3P_1^2(S, \tilde{a})(1 - P_1(S, \tilde{a}))(1 - \gamma^2) + P_1^3(S, \tilde{a})(1 - \gamma^3) \\ &\leq 3P_1(S, \tilde{a})(1 - \gamma) \\ &\leq 3P_1(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\varphi(S)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} P_0(\varphi(S), \tilde{a}) &= (1 - P_0(S, \tilde{a}))^3\gamma^3 + 3P_0(S, \tilde{a})(1 - P_0(S, \tilde{a}))^2\gamma^2 \\ &\quad + 3P_0^2(S, \tilde{a})(1 - P_0(S, \tilde{a}))\gamma + P_0^3(S, \tilde{a}) \\ &= (\gamma + (1 - \gamma)P_0(S, \tilde{a}))^3 \\ &\leq (\gamma + P_0(S, \tilde{a}))^3. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Построим схему $S_{\&}$, реализующую конъюнкцию $x \& y \& z$ с большей надежностью, чем функциональный элемент $E_{\&}$ (см. замечание 1). Для этого возьмем конъюнктор $E_{\&}$ и трижды применим к нему операцию φ . Применяя формулы (1) и (2), оценим вероятности ошибок на выходе построенных схем при $\gamma \leq 1/8$: для $\varphi(E_{\&})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_0 &\leq 64\gamma^3 \leq \gamma; \end{aligned}$$

для $\varphi^2(E_{\&})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_0 &\leq 8\gamma^3 \leq \gamma^2; \end{aligned}$$

для $\varphi^3(E_{\&})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_0 &\leq (\gamma + \gamma^2)^3 \leq \gamma^3 + 4\gamma^4. \end{aligned}$$

Схему $\varphi^3(E_{\&})$ обозначим как $S_{\&}$. При $\gamma \leq 1/8$ она реализует конъюнкцию с вероятностями ошибок

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_0 &\leq \gamma^3(1 + \gamma)^3 \leq \gamma^3 + 4\gamma^4. \end{aligned}$$

Аналогично, построим схему $S_\vee$, реализующую дизъюнкцию $x \vee y \vee z$ с большей надежностью, чем функциональный элемент $E_\vee$ (см. замечание 1). Для этого возьмем дизъюнктор $E_\vee$ и применим к нему дважды операцию φ . При $\gamma \leq 1/8$ полученная схема $S_\vee$ реализует дизъюнкцию с вероятностями ошибок

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_0 &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4. \end{aligned}$$

В схеме $\varphi(S)$ заменим дизъюнктор схемой $S_\vee$. Новую схему назовем $\phi(S)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Вероятности ошибок на выходе схемы $\phi(S)$ удовлетворяют неравенствам

$$P_1(\phi(S), \tilde{a}) \leq 3P_1(S, \tilde{a}) \quad (3)$$

при наборах $\tilde{a}$ таких, что $f(\tilde{a}) = 0$, и

$$P_0(\phi(S), \tilde{a}) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + P_0^3(S, \tilde{a}) \quad (4)$$

при наборах $\tilde{a}$ таких, что $f(\tilde{a}) = 1$.

Доказательство. Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\phi(S)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_1(\phi(S), \tilde{a}) &\leq (1 - P_1(S, \tilde{a}))^3 \cdot 0 + (1 - (1 - P_1(S, \tilde{a}))^3) \cdot 1 \\ &\leq 3P_1(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\phi(S)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} P_0(\phi(S), \tilde{a}) &= P_0^3(S, \tilde{a}) \cdot 1 + (1 - P_0^3(S, \tilde{a}))(\gamma^3 + 4\gamma^4) \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + P_0^3(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Операция χ по произвольной схеме S , реализующей булеву функцию f , строит схему $\chi(S)$ (рис. 2). Результат n -кратного применения операции χ к схеме S будем обозначать $\chi^n(S)$.

Очевидно, в результате применения (возможно, не однократного) операции χ к схеме S , реализующей булеву функцию f , получаются схемы, реализующие ту же функцию f . Кроме того, применение этой операции к некоторым схемам S (при некоторых условиях на $P(S)$) приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S .

Лемма 3. Для ненадежности схемы $\chi(S)$ справедливо неравенство

$$P(\chi(S)) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P(S))^3.$$

Доказательство. Сначала оценим вероятности ошибок на выходе подсхемы A (см. рис. 2). Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы A удовлетворяет неравенству

$$P_1(A, \tilde{a}) \leq P_1^3(S, \tilde{a}). \quad (5)$$

Рис. 2. Схема $\chi(S)$

Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $f(\tilde{a}) = 1$. Тогда для вероятности ошибки на выходе схемы A справедливо неравенство

$$\begin{aligned} P_0(A, \tilde{a}) &\leq (1 - P_0(S, \tilde{a}))^3 (\gamma^3 + 4\gamma^4) + (1 - (1 - P_0(S, \tilde{a}))^3) \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P_0(S, \tilde{a}) - 3P_0^2(S, \tilde{a}) + P_0^3(S, \tilde{a}) \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P_0(S, \tilde{a}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_0(A, \tilde{a}) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P_0(S, \tilde{a}). \quad (6)$$

Оценим вероятности ошибок на выходе схемы $\chi(S)$. Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда по лемме 2, используя (3), получаем, что

$$P_1(\chi(S), \tilde{a}) \leq 3P_1^3(S, \tilde{a}). \quad (7)$$

Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $f(\tilde{a}) = 1$. Тогда по лемме 2, используя (4), получаем, что

$$\begin{aligned} P_0(\chi(S), \tilde{a}) &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + P_0^3(A, \tilde{a}) \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P_0(S, \tilde{a}))^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_0(\chi(S), \tilde{a}) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P_0(S, \tilde{a}))^3. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) следует, что

$$P(\chi(S)) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 3P(S))^3.$$

Лемма 3 доказана.

Построим схему I , реализующую инверсию надежнее, чем инвертор (см. замечание 1). Для этого возьмем три инвертора и соединим их выходы со входами схемы $S_{\&}$. Полученная схема I реализует инверсию. Вероятности ошибок p_0 и p_1 на выходе I оценим, используя соотношения (5) и (6). При $\gamma \leq 1/8$ справедливы соотношения

$$p_1 \leq \gamma^3$$

при $x = 1$,

$$p_0 \leq \gamma^3 + 4\gamma^4$$

при $x = 0$. Следовательно,

$$P(I) \leq \gamma^3 + 4\gamma^4.$$

Пример 1. Константы 0 и 1 можно реализовать схемами, сколь угодно высокой надежности.

Действительно, возьмем инвертор, конъюнктор и построим схему B_0 , реализующую константу 0, моделируя формулу $\bar{x} \& x \& x$. Вероятности ошибок на выходе B_0 суть

$$P_1 = 0$$

при $x = 0$ и

$$P_1 = \gamma(1 - \gamma)^3$$

при $x = 1$. По схеме B_0 построим схему $\chi(B_0)$ (см. рис. 2). Используя соотношение (7) при оценке вероятности ошибок на выходе построенной схемы, получаем, что

$$P_1 = 0$$

при $x = 0$ и

$$P_1 \leq 3\gamma^3$$

при $x = 1$. Прodelав k шагов итерации, построим схему $\chi^k(B_0)$, реализующую константу 0 с ненадежностью

$$P(\chi^k(B_0)) \leq (\sqrt{3}\gamma)^{3k} / \sqrt{3}.$$

Таким образом, с ростом числа итераций k константу 0 можно реализовать схемой, сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Схема сколь угодно высокой надежности, реализующая константу 1, строится с помощью инвертора и схемы $\chi^k(B_0)$, построенной выше. Для вероятности ошибок на ее выходе справедливы соотношения

$$P_0 = 0$$

при $x = 0$ и

$$P_0 \leq (\sqrt{3}\gamma)^{3k} (1 - \gamma) / \sqrt{3}$$

при $x = 1$.

Лемма 4. При $\gamma \leq 1/8$ любую булеву функцию можно реализовать схемой C такой, что

$$P(C) \leq 2\gamma^3.$$

Доказательство проводится индукцией по числу существенных переменных для булевых функций. Индуктивный переход выполняется следующим образом: сначала, моделируя формулу

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \& x_n \& f_1 \vee x_n \& x_n \& f_1 \vee \bar{x}_n \& \bar{x}_n \& f_0,$$

где

$$f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0),$$

$$f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1),$$

строим схему S , реализующую функцию f . При этом используются схемы I , $S_\vee$ и две схемы $S_\&$.

Функции f_0 и f_1 согласно индуктивному предположению можно реализовать схемами C_1 и C_2 , ненадежность которых не больше $2\gamma^3$. Тогда ненадежность схемы S удовлетворяет неравенству

$$P(S) \leq 10\gamma^3.$$

По схеме S строим схему $\chi(S)$. При $\gamma \leq 1/8$ по лемме 3

$$\begin{aligned} P(\chi(S)) &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 30\gamma^3)^3 \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (31\gamma^3 + 4\gamma^4)^3 \leq \gamma^3 + 5\gamma^4 \\ &\leq 2\gamma^3. \end{aligned}$$

Схема $\chi(S)$ является искомой. Лемма 4 доказана.

Теорема 1. При $\gamma \leq 1/8$ любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать схемой D такой, что

$$P(D) \leq \gamma^3 + 5\gamma^4.$$

Доказательство. Возьмем схему S , удовлетворяющую условию леммы 4. Построим по ней схему $\chi(S)$. По лемме 3

$$\begin{aligned} P(\chi(S)) &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + (\gamma^3 + 4\gamma^4 + 6\gamma^3)^3 \\ &\leq \gamma^3 + 4\gamma^4 + 0,9\gamma^6 \\ &\leq \gamma^3 + 5\gamma^4. \end{aligned}$$

Схема $\chi(S)$ является искомой. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что при неисправностях типа 0 на входах элементов любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше γ^3 при $\gamma \rightarrow 0$.

Теорема 2. Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, отличной от констант 0, 1 и функций x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и любой схемы S , реализующей f , при $\gamma < 1/2$ верно неравенство

$$P(S) \geq \gamma^3.$$

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция, а S — любая схема, ее реализующая. Выделим в S функциональный элемент E , выход которого является выходом схемы. Возможны три случая.

В первом случае элемент E является конъюнктом. Вычисляя вероятность ошибки P_0 на выходе схемы S при единичных входных наборах схемы S , получаем, что

$$P_0 = (1 - p)(3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3) + p,$$

где p — вероятность появления набора, отличного от (111), на входах конъюнктора E . Очевидно, что

$$P_0 = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3 + p(1 - \gamma)^3.$$

Поэтому

$$P(S) \geq 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3 \geq \gamma^3.$$

Во втором случае элемент E является дизъюнктом. Вычисляя вероятность ошибки P_0 на выходе схемы S при единичных входных наборах схемы S , получаем, что

$$P_0 = (1 - p)q + p,$$

где $q = \gamma$, или $q = \gamma^2$, или $q = \gamma^3$, а p — вероятность появления набора (000) на входах дизъюнктора E . Ясно, что

$$P_0 = q + p(1 - q) \geq q.$$

Поэтому

$$P(S) \geq \gamma^3.$$

Наконец, в третьем случае элемент E является инвертором. Вычисляя вероятность ошибки P_1 на выходе схемы S при нулевых входных наборах схемы S , получаем, что

$$P_1 = (1 - p)\gamma + p,$$

где p — вероятность появления 0 на входе инвертора E . Ясно, что

$$P_1 = \gamma + p(1 - \gamma).$$

Поэтому

$$P(S) \geq \gamma \geq \gamma^3.$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что при неисправностях типа 0 на входах элементов схемы, построенные в теореме 1 для функций $f(x_1, \dots, x_n)$, отличных от x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и констант, являются асимптотически наилучшими по надежности и функционируют с ненадежностью, асимптотически равной γ^3 при $\gamma \rightarrow 0$.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны (см. [8]), а рассматриваемый базис двойственен себе, полученные результаты справедливы при неисправностях типа 1 на входах функциональных элементов.

Список литературы

1. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. Изд-во МГУ, Москва, 1992.
2. Тарасов В. В., К синтезу надежных схем из ненадежных элементов. *Математические заметки* (1976) **20**, №3, 391–400.
3. Нейман Дж., Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. В кн.: *Автоматы*. ИЛ, Москва, 1956, с. 68–139.
4. Ортюков С. И., Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов. В сб.: *Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям*. Изд-во МГУ, Москва, 1989, с. 166–168.
5. Uhlig D., Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. *Lecture Notes Comput. Sci.* (1987) **278**, 462–469.
6. Алехина М. А., О надежности схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 75–80.
7. Алехина М. А., Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов. *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. I* (2002) **9**, №3, 3–28.
8. Алехина М. А., О надежности двойственных схем. В сб.: *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Изд-во Центра прикладных исслед. при механико-матем. ф-те МГУ, Москва, 2001, с. 6–8.

Статья поступила 5.11.2004.