Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 113–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 09:06:20

УДК 519.2

Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде

© 1999 г. Е. Е. Дьяконова

Рассматривается многомерный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Показано, что асимптотика вероятности невырождения этого процесса в момент времени n при некоторых условиях, наложенных на производящие функции числа потомков, имеет порядок $n^{-1/2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00338 и 96-15-96092, и INTAS-RFBR, проект 95-0099.

1. Введение

Изучению поведения ветвящихся процессов в случайной среде посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2, 4–10]). Впервые модель ветвящегося процесса в случайной среде была рассмотрена Смитом и Вилкинсоном [1]. В последующих работах [2, 5–7] наряду с одномерными процессами исследовались и многомерные процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. Асимптотика вероятности невырождения одномерного критического ветвящегося процесса в случайной среде была изучена в [9]. В настоящей работе результаты, полученные в [9], обобщаются на случай многомерных ветвящихся процессов.

Мы будем рассматривать ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона

$$Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

с $p > 1$ типами частиц в случайной среде ζ , который может быть определен следующим образом. Пусть $\zeta = \{\zeta_n, n = 0, 1, \dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающих значения из счетного подмножества Θ множества действительных чисел.

В дальнейшем будем обозначать $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, соответственно, вектор-столбец и вектор-строку с координатами $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Пусть N^p — множество всех векторов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ с целочисленными неотрицательными координатами. Предположим, что каждой точке $\theta \in \Theta$ поставлен в соответствие

p -мерный вектор-столбец $F^{(\theta)}(s) = (F_1^{(\theta)}(s), \dots, F_p^{(\theta)}(s))^T$ вероятностных производящих функций

$$F_i^{(\theta)}(s) = \sum_{\tilde{\alpha} \in N^p} b(i, \theta, \tilde{\alpha}) \prod_{i=1}^p (s_i)^{\alpha_i}, \quad s = (s_1, \dots, s_p)^T, \\ 0 \leq s_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

Процесс Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде ζ описывает эволюцию популяции частиц $Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n))$, $n = 0, 1, \dots$, где $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, p$, — число частиц типа i , присутствующих в процессе в момент времени n . Предполагается, что в если $\zeta_n = \theta$, $\theta \in \Theta$, то в момент времени n все $Z_i(n)$ частиц i -го, $i = 1, \dots, p$, типа размножаются согласно p -мерной производящей функции $F_i^{(\theta)}(s)$, причем количество потомков любой частицы не зависит от числа потомков других частиц данного типа и от числа потомков частиц других типов. Таким образом, компонента $Z_i(n+1)$, $i = 1, \dots, p$, вектора $Z(n+1)$ равняется числу частиц i -го типа среди всех потомков частиц n -го поколения $Z(n)$, при этом $b(i, \theta, \tilde{\alpha})$ есть вероятность того, что частица i из n -го поколения при условии $\zeta_n = \theta$ будет иметь α_j потомков типа j , $j = 1, \dots, p$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$.

Введем ряд обозначений. Пусть I — единичный, 0 — нулевой p -мерные векторы-столбцы, $\tilde{e}_j$ — p -мерный вектор-строка, j -я компонента которого равняется единице, а все остальные нулю. Для $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)^T$ будем обозначать

$$|\tilde{x}| = \sum_{i=1}^p |x_i|, \quad |y| = \sum_{i=1}^p |y_i|, \quad \tilde{x}y = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

Пусть $A = |A(i, j)|_{i,j=1}^p$ — произвольная положительная матрица размера $p \times p$. Положим

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, p} \sum_{j=1}^p A(i, j).$$

Обозначим $\rho(A)$ — перронов корень матрицы A . Пусть $r(A) = (r_1(A), \dots, r_p(A))^T$ и $\tilde{l}(A) = (l_1(A), \dots, l_p(A))$ — правый и, соответственно, левый собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\rho(A)$ и удовлетворяющие условиям нормировки

$$\tilde{l}(A)r(A) = 1, \quad |\tilde{l}(A)| = 1. \quad (1)$$

Нам понадобится также еще одна пара векторов, состоящая из правого $R(A) = (R_1(A), \dots, R_p(A))^T$ и левого $\tilde{L}(A) = (L_1(A), \dots, L_p(A))$ собственных векторов матрицы A , соответствующих собственному значению $\rho(A)$ и нормированных так, что

$$\tilde{L}(A)R(A) = 1, \quad |\tilde{R}(A)| = 1. \quad (2)$$

Пусть, далее,

$$M_{\zeta_n} = |M_{\zeta_n}(i, j)|_{i,j=1}^p = \left| \frac{\partial F_i^{(\zeta_n)}(I)}{\partial s_j} \right|_{i,j=1}^p$$

— случайная матрица математических ожиданий векторной (случайной) производящей функции $F^{(\zeta_n)}(s)$, $M^{(\theta)} = |M^{(\theta)}(i, j)|_{i,j=1}^p = M_{\zeta_n}$ при $\zeta_n = \theta$, $\theta \in \Theta$, $\rho_{\zeta_n} = \rho(M_{\zeta_n})$, $n = 0, 1, \dots$, $\rho^{(\theta)} = \rho(M^{(\theta)})$.

Введем также матрицы

$$B_{\zeta_n}^{(k)} = |B_{\zeta_n}^{(k)}(i, j)|_{i,j=1}^p = \left| \frac{\partial^2 F_k^{(\zeta_n)}(I)}{\partial s_i \partial s_j} \right|_{i,j=1}^p, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$B^{(\theta, k)} = |B^{(\theta, k)}(i, j)|_{i,j=1}^p = B_{\zeta_n}^{(k)}, \quad \zeta_n = \theta, \quad \theta \in \Theta, \quad n = 0, 1, \dots$$

В дальнейшем, там где это не вызывает недоразумений, вместо индекса ζ_n будем писать n , например, $M_n = |M_n(i, j)|_{i,j=1}^p$, $B_n^{(k)} = |B_n^{(k)}(i, j)|_{i,j=1}^p$, ρ_n вместо $M_{\zeta_n} = |M_{\zeta_n}(i, j)|_{i,j=1}^p$, $B_{\zeta_n}^{(k)} = |B_{\zeta_n}^{(k)}(i, j)|_{i,j=1}^p$, ρ_{ζ_n} . Заметим, что ρ_n , $n = 0, 1, \dots$, образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

С каждым $i = 1, \dots, p$ свяжем случайный момент T_i вырождения процесса $Z(n)$ при условии, что $Z(0) = \tilde{e}_i$:

$$T_i = n \iff Z(0) = \tilde{e}_i, \quad Z(n-1) \neq \tilde{0}, \quad Z(n) = \tilde{0}, \quad \tilde{0} = (0, \dots, 0).$$

Известно [7], что

$$P(T_i > n) = M \tilde{e}_i (I - F^{(\zeta_0)}(F^{(\zeta_1)} \dots (F^{(\zeta_{n-1})}(0))))). \quad (3)$$

В работах [2, 7] показано, что для неразложимого ветвящегося процесса $Z(n)$, имеющего ограниченные первые и вторые моменты и функционирующего в случайной среде ζ , существует с вероятностью единица предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} M_i \right\| = \pi, \quad (4)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} M_i \right\| = \pi.$$

Известно [2, 7], что если $\pi \leq 0$, то процесс $Z(n)$ вырождается с вероятностью единица.

2. Формулировка основных результатов

Предположим, что существуют такие постоянные $m > 0$, $b > 0$, $1 < D_1 < D_2 < \infty$, что при всех значениях $\theta \in \Theta$, $i, j, k = 1, \dots, p$,

$$m \leq M^{(\theta)}(i, j) \leq D_1, \quad (5)$$

$$b \leq B^{(\theta, k)}(i, j) \leq D_2. \quad (6)$$

Кроме того, предположим, что выполняется следующее условие A: существует такой положительный вектор $r = (r_1, \dots, r_p)^T$, что при любом $\theta \in \Theta$

$$r(M^{(\theta)}) = r. \quad (7)$$

Таким образом, все матрицы $M^{(\theta)}$, $\theta \in \Theta$, математических ожиданий векторных производящих функций $F^{(\theta)}(s)$, $s = (s_1, \dots, s_p)^T$, имеют общий положительный правый собственный вектор r :

$$M^{(\theta)}r = \rho(M^{(\theta)})r. \quad (8)$$

Теорема 1. *Предположим, что для ветвящегося процесса $Z(n)$ в случайной среде ζ выполнены условия А, (5), (6) и*

$$\mathbf{M} \ln \rho_0 = 0, \quad 0 < \mathbf{M}(\ln \rho_0)^2 < \infty. \quad (9)$$

Тогда при некоторых постоянных $0 < c_1 < c_2 < \infty$ справедливы неравенства

$$c_1/\sqrt{n} \leq \mathbf{P}(T_i > n) \leq c_2/\sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad i = 1, \dots, p. \quad (10)$$

Введем класс $H(m, D_1, D_2)$ дробно-линейных многомерных производящих функций $F^{(\theta)}(s)$, $\theta \in \Theta$, состоящий из $F^{(\theta)}(s)$, удовлетворяющих условиям А, (5), (6) и имеющих вид

$$F^{(\theta)}(s) = I - \frac{M^{(\theta)}(I - s)}{1 + \tilde{\gamma}(\theta)(I - s)}, \quad \theta \in \Theta, \\ \tilde{\gamma}(\theta) = (\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_p(\theta)), \quad \gamma_j(\theta) = \gamma^{(\theta)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (11)$$

$$\frac{D_2}{2D_1} \geq \gamma^{(\theta)} \geq \frac{pD_1 - 1}{K}, \quad D_2 \geq \frac{2pD_1^2}{K}, \\ K = \min\{p, |\tau|\}, \quad b = \frac{2m}{K}(pD_1 - 1). \quad (12)$$

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 для ветвящихся процессов $Z(n)$ в случайной среде ζ , имеющих дробно-линейные многомерные производящие функции $F^{(\theta)}(s) \in H(m, D_1, D_2)$, при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}(T_i > n) \sim \frac{d_i}{\sqrt{n}}, \quad d_i > 0. \quad (13)$$

Заметим, что из (12) следует, что

$$F_i^{(\theta)}(0) \geq 1 - \frac{\|M^{(\theta)}\|}{1 + \gamma^{(\theta)}p} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

то есть соотношение (11) действительно определяет многомерную производящую функцию случайного вектора.

Несложно показать, что выполняется следующее утверждение.

Следствие. *При замене в формулировках теорем 1, 2 условия А на условие А', состоящее в том, что все матрицы $M^{(\theta)}$, $\theta \in \Theta$, имеют общий положительный левый собственный вектор $\tilde{L} = \tilde{L}(M^{(\theta)})$, утверждения теорем 1, 2 остаются в силе.*

Отметим, что ключевым моментом в доказательстве теорем 1, 2 является сходимость по распределению произведения $\prod_{i=1}^n M_i/\rho_i$ к ненулевой матрице при $n \rightarrow \infty$.

Известно [14], что в случае $p = 2$ произведение $\prod_{i=1}^n M_i/\rho_i$ положительных ограниченных матриц $A_i = M_i/\rho_i$ сходится по распределению к ненулевой матрице при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда матрицы A_i имеют общие положительные правые или левые собственные векторы, поэтому в случае двумерного процесса $Z(n)$ невозможно отказаться от требования наличия общего положительного правого или левого собственного вектора у матриц $M^{(\theta)}$, $\theta \in \Theta$.

3. Доказательства теорем

Докажем сначала теорему 2. Обозначим

$$q^i(n) = \mathbf{P}(T_i > n).$$

Введем случайную матрицу

$$E_{k,n} = M_k \dots M_n, \quad k \leq n.$$

Из условия (5) следует, что для всех $\theta \in \Theta$, всех $n \geq 0$ и всех i_1, i_2, j_1, j_2

$$a \leq \frac{M_n(i_1, j_1)}{M_n(i_2, j_2)} \leq a^{-1}, \quad (14)$$

где

$$0 < a \leq \frac{m}{D_1} < 1.$$

Известно ([15], лемма 1), что для произведения $E_{k,n} = |E_{k,n}(i, j)|_{i,j=1}^p$ матриц $M_k, \dots, M_n$, удовлетворяющих условиям A , (14), справедливо представление

$$E_{k,n}(i, j) = \prod_{v=k}^n \rho_v r_{i,j}(E_{k,n})(1 + \mu_{k,n}(i, j)\beta^{n-k+1}), \quad (15)$$

где

$$\beta = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \quad |\mu_{k,n}(i, j)| \leq C_1 = C_1(a), \quad (16)$$

где C_1 — постоянная, $r = (r_1, \dots, r_p)$ — собственный вектор из условия A .

Суммируя $E_{k,n}(i, j)$ по j от 1 до p и учитывая соотношения (2), из (15) получаем, что

$$\left| \frac{\tilde{e}_i \prod_{j=k}^n M_j I}{\prod_{j=k}^n \rho_j} - r_i \right| \leq C_1 \beta^{n-k+1}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (17)$$

где C_1 — постоянная. Заметим, что из (9) и (17) следует, что для процесса $Z(n)$, удовлетворяющего условиям теоремы 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^n M_i \right\| = 0 \text{ (п.н.)}, \quad (18)$$

то есть (см., например, [7]) $Z(n)$ вырождается с вероятностью единица.

Будем обозначать $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}(\zeta_n)$, $F_n(s) = F^{(\zeta_n)}(s)$, $\gamma_n = \gamma^{(\zeta_n)}$, $n = 0, 1, \dots$, (ср. с (11), (12)).

Лемма 1. В условиях теоремы 2

$$q^i(n) = \mathbf{M} \frac{\tilde{e}_i M_0 \dots M_{n-1} I}{1 + \tilde{\gamma}_0 M_1 \dots M_{n-1} I + \tilde{\gamma}_1 M_2 \dots M_{n-1} I + \dots + \tilde{\gamma}_{n-1} I}. \quad (19)$$

Доказательство. Применяя интегрирование, несложно получить, что для дробно-линейных производящих функций $F^{(\theta)}(s)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & I - F_0(F_1 \dots (F_{n-1}(s)) \dots) \\ &= \frac{M_0(I - F_1(\dots (F_{n-1}(s)) \dots))}{1 + \tilde{\gamma}_0(I - F_1(\dots (F_{n-1}(s)) \dots))} \\ &= \frac{M_0 M_1(I - F_2(\dots (F_{n-1}(s)) \dots))}{1 + \tilde{\gamma}_0 M_1(I - F_2(\dots (F_{n-1}(s)) \dots)) + \tilde{\gamma}_1(I - F_2(\dots (F_{n-1}(s)) \dots))} \\ &= \frac{M_0 \dots M_{n-1}(I - s)}{1 + \tilde{\gamma}_0 M_1 \dots M_{n-1}(I - s) + \tilde{\gamma}_1 M_2 \dots M_{n-1}(I - s) + \dots + \tilde{\gamma}_{n-1}(I - s)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая в (20) $s = 0$ и используя представление (3), получаем утверждение леммы.

Несложно видеть, что в условиях теоремы 2

$$\frac{\partial^2 F_l^{(\theta)}(I)}{\partial s_i \partial s_j} = \gamma^{(\theta)}(M^{(\theta)}(l, j) + M^{(\theta)}(l, i)), \quad l, i, j = 1, \dots, p. \quad (21)$$

Из (5), (6), (21) следует, что существуют такие постоянные $a_1, a_2, 0 < a_1 < a_2$, что

$$a_1 < \gamma(n) < a_2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Из (17), (19) следует, что

$$q^i(n) = \mathbf{M} \frac{\tilde{e}_i \prod_{i=0}^{n-1} \rho_i(r + t(n-1, 0))}{1 + \tilde{\gamma}_0 \prod_{i=1}^{n-1} \rho_i(r + t(n-1, 1)) + \tilde{\gamma}_1 \prod_{i=2}^{n-1} \rho_i(r + t(n-1, 2)) + \dots + \tilde{\gamma}_{n-1} I}, \quad (23)$$

где

$$t(n, k) = \prod_{i=k}^n \frac{M_i}{\rho_i} I - r, \quad t(n, k) = (t_1(n, k), \dots, t_p(n, k)), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

причем для $t_j(n, k), j = 1, \dots, p$, выполняется неравенство

$$|t_j(n, k)| \leq C_1 \beta^{n-k+1}, \quad (24)$$

где C_1 — положительная постоянная, $0 < \beta < 1$.

Заметим, что

$$0 < r_j + t_j(n, k), \quad j = 1, \dots, p. \quad (25)$$

Пусть

$$\begin{aligned} X_i &= \ln \rho_{i-1}, \\ \tilde{\mu}_i &= \frac{\tilde{\gamma}_{i-1}}{\rho_{i-1}} = (\mu_i, \dots, \mu_i), \quad \mu_i = \frac{\gamma_{(i-1)}}{\rho_{i-1}}, \\ \eta_i &= \mu_i \sum_{j=1}^p r_j, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Несложно видеть, что $\eta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, а $(X_i, \eta_i)_{i=1}^\infty$ есть последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов, причем, как это следует из (9), (22), (5);

$$\mathbf{M}\eta_1 < \infty, \quad \mathbf{M}|\eta_1 X_1| < \infty, \quad 0 < \mathbf{M}X_1^2 < \infty, \quad (26)$$

так как в силу (22) и (5) найдется такая постоянная $C > 0$, что

$$\eta_i \in (0, C], \quad i = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$, порожденное последовательностью $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин $X_i = \ln \rho_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Введем строгие нижние лестничные моменты τ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, полагая $\tau_0 = 0$ и $\tau_j = n$, если $\tau_{j-1} < n$, $S_i \geq S_{\tau_{j-1}}$ при $i < n$, $S_n < S_{\tau_{j-1}}$.

Пусть символ $\mathbf{M}_n$ означает математическое ожидание при условии $\tau_1 > n$.

Из (23) следует, что

$$\begin{aligned} q^i(n) &= \mathbf{M} \left\{ \frac{\tilde{e}_i r + \tilde{e}_i t(n-1, 0)}{\prod_{i=0}^{n-1} \rho_i^{-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j^{-1} \tilde{\mu}_{i+1}(r + t(n-1, i))} \right\} \\ &= \mathbf{M} \left\{ \frac{r_i + t_i(n-1, 0)}{e^{-S_n} + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i} \eta_{i+1}(1 + d(n-1, i))} \right\}, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (28)$$

где случайные величины

$$d(n-1, i) = \frac{1}{|r|} \sum_{j=1}^p t_j(n-1, i) > -1 \quad (29)$$

в силу (25).

Кроме того, из (5), (7) и (24) следует, что

$$|d(n, k)| \leq \varphi(n-k+1), \quad k \leq n, \quad (30)$$

где

$$\varphi(n) = C_1 \beta^n, \quad C_1 > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad (31)$$

C_1 и β — постоянные. Легко также видеть, что распределение случайной величины $d(n+k, i+k)$, $i \leq n$, $k \geq 0$, не зависит от k .

Положим

$$h(n) = \left(e^{-S_n} + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i} \eta_{i+1}(1 + d(n-1, i)) \right)^{-1}. \quad (32)$$

Исследуем асимптотику $\mathbf{M}h(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Введем в рассмотрение одномерный процесс Гальтона-Ватсона $W(n)$, $n = 0, 1, \dots$, в нашей случайной среде ζ со следующими дробно-линейными производящими функциями:

$$f_{i-1}(z) = 1 - \frac{e^{X_i}(1-z)}{1 + e^{X_i} \eta_i(1-z)}. \quad (33)$$

Отметим, что из (12) следует, что

$$f_i(0) = 1 - \frac{\rho_i}{1 + \gamma_{(i)}K} \geq 0, \quad K = \min\{p, |r|\}.$$

В силу определения случайных величин $\eta_i, X_i, i = 1, 2, \dots$,

$$\eta_i > 0, \quad \mathbf{M}X_i = 0, \quad 0 < \mathbf{M}X_i^2 < \infty, \quad \mathbf{M}\eta_i < \infty, \quad \mathbf{M}|\eta_i X_i| < \infty. \quad (34)$$

Процесс $W(n), n = 0, 1, \dots$, изучался М. В. Козловым в работе [9], в которой была получена асимптотика вероятности невырождения процесса $W(n)$ на основе исследования поведения $\mathbf{M}Y(n), n \rightarrow \infty$, где

$$Y(n) = \left(e^{-S_n} + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i} \eta_{i+1} \right)^{-1}. \quad (35)$$

При этом существенно использовался тот факт, что $(X_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots$, являются независимыми одинаково распределенными случайными векторами. Для пар $(X_i, \eta_i + \eta_i d(n-1, i)), i = 1, 2, \dots$, это не так, поскольку случайная величина $d(n-1, i)$ зависит от $X_i, \dots, X_{n-1}$.

Пусть N — множество натуральных чисел, $\Rightarrow$ — знак сходимости по распределению. Положим

$$Y(n, a, b) = \left(a + b \left(e^{-S_n} + \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \right) \right)^{-1}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 1,$$

$$h^+(n, a, b, v, l, c) = \left(a(1 - \varphi([vn])) + b(1 + c\varphi([ln]))^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 + d(n-1, i)) + e^{-S_n} \right) \right)^{-1},$$

$$h_-(n, a, b, v, l, c) = \left(a(1 + \varphi([vn])) + b(1 + c\varphi([ln])) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 + d(n-1, i)) + e^{-S_n} \right) \right)^{-1},$$

$a \geq 0, b \geq 1, c > 0, v > 0, l > 0$.

Разобьем область интегрирования в $\mathbf{M}h(n)$ на части $(\tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n), j = 0, 1, \dots, m-1$, и $(\tau_m \leq n)$. Известно ([9], формулы (16), (17)), что при выполнении условий (34), при $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P}(\tau_1 > n) \sim c_3/\sqrt{n}, \quad \mathbf{P}(\tau_j \geq n, \tau_{j+1} > n) \sim c_3/\sqrt{n}, \quad (36)$$

где c_3 — положительная постоянная. Кроме того, в [9], теорема В, показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{S_i, \eta_i, i \in N \mid \tau_1 > n\} \Rightarrow \{\hat{S}_i, \hat{\eta}_i, i \in N\}, \quad (37)$$

где $\{\widehat{S}_i\}$ — некоторая однородная марковская цепь, выходящая из нуля, принимающая неотрицательные значения и не сосредоточенная в нуле, а случайные величины $\widehat{\eta}_i$, $i \in N$, неотрицательны с вероятностью единица. Следуя работе [9], результаты которой будут существенно использоваться в дальнейшем, сохраним для удобства изложения обозначение $\{S_n, \eta_n\}$ для процесса с конечномерными распределениями, задаваемыми правой частью (37), но в случае, когда речь идет об этом процессе, будем использовать для вероятности и математического ожидания обозначения $\widehat{P}$ и $\widehat{M}$, соответственно.

Лемма 2. При $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}(h(n); \tau_1 > n) \sim c_3 A_0 / \sqrt{n}, \quad (38)$$

где c_3 — постоянная из выражения (36),

$$A_0 = \widehat{M} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1} e^{-S_i} \right)^{-1}, \quad A_0 \in (0, \infty). \quad (39)$$

Доказательство. В ([9], стр. 819–821) показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}(Y(n); \tau_1 > n) \sim c_3 A_0 / \sqrt{n} \quad (40)$$

и $0 < A_0 < \infty$. Положим $V_i(n) = 1 - \widetilde{e}_i F_0(F_1 \dots (F_{n-1}(0)) \dots)$, то есть

$$V_i(n) = \frac{r_i + t_i(n-1, 0)}{\sum_{j=0}^{n-1} \eta_{j+1} e^{-S_j} (1 + d(n-1, j)) + e^{-S_n}}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (41)$$

Учитывая очевидное неравенство

$$1 \geq \widetilde{e}_i F_0(F_1 \dots (F_{n-1}(0)) \dots) \geq \widetilde{e}_i F_0(F_1 \dots (F_{m-1}(0)) \dots), \quad m < n, \quad (42)$$

получаем, что $V_i(n) \leq V_i(m)$, $m < n$, $i = 1, \dots, p$, откуда в силу (24), (32), (41) следует, что

$$h(n) \leq c_4, \quad (43)$$

где $c_4 > 1 / \min_{i=1, \dots, p} r_i$. Известно ([9], формула (27)), что

$$Y(n) \leq 1. \quad (44)$$

Из (42) и (44) получаем, что при достаточно больших n

$$|h(n) - Y(n)| \leq c_4 \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i), \quad (45)$$

где функция $\varphi(n)$ определена в (31). Покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i) = 0. \quad (46)$$

Для каждого фиксированного $0 < \delta < 1/4$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i) &= \sum_{i=0}^{[n/2]} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i) + \sum_{i=[n/2]+1}^{[(1-\delta)n]} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i) \\ &+ \sum_{i=[(1-\delta)n]+1}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i). \end{aligned} \quad (47)$$

Из ([9], формулы (35), (13)) следует, что

$$\mathbf{M}_n \sum_{i=0}^{[n/2]} \eta_{i+1} e^{-S_i} \leq c_5 \int_0^\infty e^{-x} (\mathbf{M} \eta_1(x+1) + \mathbf{M} |X_1 \eta_1|) dU(x), \quad (48)$$

где

$$U(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(x), \quad U_i(x) = \mathbf{P}(S_j \leq S_i, 0 \leq j < i, S_i \leq x), \quad c_5 > 0.$$

Применяя к $U(x)$ теорему восстановления, получаем, что правая часть (48) не превосходит некоторой константы $c_6 > 0$. Поэтому, ввиду (31),

$$\mathbf{M}_n \sum_{i=0}^{[n/2]} \eta_{i+1} e^{-S_i} \varphi(n-i) \leq c_7 \beta^{[n/2]} \rightarrow 0, \quad (49)$$

где c_7 — положительная постоянная, и при $n \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю.

Из доказательства формулы (36) в [9] следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_n \left(\sum_{i=[n/2]+1}^{[(1-\delta)n]} \eta_{i+1} e^{-S_i} \right) = 0. \quad (50)$$

В работе ([8], стр. 231) показано, что

$$\mathbf{M}_n \sum_{i=[(1-\delta)n]+1}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} \leq c_8 \delta, \quad c_8 > 0. \quad (51)$$

Так как $\delta > 0$ можно взять сколь угодно малым, то из (31), (47), (49)–(51) получаем (46). Из (36), (40), (45), (46) следует утверждение леммы.

Замечание. Аналогичными рассуждениями, используя соотношение ([9], лемма 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_n Y(n, a, b) = \hat{\mathbf{M}} \left(\left(a + b \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1} e^{-S_i} \right)^{-1} \right), \quad (52)$$

можно показать, что для любых $a \geq 0$, $b \geq 1$, $v > 0$, $l > 0$, $c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_n h^+(n, a, b, v, l, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_n h^-(n, a, b, v, l, c) = \hat{\mathbf{M}} \left(\left(a + b \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1} e^{-S_i} \right)^{-1} \right). \quad (53)$$

Известно ([9], формула (38)), что при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $j = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{M}(Y(n); \tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n) \sim c_3 A_j / \sqrt{n},$$

где

$$A_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \sum_{j=0}^{\infty} A_j < \infty. \quad (54)$$

Покажем, что для величин $h(n)$ имеет место аналогичное утверждение.

Лемма 3. При каждом фиксированном $j \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n) \sim \frac{c_3 A_j}{\sqrt{n}}. \quad (55)$$

Доказательство. Воспользуемся методом, предложенным в работе [9]. Зафиксируем $0 < \delta < 1$. Известно ([9], формула (20)), что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n) - \mathbf{P}(\tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} > n) = o(1/\sqrt{n}). \quad (56)$$

Рассмотрим

$$\mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} > n). \quad (57)$$

Так как

$$\{\tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > n\} \subseteq \{\tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} > n\} \subseteq \{\tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > (1 - \delta)n\},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > n) &\leq \mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} > n) \\ &\leq \mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > (1 - \delta)n). \end{aligned} \quad (58)$$

Ясно, что при $\tau_j < n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 + d(n-1, i)) + e^{-S_n} &= \sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 + d(n-1, i)) \\ &+ e^{-S_{\tau_j}} \left(\sum_{i=\tau_j}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-(S_i - S_{\tau_j})} (1 + d(n-1, i)) + e^{-(S_n - S_{\tau_j})} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Положим $\eta'_i = \eta_{\tau_j+i}$, $S'_i = S_{\tau_j+i} - S_{\tau_j}$, $\tau'_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$, $d'(k, l) = d(\tau_j + k, \tau_j + l)$. Из (24), (28), и (42) следует, что существует такое m^* , что для всех $n > n' > m > m^*$

$$(1 + c_9 \varphi(m))^{-1} h^{-1}(m) \leq h^{-1}(n') \leq h^{-1}(n) (1 + c_9 \varphi(m)), \quad (60)$$

где $c_9 > 0$. Для $\tau_j \leq \delta n$ выражение в скобках в (59) при достаточно больших n согласно (60) ограничено сверху и снизу, соответственно, величинами

$$(1 + c_9 \varphi([(1 - \delta)n])) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} (1 + d'(n-1, i)) + e^{-S'_n} \right) \quad (61)$$

и

$$\frac{1}{1 + c_9 \varphi([(1 - \delta)n])} \left(\sum_{i=0}^{[(1-\delta)n]-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} (1 + d'([(1 - \delta)n] - 1, i)) + e^{-S'_{[(1-\delta)n]}} \right). \quad (62)$$

Исследуем верхнюю оценку для выражения (57), которая при достаточно больших n согласно (30), (58), (59) и (62) может быть записана в виде

$$\mathbf{M} \left(\left(\sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 - \varphi([(1 - \delta)n])) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + c_9 \varphi([(1 - \delta)n]))^{-1} e^{-S_{\tau_j}} \left(\sum_{i=0}^{[(1-\delta)n]-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} (1 + d'([(1 - \delta)n] - 1, i)) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-S'_{[(1-\delta)n]}} \right) \right)^{-1}; \tau'_1 > (1 - \delta)n \right). \quad (63)$$

Так как последовательность $\{\eta'_i, d'_i, S'_i\}$ есть точная вероятностная копия исходной последовательности $\{\eta_i, d_i, S_i\}$ и не зависит от $S_1, \dots, S_{\tau_j}$, то случайные величины $\sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}$, $e^{-S_{\tau_j}}$ не зависят от случайной величины

$$\sum_{i=0}^{[(1-\delta)n]-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} (1 + d'([(1 - \delta)n] - 1, i)) + e^{-S'_{[(1-\delta)n]}},$$

а последняя имеет такое же распределение, как если бы штрихи над η_i, S_i, d_i отсутствовали. Будем обозначать $\mathbf{M}'_n$ условное математическое ожидание при условии величин $\eta_1, \dots, \eta_{\tau_j}, S_1, \dots, S_{\tau_j}, \tau_j$ и события $(\tau'_1 > (1 - \delta)n)$. Запишем (63) в виде

$$\mathbf{M} \left(\mathbf{M}'_n \left(\sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} (1 - \varphi([n(1 - \delta)])) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + c_9 \varphi([(1 - \delta)n]))^{-1} e^{-S_{\tau_j}} \left(\sum_{i=0}^{[(1-\delta)n]-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} (1 + d'([(1 - \delta)n] - 1, i)) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^{-S'_{[(1-\delta)n]}} \right) \right)^{-1} \right) \mathbf{P}(\tau'_1 > (1 - \delta)n). \quad (64)$$

При $n \rightarrow \infty$ согласно (53) внутреннее математическое ожидание в (64) сходится с вероятностью единица к

$$\widehat{\mathbf{M}}' \left(\sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} + e^{-S_{\tau_j}} \sum_{i=0}^{\infty} \eta'_{i+1} e^{-S'_i} \right)^{-1}, \quad (65)$$

где символ $\widehat{\mathbf{M}}'$ означает, что математическое ожидание вычисляется при фиксированных значениях $\eta_1, \dots, \eta_{\tau_j}, \tau_j, S_1, \dots, S_{\tau_j}$, а распределение процесса (S'_i, η'_i) , $i =$

1, 2, ..., соответствует мере $\hat{\mathbf{P}}$. Так как в силу (43) подынтегральная функция в (64) ограничена, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n} \mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > (1 - \delta)n) \} \leq \frac{c_3 A_j}{\sqrt{1 - \delta}}, \quad (66)$$

где

$$A_j = \mathbf{M} \hat{\mathbf{M}}' \left(\sum_{i=0}^{\tau_j-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} + e^{-S_{\tau_j}} \sum_{i=0}^{\infty} \eta'_{i+1} e^{-S'_{i+1}} \right)^{-1}. \quad (67)$$

Аналогично получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n} \mathbf{M}(h(n); \tau_j \leq \delta n, \tau_{j+1} - \tau_j > n) \} \leq c_3 A_j. \quad (68)$$

Из (56), (66), (68) следует утверждение леммы.

Напомним, что в силу (32), (41)

$$V_i(n) = (r_i + t_i(n-1, 0))h(n), \quad i = 1, \dots, p. \quad (69)$$

Из лемм 2, 3 и соотношения (28) следует, что при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $j = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{M}(V_i(n); \tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n) \sim \frac{c_3 r_i A_j}{\sqrt{n}}. \quad (70)$$

Лемма 4. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbf{M}(V_i(n); \tau_m \leq n) = 0. \quad (71)$$

Доказательство. Из (43) и (59) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(V_i(n); \tau_m \leq n) &= \sum_{j=m}^n \mathbf{M}(V_i(n); \tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n) \\ &\leq \sum_{j=m}^n \sum_{k=m}^n \mathbf{M}(V_i(n); \tau_j = k, \tau_{j+1} - \tau_j > n - k) \\ &\leq c_{10} \sum_{k=m}^n \mathbf{P}(\tau_1 > n - k) \sum_{j=m}^k \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j = k), \quad c_{10} > 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Известно ([12], формулы (5.12), (5.13)), что для произвольного $j \in \mathbf{N}$ и достаточно больших n

$$\mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j = n) \leq c_{11} \lambda^j j n^{-3/2}, \quad (73)$$

где $c_{11} > 0$, $0 < \lambda < 1$. Из (73) получаем, что при достаточно больших m

$$\sum_{j=m}^k \mathbf{M}(e^{S_{\tau_j}}; \tau_j = k) \leq \varepsilon(m) k^{-3/2}, \quad (74)$$

где $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Из (36) следует, что при $n \geq 1$

$$P(\tau_1 > n) < c_{12} n^{-1/2}, \quad (75)$$

где $c_{12} > 0$. Несложно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon(m) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sum_{k=m}^{n-1} (n-k)^{-1/2} k^{-3/2} = 0. \quad (76)$$

Соотношение (71) вытекает из (72)–(76).

Остается заметить, что из (54), (70), (71) следует утверждение теоремы, причем

$$d_i = c_3 r_i \sum_{j=0}^{\infty} A_j. \quad (77)$$

Докажем теперь теорему 1. Обозначим $\kappa_n = \max(-S_0, -S_1, \dots, -S_n)$. Известно ([9], с. 815), что если $MX_1 = 0$, $0 < MX_1^2 < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Me^{\kappa_n} \sim C_2 / \sqrt{n}, \quad (78)$$

где C_2 — положительная постоянная. Ясно, что при $m < n$

$$\tilde{e}_j(I - F_0(F_1(\dots F_{n-1}(0)\dots))) \leq \tilde{e}_j M_0 \dots M_m I = \prod_{k=0}^m \rho_k \tilde{e}_j \prod_{i=0}^m \frac{M_i}{\rho_i} I, \quad j = 1, \dots, p. \quad (79)$$

В силу (17), для некоторой положительной постоянной C_3

$$\tilde{e}_j \prod_{i=0}^m \frac{M_i}{\rho_i} I < C_3, \quad j = 1, \dots, p. \quad (80)$$

Из (79), (80) получаем, что

$$M \tilde{e}_j(I - F_0(F_1(\dots F_{n-1}(0)\dots))) \leq C_3 M e^{-\kappa_n}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Отсюда, используя (78), получаем правое неравенство в выражении (10). Чтобы получить оценку слева в соотношении (10), используем следующую оценку для многомерной производящей функции $f(s)$, $s = (s_1, \dots, s_p)^T$ ([11], формулы (64), (65)):

$$f(s) \leq 1 - N_1^2 / N_2, \quad (81)$$

где

$$N_1 = \sum_{i=1}^p (1 - s_i) \frac{\partial f}{\partial s_i}(I), \quad N_2 = N_1 + \sum_{i,j=1}^p (1 - s_i)(1 - s_j) \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial s_j}(I).$$

Таким образом, (81) можно переписать в виде

$$f(s) \leq 1 - \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial s_i}(I)(1 - s_i) \left(1 + \frac{\sum_{i,j=1}^p (1 - s_i)(1 - s_j) \frac{\partial^2 f}{\partial s_i \partial s_j}(I)}{\sum_{i,j=1}^p (1 - s_i) \frac{\partial f}{\partial s_i}(I)} \right)^{-1}. \quad (82)$$

Рассмотрим $F^{(\theta)}(s) = (F_1^{(\theta)}(s), \dots, F_p^{(\theta)}(s))$, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Положим

$$G^{(\theta)}(s) = I - \frac{M^{(\theta)}(I - s)}{1 + \tilde{\Gamma}(\theta)(I - s)}, \quad (83)$$

где $M^{(\theta)}$ — матрица математических ожиданий для $F^{(\theta)}(s)$, а p -мерный вектор-строка $\tilde{\Gamma}(\theta) = (\Gamma_1(\theta), \dots, \Gamma_p(\theta))$ имеет одинаковые компоненты $\Gamma_j(\theta) = \Gamma$, $j = 1, \dots, p$, где

$$\Gamma = \max \left\{ \frac{D_2}{m}, \frac{pD_2}{K} \right\}, \quad (84)$$

m , D_2 — постоянные из условий (5), (6), $K = \min\{p, |r|\}$. Ясно, что $G^{(\theta)}(s) \in H(m, D_1, D_2, D_3)$, где $D_3 = 2\Gamma D_2$. Если в качестве $f(s)$ рассмотреть $F_i^{(\theta)}(s)$, $\theta \in \Theta$, $i = 1, \dots, p$, то из (82)–(84) легко получить, что

$$F_i^{(\theta)}(s) \leq G_i^{(\theta)}(s), \quad \theta \in \Theta, \quad i = 1, \dots, p, \quad (85)$$

где $G_i^{(\theta)}(s)$ — i -я компонента вектора $G^{(\theta)}(s)$.

Положим

$$G_n(s) = G^{(\zeta_n)}(s).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}\tilde{e}_i(I - G_0(G_1(\dots(G_{n-1}(0))\dots))) \leq \mathbf{M}\tilde{e}_i(I - F_0(F_1(\dots(F_{n-1}(0))\dots))). \quad (86)$$

Применяя теорему 2 к левой части в (86) и используя (3), получаем нижнюю оценку в (10). Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за ряд замечаний, существенно способствовавших улучшению работы.

Список литературы

1. Smith W. L., Wilkinson W. On branching processes in random environment. *Ann. Math. Statist.* (1969) **40**, №3, 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S. On branching processes with random environments I, II. *Ann. Math. Statist.* (1971) **42**, №5, 1499–1520; (1971) **42**, №6, 1843–1858.
3. Agresti A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process. *Adv. Appl. Prob.* (1974) **6**, №2, 322–335.
4. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Prob.* (1975) **12**, №1, 39–46.
5. Tanny D. On multitype branching processes in a random environment. *Adv. Appl. Prob.* (1981) **13**, №3, 464–497.
6. Weissener E. W. Multitype branching processes in random environments. *J. Appl. Prob.* (1971) **8**, №1, 17–31.
7. Kaplan N. Some results about multidimensional branching processes with random environments. *Ann. Prob.* (1974) **2**, №3, 441–455.

8. Borovkov K. A., Vatutin V. A. Reduced critical branching processes in random environment. *Stochastic Processes and their Applications* (1997) **71**, №2, 225–240.
9. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятн. и ее примен.* (1976) **21**, №4, 813–825.
10. Fleischmann K., Vatutin V. A. Reduced subcritical Galton-Watson processes in a random environment. *Preprint No. 306 of the Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik*, Berlin, 1996.
11. Зубков А. М. Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1994) **1**, №4, 638–666.
12. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент. *Дискретная математика* (1997) **9**, №4, 100–126.
13. Athreya K. B., Ney P. E. *Branching Processes*. Springer, Berlin, 1972.
14. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1988.
15. Kesten H., Spitzer F. Convergence in distribution of products of random matrices. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* (1984) **67**, №4, 363–386.
16. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 29.12.97.

Переработанный вариант поступил 14.05.98.