Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич, О. А. Янушкевич, Условия эффективности решения векторной задачи дискретной оптимизации, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 140–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 04:15:13

УДК 519.6

Условия эффективности решения векторной задачи дискретной оптимизации

© 1999 г. В.А. Емеличев, А.В. Пашкевич, О.А. Янушкевич

Для некоторых классов многокритериальных задач с конечным множеством векторных оценок найдены необходимые и достаточные условия парето-оптимальности решения в терминах суммы видоизмененных критериев и, в частности, в терминах суммы положительных степеней критериев.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований республики Беларусь, грант Ф97-266.

Известно, что проблема поиска всех эффективных (парето-оптимальных) решений многокритериальной (векторной) задачи оптимизации не разрешима с помощью приема линейной свертки частных критериев (см., например, [1–5]). Однако в случае дискретной задачи, т.е. задачи с конечным множеством векторных оценок, удалось показать [6–8], что линейная свертка неотрицательно определенных частных критериев, возведенных в некоторые положительные степени, позволяет эту проблему решить. Тем самым в указанном случае получены необходимые и достаточные условия эффективности решений векторной задачи. В этом контексте возникает вопрос, могут ли условия эффективности решения дискретной задачи быть сформулированы в терминах простейшей линейной свертки — суммы степеней частных критериев? Ниже дается положительный ответ на этот вопрос для некоторых классов многокритериальных задач с конечным множеством векторных оценок.

Пусть на множестве (допустимых) решений X задана вектор-функция

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2.$$

Под n -критериальной задачей будем понимать задачу нахождения множества эффективных решений (множества Парето)

$$P(X, f) = \{x \in X: \pi(x, f) = \emptyset\},$$

где

$$\pi(x, f) = \{x' \in X: I(x, x') \cup J(x, x') = N_n, I(x, x') \neq \emptyset\},$$

$$I(x, x') = \{i \in N_n: f_i(x) > f_i(x')\},$$

$$J(x, x') = \{i \in N_n: f_i(x) = f_i(x')\}.$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\mathbf{R}_{\geq}^n = \{y \in \mathbf{R}^n : y_i \geq 0, i \in N_n\},$$

$$\mathbf{R}_{>}^n = \{y \in \mathbf{R}^n : y_i > 0, i \in N_n\},$$

и пусть $f(X) = \{y \in \mathbf{R}^n : y = f(x), x \in X\}$ есть множество векторных оценок.

Теорема 1. Пусть $f(X) \subset \mathbf{R}_{\geq}^n$, $|f(X)| < \infty$. Предположим, что для $x^0 \in X$ выполняется одно из условий: $0 < f_i(x^0) < 1$ для всех $i \in N_n$ или $f_i(x^0) > 1$ для всех $i \in N_n$. Решение x^0 является эффективным тогда и только тогда, когда существует вектор $\kappa \in \mathbf{R}_{>}^n$ такой, что для любого решения $x \in X$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x) \geq \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x^0). \quad (1)$$

Для эффективного решения x^0 в качестве κ можно взять любой вектор κ^0 с компонентами

$$\kappa_i^0 = \alpha \beta_i, \quad i \in N_n, \quad (2)$$

где

$$\alpha \geq \log n / \log \min \left\{ \frac{f_i^{\beta_i}(x)}{f_j^{\beta_j}(x')} > 1 : x, x' \in X, i, j \in N_n \right\}, \quad (3)$$

$$\beta_i = \frac{\log f_1(x^0)}{\log f_i(x^0)}, \quad (4)$$

и тогда

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x) : x \in X \right\} = n f_1^{\alpha}(x^0). \quad (5)$$

Доказательство. Достаточность легко доказать методом от противного, принимая во внимание, что компоненты вектора κ положительны.

Докажем необходимость. Пусть $x^0 \in P(X, f)$ и κ^0 — некоторый вектор с компонентами, определяемыми формулой (2). Нетрудно видеть, что при выполнении любого из двух условий теоремы вектор $\kappa^0 \in \mathbf{R}_{>}^n$, так как числа α и β_i , $i \in N_n$, вычисляемые по формулам (3) и (4), и в том и другом случаях положительны.

Далее докажем, что при $\kappa = \kappa^0$ неравенство (1) верно для любого $x \in X$. Для этого разобьем множество X на два непересекающихся подмножества

$$X_1 = \{x \in X : I(x, x^0) \cup J(x, x^0) = N_n\},$$

$$X_2 = \{x \in X : I(x, x^0) \cup J(x, x^0) \neq N_n\}.$$

Ясно, что для всякого решения $x \in X_1$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x) \geq \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x^0). \quad (6)$$

Теперь покажем, что это неравенство верно для любого $x \in X_2$.

Итак, пусть $x \in X_2$. Тогда из включения $x^0 \in P(X, f)$ следует, что множества $I(x, x^0)$ и $I(x^0, x)$ непусты. Поэтому для любых индексов $i \in I(x, x^0)$ и $j \in I(x^0, x)$ с учетом включения $f(X) \subset \mathbf{R}_{\geq}^n$ и равенств

$$f_1^\alpha(x^0) = f_1^{\kappa_1^0}(x^0) = f_i^{\kappa_i^0}(x^0), \quad i \in N_n, \quad (7)$$

справедливых в силу (4) и очевидных свойств чисел α и β_i

$$\alpha = \kappa_1^0, \quad \beta_i \kappa_1^0 = \kappa_i^0, \quad i \in N_n,$$

выводим, что

$$f_i^{\kappa_i^0}(x) > f_i^{\kappa_i^0}(x^0) = f_j^{\kappa_j^0}(x^0) > f_j^{\kappa_j^0}(x). \quad (8)$$

Учитывая (3) и левое неравенство в (8), находим, что

$$\alpha \geq \log n / \log \delta = \log_\delta n,$$

где $\delta = f_i^{\beta_i}(x) / f_1^{\beta_1}(x^0)$, то есть $f_i^{\kappa_i^0}(x) \geq n f_1^{\kappa_1^0}(x^0)$. Отсюда, принимая во внимание правое неравенство в (8), получим, что

$$f_i^{\kappa_i^0}(x) - f_i^{\kappa_i^0}(x^0) \geq (n-1)(f_j^{\kappa_j^0}(x^0) - f_j^{\kappa_j^0}(x)),$$

откуда следует, что

$$\min\{f_i^{\kappa_i^0}(x) - f_i^{\kappa_i^0}(x^0) : i \in I(x, x^0)\} \geq (n-1) \max\{f_j^{\kappa_j^0}(x^0) - f_j^{\kappa_j^0}(x) : j \in I(x^0, x)\}.$$

Поэтому для любого $x \in X_2$ верно неравенство (6), поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x) - \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x^0) &= \sum_{i \in I(x, x^0)} (f_i^{\kappa_i^0}(x) - f_i^{\kappa_i^0}(x^0)) - \sum_{i \in I(x^0, x)} (f_i^{\kappa_i^0}(x^0) - f_i^{\kappa_i^0}(x)) \\ &\geq \min\{f_i^{\kappa_i^0}(x) - f_i^{\kappa_i^0}(x^0) : i \in I(x, x^0)\} - (n-1) \max\{f_i^{\kappa_i^0}(x^0) - f_i^{\kappa_i^0}(x) : i \in I(x^0, x)\} \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6) справедливо для любого $x \in X$, а следовательно, согласно (7) верно равенство (5). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условие конечности множества векторных оценок $f(X)$ в теореме 1 необходимо для существования правой части неравенства (3).

Замечание 2. Нетрудно видеть, что строгие неравенства

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x) > \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i^0}(x^0)$$

для всех $x \in X \setminus \{x' \in X : J(x', x^0) = N_n\}$ будут выполняться в том случае, когда неравенство (3) строгое.

Если эффективная оценка $f(x^0)$ не вписывается ни в одно из двух условий теоремы, то, как показывает приведенный ниже пример, утверждение теоремы 1 не верно.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $X = \{x', x''\}$, $f_1(x') = 3/4$, $f_1(x'') = 1/2$, $f_2(x') = 0$, $f_2(x'') = 2$. Тогда $P(X, f) = X$.

Теперь, если предположить существование такого вектора $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}_{>}^2$, что

$$f_1^{\kappa_1}(x') + f_2^{\kappa_2}(x') \geq f_1^{\kappa_1}(x'') + f_2^{\kappa_2}(x''),$$

то приходим к противоречивому неравенству

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\kappa_1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa_1} \geq 2^{\kappa_2}.$$

Приведем пример, показывающий, что в утверждении теоремы 1 условие конечности множества векторных оценок $f(X)$ нельзя безоговорочно опустить.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $X = [-1, 0]$, $f_1(x) = x + 3$, $f_2(x) = 3 - \sqrt{1 - x^2}$.

Нетрудно видеть, что эффективное решение $x^0 = -1$ ни при каком векторе $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbf{R}_{>}^2$ не минимизирует функцию $f_1^{\kappa_1}(x) + f_2^{\kappa_2}(x)$ на множестве X .

Действительно, пусть существует такой вектор κ , что для всех $x \in X$

$$f_1^{\kappa_1}(x) + f_2^{\kappa_2}(x) \geq f_1^{\kappa_1}(x^0) + f_2^{\kappa_2}(x^0). \quad (9)$$

Тогда для всех $x \in X \setminus \{-1\}$ должны выполняться неравенства

$$\frac{(x+3)^{\kappa_1} - 2^{\kappa_1}}{3^{\kappa_2} - (3 - \sqrt{1-x^2})^{\kappa_2}} \geq 1,$$

которые, однако, противоречат очевидному равенству

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)^{\kappa_1} - 2^{\kappa_1}}{3^{\kappa_2} - (3 - \sqrt{1-x^2})^{\kappa_2}} = 0.$$

Замечание 3. В примере 2 для эффективного решения $x^0 = -1$ не будет существовать вектора $\kappa \in \mathbf{R}_{>}^2$, удовлетворяющего неравенствам (9), даже в том случае, когда множество решений $X = [-1, 0]$ заменить на следующее счетное множество

$$\{0, -2^{-1}, \dots, -(2^k - 1)2^{-k}, \dots\} \cup \{-1\}.$$

Введем обозначение

$$K(X, f, \kappa) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{\kappa_i}(x) : x \in X \right\},$$

$$K(X, f) = \bigcup_{\kappa \in \mathbf{R}_{>}^n} K(X, f, \kappa).$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть для конечного множества векторных оценок $f(X)$ выполняется одно из условий

$$f(X) \subset \{y \in \mathbf{R}^n : 0 < y_i < 1, i \in N_n\},$$

$$f(X) \subset \{y \in \mathbf{R}^n : y_i > 1, i \in N_n\}.$$

Тогда имеет место равенство

$$P(X, f) = K(X, f).$$

Полезным обобщением теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $|f(X)| < \infty$, $x^0 \in X$ и возрастающие функции

$$\eta_i: f_i(X) \rightarrow \mathbf{R}_{\geq}, \quad i \in N_n,$$

подчинены условиям

$$\eta_1(f_1(x^0)) = \eta_2(f_2(x^0)) = \dots = \eta_n(f_n(x^0)).$$

Пусть далее

$$\alpha^0 = \log n / \log \min \left\{ \frac{\eta_i(f_i(x))}{\eta_j(f_j(x'))} > 1 : x, x' \in X, i, j \in N_n \right\}.$$

Тогда для любого числа $\alpha \geq \alpha^0$ справедливо утверждение: $x^0 \in P(X, f)$ тогда и только тогда, когда

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \eta_i^\alpha(f_i(x)) : x \in X \right\} = n \eta_1^\alpha(f_1(x^0)).$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 с тем лишь отличием, что вместо положительных степеней $f_i^{\beta_i}(x)$, $i \in N_n$, следует использовать возрастающие неотрицательно определенные функции $\eta_i(f_i(x))$, $i \in N_n$.

Если положить $\eta_i(f_i(x)) = f_i(x)/f_i(x^0)$, $i \in N_n$, то из теоремы 2 легко вытекает следующее условие эффективности в терминах линейной свертки положительных степеней критериев.

Следствие 2. Предположим, что $f(X) \subset \mathbf{R}_{\geq}^n$, $|f(X)| < \infty$, $x^0 \in X$, $f_i(x^0) > 0$, $i \in N_n$. Пусть

$$\beta^0 = \log n / \log \min \left\{ \frac{f_i(x)f_j(x^0)}{f_j(x')f_i(x^0)} > 1 : x, x' \in X, i, j \in N_n \right\}.$$

Тогда для любого числа $\beta \geq \beta^0$ справедливо утверждение: $x^0 \in P(X, f)$ тогда и только тогда, когда

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^\beta(x) : x \in X \right\} = n,$$

где $\lambda_i = f_i^{-\beta}(x^0)$, $i \in N_n$.

Замечание 4. Последний результат является в некотором смысле аналогом критериев, полученных в [6–8]. Его существенное отличие (и преимущество) состоит в том, что следствием 2 не только декларируется существование чисел λ_i , $i \in N_n$, как это делается в [6–8], но и указываются явные формулы для их вычисления.

Список литературы

1. Geoffrion A. M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Analysis Appl.* (1968) **22**, №3, 618–630.
2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
3. Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 3–33.
4. Емеличев В. А., Гладкий А. А., Янушкевич О. А. О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов. *Изв. АН Беларуси, сер. физ.-матем. наук* (1996) №3, 82–86.
5. Меламед И. И. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации. *Автоматика и телемеханика* (1997) №9, 119–125.
6. Burkard R. E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P. M. A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming problems. *Comput. Operat. Res.* (1981) **8**, №4, 241–247.
7. Емеличев В. А., Янушкевич О. А. Условия парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации. *Дискретная математика* (1997) **9**, №3, 154–160.
8. Кравцов М. К., Янушкевич О. А. О разрешимости векторной задачи с помощью алгоритма линейной свертки критериев. *Матем. заметки* (1997) **62**, №4, 502–509.

Статья поступила 17.03.1998.