Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Колчин, Ветвящиеся процессы и случайные гипер-
деревья, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 8–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:20:48

Ветвящиеся процессы и случайные гипердеревья

© 1999 г. В. Ф. Колчин

Описана связь ветвящихся процессов и случайных гипердеревьев. С помощью этой связи и результатов о ветвящихся процессах, полученных ранее, найдены предельные распределения таких характеристик случайных гипердеревьев, как кратности вершин, высота и число вершин в слоях случайного гипердерева.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00338 и 96-15-96092.

1. Связь ветвящихся процессов и случайных гипердеревьев

Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона порождает распределение вероятностей на множестве своих реализаций, которые представляют собой деревья. Эта естественная связь между ветвящимися процессами и случайными деревьями широко используется при изучении характеристик различных классов случайных деревьев и в некоторой степени оказывает влияние на развитие самой теории ветвящихся процессов [4, 5, 6, 7, 9, 10, 11]. Вначале использование связи между ветвящимися процессами и случайными деревьями основывалось на том, что если $\mu_r(t, T_n)$, $r = 0, 1, \dots, n$, $t = 0, 1, 2, \dots$, есть число вершин кратности r в t -м слое случайного корневого дерева с n занумерованными некорневыми вершинами, то распределение $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\|\mu_r(t, T_n)\|$ совпадает с условным распределением матрицы $\|\mu_r(t, G)\|$, где $\mu_r(t, G)$ есть число частиц в процессе Гальтона–Ватсона специального вида, имеющих в момент t ровно r прямых потомков, при условии, что общее число частиц ν , родившихся в процессе за все время его существования, равно $n+1$. Значительным продвижением в этой области было открытие В. А. Ватутиным поттраекторного соответствия между ветвящимися процессами и случайными деревьями, впервые описанное в [9]. В настоящей статье показано, что это описание можно распространить на случайные гипердеревья. Поэтому в начале статьи почти дословно излагается построение, предложенное в [9].

Прежде всего напомним конструкцию процесса Гальтона–Ватсона, которая использует в качестве пространства элементарных событий истории семейств (см., например, [8]). Процесс G начинается в момент времени $t = 0$ с рождения одной частицы нулевого поколения, которая нумеруется символом (0) . Эта частица живет до

момента $t = 1$ и порождает некоторое число, скажем $m_{(0)}$, потомков первого поколения, которые нумеруются символами $(01), (02), \dots, (0m_{(0)})$ произвольным образом. Частицы первого поколения живут до момента времени $t = 2$ и, погибая, порождают частицы второго поколения и так далее. Если частица, занумерованная символом $(0i_1 \dots i_r)$, имеет $m_{(0i_1 \dots i_r)}$ потомков, то эти потомки нумеруются (произвольным фиксированным способом) символами

$$(0i_1 \dots i_r 1), (0i_1 \dots i_r 2), \dots, (0i_1 \dots i_r m_{(0i_1 \dots i_r)}).$$

Историей семейства ω называется набор вида

$$\omega = (m_{(0)}; m_{(01)}, m_{(02)}, \dots, m_{(0m_{(0)})}; m_{(011)}, \dots),$$

в котором величина $m_{(0i_1 \dots i_r)}$ равна числу непосредственных потомков частицы, занумерованной символом $(0i_1 \dots i_r)$.

С каждой историей семейства ω свяжем ориентированное дерево $G(\omega)$ с вершинами, расположенными следующим образом. Начальную частицу (0) поместим на оси времени в точку $t = 1$, частицы с номерами $(01), \dots, (0m_{(0)})$, являющиеся прямыми потомками начальной частицы, расположим на прямой $t = 2$ сверху вниз в соответствии с возрастанием второй компоненты номера $(0i)$, $i = 1, \dots, m_{(0)}$. Точно так же располагаются частицы с трехзначными индексами на прямой $t = 3$, причем вначале располагаются потомки частицы (01) , ниже располагаются потомки частицы (02) , и так далее. Такая же процедура расположения частиц осуществляется на остальных прямых $t = 4, 5, \dots$. Полученное множество вершин соединим ребрами, направленными от частицы-предка к частицам, являющимся непосредственными потомками этой частицы. При этом вершина дерева, соответствующая частице, не имеющей потомков, не имеет исходящих ребер. На рис. 1 показано построение дерева $G(\omega)$. Истории семейств ω и ω' различны, если соответствующие им последовательности различны, так что деревья, изображенные на рис. 2, различны и описывают истории различных семейств.

Рассмотрим теперь $\Omega_G = \{\omega\}$ как дискретное пространство элементарных событий и зададим на его подмножествах вероятностную меру $\mathbf{P}$ при помощи распределения числа потомков одной частицы с производящей функцией

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,$$

где p_k — вероятность того, что в процессе G частица имеет ровно k прямых потомков. В частности, если некоторая история семейства ω содержит $n + 1$ частицу и среди них ровно m_r частиц имеют r прямых потомков, $r = 0, 1, \dots$, то

$$\mathbf{P}(\omega) = p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n},$$

причем

$$m_0 + m_1 + \dots + m_n = n + 1, \quad m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n.$$

Напомним теперь некоторые понятия теории графов.

Плоским корневым деревом называется корневое дерево, вложенное в евклидову плоскость. Два плоских корневых дерева считаются изоморфными, если существует гомеоморфное отображение плоскости на себя, сохраняющее ориентацию плоскости

Рис. 1.

Рис. 2.

и отображающее одно дерево на другое с сохранением корня и смежности вершин. Плоское корневое дерево называется деревом с висячим корнем, если кратность его (висячего) корня равна единице. Как и ранее, будем предполагать, что ребра дерева направлены от корня. Вершину, смежную висячему корню, будем называть корнем (в отличие от висячего корня).

Пометим вершины плоского корневого дерева с висячим корнем следующим образом. Поместим висячий корень дерева в начало координат, а корень, то есть единственную вершину, смежную с висячим корнем, поместим в точку $(0, 1)$, пометим ее символом (0) и будем считать ее высоту равной нулю. Пусть кратность вершины (0) равна $m_{(0)}$. Пометим вершины высоты 1, смежные вершине (0) , слева направо символами $(01), (02), \dots, (0m_{(0)})$. Вершины высоты 2, смежные вершине (01) (если

таковые есть) пометим последовательно слева направо символами $(011), (012), \dots$, вершины высоты 2, смежные вершине (02) , пометим символами $(021), (022), \dots$, и продолжим этот процесс, переходя от вершины к вершине и от уровня к уровню до тех пор, пока не исчерпаем всех вершин.

Обозначим $\mathcal{G}_n = \{G_n\}$ множество всех генеалогических деревьев, соответствующих историям семейств процесса Гальтона–Ватсона G с $n + 1$ частицей, и пусть $\mathcal{P}_n$ — множество всех плоских корневых деревьев с висячим корнем, в которых число вершин, не считая висячий корень, равно $n + 1$. Описанные выше системы нумерации вершин деревьев из $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{P}_n$ устанавливают естественное взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств. Поэтому случайный процесс G , порождая распределение вероятностей $\mathbf{P}$ на множестве своих реализаций, порождает некоторое распределение $\mathbf{P}_n$ на множестве $\mathcal{G}_n = \{G_n\}$, а именно,

$$\mathbf{P}_n(G_n) = \mathbf{P}\{G = G_n \mid \nu = n + 1\},$$

где ν — число частиц, появившихся в процессе G за все время его существования. В силу наличия взаимно однозначного соответствия между множествами $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{P}_n$ распределение $\mathbf{P}_n$ можно рассматривать как распределение на множестве $\mathcal{P}_n$, порожденное процессом G . Случайное дерево $\mathcal{T}_n$ из множества $\mathcal{P}_n$ равно любому дереву $P_n \in \mathcal{P}_n$ с вероятностью $\mathbf{P}_n(G_n)$, где G_n и P_n — соответствующие друг другу деревья. Поэтому для любой числовой характеристики $\zeta = \zeta(G_n)$ случайного корневого дерева G_n с висячим корнем с распределением, порожденным процессом Гальтона–Ватсона G ,

$$\mathbf{P}_n\{\zeta \leq x\} = \mathbf{P}\{\zeta \leq x \mid \nu = n + 1\}$$

для любого x , $-\infty < x < \infty$.

Заметим, что если число потомков одной частицы имеет геометрическое распределение, то есть

$$p_k = (1 - p)p^k, \quad 0 < p < 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то вероятность

$$\mathbf{P}\{G = G_n\} = (1 - p)^{n+1}p^n$$

одинакова для всех элементов множества $\mathcal{G}_n$ или $\mathcal{P}_n$. Таким образом, для любых $G_n \in \mathcal{G}_n$ и $T_n \in \mathcal{P}_n$

$$\mathbf{P}\{G = G_n \mid \nu = n + 1\} = |\mathcal{G}_n|^{-1} = |\mathcal{P}_n|^{-1} = \mathbf{P}_n\{\mathcal{T}_n = T_n\}.$$

Этот факт в более слабой форме был замечен Ю. Л. Павловым [15, 16], а в приведенной здесь форме В. А. Ватутиным [9].

Заметим, что равномерное распределение на множестве деревьев порождается и в случае, когда плоские корневые деревья с висячим корнем имеют ограничения на кратности вершин.

Пусть число потомков одной частицы принимает значения только из некоторого множества R неотрицательных целых чисел, содержащего 0. Обозначим через G_R соответствующий процесс Гальтона–Ватсона и через $\mathcal{G}_n^{(R)}$ множество всех генеалогических деревьев с $n + 1$ вершиной, кратности которых принадлежат множеству R , и пусть $\mathcal{P}_n^{(R)}$ обозначает множество всех плоских корневых деревьев с висячим корнем с $n + 1$ вершиной (не считая висячий корень), кратности которых принадлежат множеству R , а $\mathcal{T}_n^{(R)}$ обозначает случайное дерево из $\mathcal{P}_n^{(R)}$, распределение

которого порождено процессом G_R . Обозначим ξ_R число потомков одной частицы в процессе G_R .

Легко видеть, что если

$$p_k(R) = \mathbf{P}\{\xi_R = k\} = \frac{(1-p)p^k}{B_R}, \quad k \in R,$$

где

$$B_R = \sum_{k \in R} (1-p)p^k,$$

то для любого $G_n \in \mathcal{G}_n^{(R)}$

$$\mathbf{P}\{G_R = G_n^{(R)}\} = (1-p)^{n+1} p^n B_R^{-n-1}$$

и в этом случае эта вероятность одинакова для всех историй семейств. Таким образом, для любых $G_n \in \mathcal{G}_n$ и $T_n \in \mathcal{P}_n$

$$\mathbf{P}\{G_R = G_n^{(R)} \mid \nu_R = n+1\} = |\mathcal{G}_n^{(R)}|^{-1} = |\mathcal{P}_n^{(R)}|^{-1} = \mathbf{P}_n\{\mathcal{T}_n^{(R)} = T_n^{(R)}\},$$

где ν_R — общее число частиц, появившихся в процессе G_R за все время его существования.

Рассмотрим теперь корневые деревья с занумерованными вершинами, то есть корневые деревья, корню которых приписано число 0, а некорневые вершины занумерованы числами $1, 2, \dots, n$. Два дерева с занумерованными вершинами называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение множества вершин одного дерева на множество вершин другого дерева, которое сохраняет корни и смежность занумерованных вершин. Обозначим $\mathcal{H}_n$ множество всех таких попарно неизоморфных деревьев.

Мы снова хотим установить соответствие между генеалогическими деревьями с $n+1$ вершинами и корневыми деревьями с n некорневыми занумерованными вершинами. В отличие от предыдущего случая каждому генеалогическому дереву ставится в соответствие не одно, а некоторое множество корневых деревьев с занумерованными вершинами. Напомним конструкцию, предложенную в [9] (см. также [12, 17]).

Пусть G_n — некоторое генеалогическое дерево с n некорневыми вершинами. Пометим начальную частицу дерева G_n символом 0. Пусть G_n имеет $m_{(0)}$ частиц первого поколения:

$$(01), (02), \dots, (0m_{(0)}).$$

Выберем из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ упорядоченный набор чисел

$$l_{(01)} < l_{(02)} < \dots < l_{(0m_{(0)})}$$

и пометим этими числами соответственно частицы

$$(01), (02), \dots, (0m_{(0)}).$$

Рассмотрим теперь потомков частицы (01):

$$(011), (012), \dots, (01m_{(01)}).$$

Выберем из множества

$$\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l_{(01)}, l_{(02)}, \dots, l_{(0m_{(0)})}\}$$

упорядоченный набор

$$l_{011} < l_{012} < \dots < l_{01m_{(01)}}$$

и пометим этими числами соответственно частицы

$$(011), (012), \dots, (01m_{(01)})$$

и так далее от поколения к поколению, от частицы к частице в соответствии с естественным порядком. В результате такой нумерации из генеалогического дерева G_n получается некоторое корневое дерево с занумерованными некорневыми вершинами из множества $\mathcal{H}_n$. Нетрудно видеть, что если занумеровать всевозможными способами указанного вида все деревья из $\mathcal{G}_n$, то при такой нумерации появятся все деревья из $\mathcal{H}_n$ и каждое из них появится лишь один раз. При этом, если дерево G_n имеет m_r частиц, давших ровно r прямых потомков, $r = 0, 1, \dots, n$, то ему будет соответствовать

$$N_n = \frac{n!}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

деревьев с n занумерованными некорневыми вершинами.

Для дерева $G_n \in \mathcal{G}_n$ обозначим $\Delta(G_n)$ множество всех поставленных ему в соответствие корневых деревьев. Ветвящийся процесс G порождает на множестве $\mathcal{G}_n$ распределение $\mathbf{P}$ и тем самым порождает некоторое распределение на семействе множеств $\Delta(G_n)$, $G_n \in \mathcal{G}_n$. Припишем каждому дереву $H_n \in \Delta(G_n)$ одинаковую вероятность, то есть вероятность $\mathbf{P}(G_n)/\Delta(G_n)$. Тогда ветвящийся процесс G порождает некоторое распределение $\bar{\mathbf{P}}_n$ на множестве $\mathcal{H}_n$ корневых деревьев с n занумерованными некорневыми вершинами.

Заметим, что если число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона, то есть

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то для генеалогического дерева, имеющего ровно m_r частиц с r потомками, $r = 0, 1, \dots$,

$$\mathbf{P}\{G = G_n\} = \frac{\lambda^n e^{-(n+1)\lambda}}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

и, учитывая равномерность распределения на множестве $\Delta(G_n)$, находим, что для всех деревьев $H_n \in \mathcal{H}_n$ вероятность

$$\bar{\mathbf{P}}_n\{H_n\} = \frac{1}{N_n} \mathbf{P}\{G = G_n \mid \nu = n + 1\} = \frac{1}{n! \mathbf{P}\{\nu = n + 1\}}$$

одинакова.

Таким образом, ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с пуассоновским распределением числа потомков одной частицы порождает равномерное распределение на множестве $\mathcal{H}_n$.

Этот факт в более слабой форме был замечен в [5], а в приведенной здесь форме В. А. Ватутиным [9].

Заметим, что равномерное распределение на множестве $\mathcal{H}_n$ деревьев с занумерованными вершинами порождается и в случае, когда они имеют ограничения на кратности вершин.

Перейдем теперь к описанию связи ветвящихся процессов с гипердеревьями.

Рис. 3.

Задачам перечисления гиперграфов посвящены работы [1, 2]. Гипердеревом называется связный гиперграф без циклов. Корневым гипердеревом называется гипердерево с выделенной вершиной, называемой корнем. Плоским корневым гипердеревом называется корневое дерево, вложенное в евклидову плоскость, при этом гиперребра рассматриваются как выпуклые многогранники. Если к корню плоского корневого гипердерева присоединено ребро с двумя вершинами, одна из которых совпадает с корнем исходного гипердерева, а вторая является свободной, то такое гипердерево называется плоским корневым гипердеревом с висячим корнем (которым является свободная вершина присоединенного ребра).

Назовем m -гипердеревом гипердерево, каждое гиперребро которого содержит $m+1$ вершину. Нетрудно видеть, что число вершин m -гипердерева равно $n = Tm+1$, где T — число гиперребер этого гипердерева. Будем рассматривать плоские корневые m -гипердеревья с висячим корнем, при этом висячий корень не включаем в число вершин. Корень (невисячий) образует нулевой слой m -гипердерева, остальные вершины гиперребер, инцидентных корню, образуют первый слой, вершины гиперребер, инцидентных вершинам первого слоя, не входящие в первый слой, образуют второй слой m -гипердерева и так далее. Будем изображать m -гипердеревья так, как показано на рис. 3, взяв в качестве многогранников, изображающих гиперребра, треугольники, одна из вершин которого лежит в предшествующем слое (и иногда будет называться корневой), а остальные m вершин гиперребра располагаются на противоположной стороне треугольника (две из них в его вершинах). Припишем корню m -гипердерева лежащему в нулевом слое, символ (0) . Если корень имеет кратность $m_{(0)}$, то вершины первого слоя нумеруются символами $(01), \dots, (0mm_{(0)})$. Если часть t -го слоя с номером $(0i_1 \dots i_t)$ имеет кратность $m_{(0i_1 \dots i_t)}$, то вершины $(t+1)$ -го слоя, инцидентные вершине с номером $(0i_1 \dots i_t)$, нумеруются символами

$$(0i_1 \dots i_t 1), \dots, (0i_1 \dots i_t mm_{(0i_1 \dots i_t)}).$$

Пусть

$$R_m = \{0, m, 2m, \dots\}.$$

Обозначим $\mathcal{P}_n^{(m)}$ множество всех плоских корневых m -гипердеревьев с висячим корнем, содержащих $n+1$ вершину, не считая висячий корень, и пусть $\mathcal{G}_n^{(m)}$ — множество всех генеалогических деревьев процесса G_R ровно с $n+1$ вершиной и множеством $R = R_m$.

Нетрудно видеть, что между историями семейств процесса G_R с $R = R_m$, в которых общее число частиц $\nu_m = n+1$, то есть генеалогическими деревьями $G_n^{(m)} \in \mathcal{G}_n^{(m)}$, и нумерациями плоских корневых m -гипердеревьев из $\mathcal{P}_n^{(m)}$ существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому ветвящийся процесс G_R с $R = R_m$ естественным образом порождает на множестве $\mathcal{P}_n^{(m)}$ вероятностное распределение, которое мы будем обозначать $\mathbf{P}_{n,m}$, и для любой пары соответствующих деревьев $T_n^{(m)} \in \mathcal{P}_n^{(m)}$ и $G_n^{(m)} \in \mathcal{G}_n^{(m)}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}_{n,m}\{T_n^{(m)}\} = \mathbf{P}\{G_R = G_n^{(m)} \mid \nu_m = n+1\},$$

где $R = R_m$.

Таким образом, распределение любой характеристики случайного плоского корневого m -гипердерева с висячим корнем можно получить как условное распределение соответствующей характеристики ветвящегося процесса G_R , точнее его генеалогического дерева, с множеством $R = R_m$. В следующем параграфе приводятся теоремы о предельных распределениях основных характеристик плоских корневых m -гипердеревьев с висячим корнем, являющиеся переформулировками соответствующих предельных теорем для ветвящихся процессов с ограничениями на число потомков одной частицы.

Перейдем теперь к описанию соответствия между ветвящимися процессами и гипердеревьями с занумерованными вершинами.

В корневом m -гипердереве сопоставим корню число 0, а оставшиеся некорневые вершины занумеруем числами $1, 2, \dots, n$. Полученный гиперграф называется корневым m -гипердеревом с n занумерованными некорневыми вершинами. Два корневых m -гипердерева с n занумерованными некорневыми вершинами считаются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение множества вершин одного гипердерева на множество вершин другого гипердерева, сохраняющее корни, гиперребра и смежность. Таким образом, вершины, составляющие гиперребро m -гипердерева, рассматриваются как неупорядоченное множество номеров соответствующих вершин.

Обозначим $\mathcal{H}_n^{(m)}$ множество всех корневых m -гиперграфов с n занумерованными некорневыми вершинами. Установим соответствие между этим множеством и множеством всех генеалогических деревьев ветвящегося процесса G_R с $R = R_m$, имеющих ровно $n+1$ вершину, исключая висячий корень. Естественно, что в отличие от предыдущего случая каждому генеалогическому дереву из $\mathcal{G}_n^{(m)}$ ставится в соответствие не одно, а целый класс корневых m -гипердеревьев с n занумерованными некорневыми вершинами.

Пусть $G_n^{(m)}$ — некоторое генеалогическое дерево, соответствующее ветвящемуся процессу $G_{(R)}$ с $R = R_m$. Рассмотрим корневое m -гипердерево $T_n^{(m)} \in \mathcal{P}_n^{(m)}$, соответствующее генеалогическому дереву $G_n^{(m)}$ при описанном выше взаимно однозначном соответствии. Пометим корень гипердерева $T_n^{(m)}$ символом 0. Пусть корень

$T_n^{(m)}$ имеет кратность $m_{(0)}$ и, следовательно, существует $mm_{(0)}$ вершин первого слоя: $(01), (02), \dots, (mm_{(0)})$. Из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выберем $mm_{(0)}$ различных чисел

$$l_{01}, l_{02}, \dots, l_{mm_{(0)}}$$

и разобьем их на $m_{(0)}$ групп по m чисел в каждой группе. Упорядочим числа внутри каждой группы по возрастанию, а сами группы упорядочим по возрастанию наименьших элементов групп. Пометим некорневые элементы i -го гиперребра элементами i -й группы, $i = 1, 2, \dots, m_{(0)}$.

Рассмотрим теперь вершины, лежащие во втором слое дерева в ребрах, инцидентных вершине (01) :

$$(011), (012), \dots, (01mm_{(01)}),$$

где $m_{(01)}$ — кратность вершины (01) . Выберем из множества

$$\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{l_{01}, l_{02}, \dots, l_{mm_{(0)}}\}$$

$mm_{(01)}$ различных чисел и разобьем их на $m_{(01)}$ групп по m чисел в каждой группе. Упорядочим числа внутри каждой группы по возрастанию, а сами группы упорядочим по возрастанию наименьших элементов групп. Пометим некорневые элементы i -го гиперребра, инцидентного вершине (01) , элементами i -й группы, $i = 1, 2, \dots, m_{(01)}$, и так далее от поколения к поколению, от вершины к вершине, в соответствии с естественным порядком. В результате одной такой нумерации гипердерева $T_n^{(m)}$ ставится в соответствие одно корневое m -гипердерево из множества $\mathcal{H}_n^{(m)}$ и разным гипердеревьям из $\mathcal{P}_n^{(m)}$ ставятся в соответствие различные деревья из $\mathcal{H}_n^{(m)}$. Нетрудно понять, что если мы занумеруем всеми возможными способами указанного вида все гипердеревья из $\mathcal{P}_n^{(m)}$, то появятся все корневые m -гипердеревья из $\mathcal{H}_n^{(m)}$. При этом, если плоское корневое дерево $T_n^{(m)} \in \mathcal{P}_n^{(m)}$ имеет ровно m_r вершин кратности r , $r = 0, \dots, n$, то ему будет соответствовать

$$N_{m,T} = \frac{n!}{(m!)^T (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

различных m -гипердеревьев из $\mathcal{H}_n^{(m)}$.

Обозначим $\Delta(T_n^{(m)})$ множество всех корневых m -гипердеревьев из $\mathcal{H}_n^{(m)}$, поставленных в соответствие гипердереву $T_n^{(m)} \in \mathcal{P}_n^{(m)}$. Ветвящийся процесс G_R с $R = R_m$ порождает на множестве $\mathcal{P}_n^{(m)}$ распределение $\mathbf{P}_m$ и тем самым порождает некоторое распределение на семействе множеств $\Delta(T_n^{(m)})$, $T_n^{(m)} \in \mathcal{P}_n^{(m)}$. Будем предполагать, что каждое гипердерево $H_n^{(m)} \in \Delta(T_n^{(m)})$ получает одинаковую вероятность. Тогда ветвящийся процесс G_R с $R = R_m$ порождает некоторое распределение $\bar{\mathbf{P}}_{n,m}$ на множестве $\mathcal{H}_n^{(m)}$ корневых m -гипердеревьев с n занумерованными некорневыми вершинами.

Пусть, как и ранее, случайная величина ξ имеет распределение числа потомков одной частицы в ветвящемся процессе G_R , и для некоторого положительного λ

$$\mathbf{P}\{\xi = mr\} = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Пусть для процесса G_R с таким распределением числа потомков одной частицы генеалогическому дереву $G_n^{(m)}$ соответствует плоское корневое m -гипердерево с висячим

корнем $T_n^{(m)}$, а ему, в свою очередь, соответствует m -гипердерево $H_n^{(m)}$ с равномерным распределением на $\Delta(T_n^{(m)})$.

Если в генеалогическом дереве $G_n^{(m)}$ число частиц, имеющих ровно m прямых потомков, равно m_r , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{G_R = G_n^{(m)}\} &= p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n} \\ &= \frac{\lambda^{m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n}}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}} e^{-n\lambda} \\ &= \frac{\lambda^T}{(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}} e^{-n\lambda}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}_{n,m}\{T_n^{(m)}\} = \mathbf{P}\{G_R = G_n^{(m)} \mid \nu_m = n + 1\},$$

в силу равномерности распределения $H_n^{(m)}$ на $\Delta(T_n^{(m)})$ для $H_n^{(m)} \in \Delta(T_n^{(m)})$

$$\bar{\mathbf{P}}_{n,m}\{H_n^{(m)}\} = \frac{1}{N_{n,T}} \mathbf{P}_{n,m}\{T_n^{(m)}\} = \frac{\lambda^T e^{-n\lambda} (m!)^T}{n! \mathbf{P}\{\nu_m = n + 1\}}$$

и эти вероятности одинаковы для всех m -гипердеревьев $H_n^{(m)} \in \mathcal{H}_n^{(m)}$.

Таким образом, ветвящийся процесс G_R с распределением числа потомков (1) при указанной выше нумерации вершин порождает на множестве $\mathcal{H}_n^{(m)}$ равномерное распределение и этот процесс можно использовать для изучения характеристик случайного корневого m -гипердерева из $\mathcal{H}_n^{(m)}$.

2. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса

Рассмотрим критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона G с производящей функцией числа потомков одной частицы

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r \quad (2)$$

и дисперсией числа потомков одной частицы B .

Изучение условных распределений характеристик ветвящегося процесса G начнем со случайных величин μ_r , равных числу частиц в ветвящемся процессе, имеющих ровно r прямых потомков.

Пусть

$$\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$$

— независимые одинаково распределенные случайные величины с производящей функцией (2) и

$$\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n+1}^{(r)}$$

независимы, одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Будем предполагать, что максимальный шаг распределений случайных величин ξ_1 и $\xi_1^{(r)}$ равен d (вообще говоря, максимальные шаги этих случайных величин могут не совпадать). В таком случае общее число частиц ν , существовавших в ветвящемся процессе G до его вырождения, может принимать лишь значения вида $n = sd + 1$, где s — целые неотрицательные числа.

С последовательностью $\xi_1, \xi_2, \dots$ свяжем обобщенную схему размещения n частиц по N ячейкам [7], в которой совместное распределение заполнений ячеек $\eta_1, \dots, \eta_N$ задается равенствами

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}$$

Обозначим, как обычно, $\mu_r(n, N)$ число случайных величин среди $\eta_1, \dots, \eta_N$, принявших значение r , $r = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 1. Если $\mathbf{P}\{\nu = n + 1\} > 0$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k_r, r = 0, 1, \dots, n \mid \nu = n + 1\} = \mathbf{P}\{\mu_r(n, n + 1) = k_r, r = 0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть теперь процесс G критический. Введем обозначение

$$\sigma_r^2 = p_r(1 - p_r - (1 - p_r)^2 p_r / B). \quad (3)$$

Теорема 2. Если $n = sd + 1 \rightarrow \infty$ и $p_r > 0$, то равномерно относительно целых k , для которых

$$u = (k - np_r) / (\sigma_r \sqrt{n})$$

лежит в любом конечном фиксированном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k \mid \nu = n\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi n}} e^{-u^2/2} (1 + o(1)).$$

Обозначим $\mu(t)$ число частиц в ветвящемся процессе G в момент t , $t = 0, 1, \dots$

Теорема 3. Если максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы равен d , то для любых фиксированных целых положительных $k_1, \dots, k_t$, кратных d , при $n = sd + 1 \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu(1) = k_1, \dots, \mu(t) = k_t \mid \nu = n\} \rightarrow k_t \mathbf{P}\{\mu(1) = k_1, \dots, \mu(t) = k_t\}.$$

Рассмотрим теперь условное распределение $\mu(t)$ при $n, t \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Если в критическом ветвящемся процессе G дисперсия числа потомков одной частицы равна B , то при $n, t \rightarrow \infty$, $tn^{-1/2} \rightarrow 0$ для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\{2\mu(t)/(tB) \mid \nu = n\} \rightarrow 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

Теорема 5. Если в критическом ветвящемся процессе G дисперсия числа потомков одной частицы равна B , то при $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t(B/n)^{1/2} \rightarrow \beta$, где β — положительная постоянная, для любых фиксированных положительных $x_1 < x_2$

$$\mathbf{P}\{x_1 \leq 2\mu(t)/(tB) \leq x_2 \mid \nu = n\} \rightarrow F(x_1, x_2),$$

где

$$F(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2 \beta^2 / (8(1-y))} dG_\beta(x, y)$$

и функция распределения $G_\beta(x, y)$ имеет характеристическую функцию

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\sinh(\beta\sqrt{-2i\theta_2})}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}} - i\theta_1 \left(\frac{\sinh(\beta\sqrt{-i\theta_2/2})}{\beta\sqrt{-i\theta_2/2}} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь условное распределение момента вырождения τ критического ветвящегося процесса.

Теорема 6. Если в критическом ветвящемся процессе G распределение числа потомков одной частицы имеет максимальный шаг d , дисперсию B и $n = sd + 1$, то при целых $s \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\tau\sqrt{B/n} \leq x \mid \nu = n\} = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2) e^{-k^2 x^2/2} (1 + o(1)).$$

Доказательства этих теорем содержатся в [7].

Поведение $\mu(t)$ в моменты, непосредственно предшествующие вырождению, изучено в [17]. В этой статье доказано следующее утверждение о распределении числа частиц $\mu(\tau - 1)$ в последнем поколении ветвящегося процесса.

Теорема 7. Если в критическом ветвящемся процессе G распределение числа потомков одной частицы имеет максимальный шаг d , существует момент порядка $3 + \delta$, где $\delta > 0$, и $n = sd + 1$, то найдется такая постоянная c , что равномерно по l

$$|\mathbf{P}\{\mu(\tau - 1) = l \mid \nu = n\} - \pi_l p_0^l| \leq \frac{c \log^3 n}{\sqrt{n}},$$

где числа π_l , $l = 1, 2, \dots$, однозначно определяются условиями

$$\begin{aligned} \pi_l &\geq 0, \quad \pi_l = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P(k, l), \quad l = 1, 2, \dots, \\ \sum_{l=1}^{\infty} \pi_l p_0^l &= 1, \end{aligned}$$

в которых

$$P(k, l) = \mathbf{P}\{\mu(2) = l \mid \mu(1) = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_k = l\}.$$

В [17] отмечено, что при $n = sd + 1 \rightarrow \infty$ сходимость

$$\mathbf{P}\{\mu(\tau - 1) = l \mid \nu = n\} \rightarrow \pi_l p_0^l, \quad l = 1, 2, \dots,$$

может быть доказана при существовании только дисперсии числа потомков одной частицы. Именно, это утверждение будет использовано в следующем параграфе.

3. Предельные теоремы для случайных гипердеревьев

С использованием связи между ветвящимися процессами G_R с $R = R_m$ и m -гипердеревьями предельные теоремы, приведенные в предыдущем параграфе, легко

трансформируются в предельные теоремы для случайных плоских корневых m -гипердеревьев с висячим корнем, распределения которых порождаются процессом G_R . С учетом того, что рассматриваемые в этих теоремах характеристики m -гипердеревьев зависят лишь от кратностей вершин и условное распределение m -гипердеревьев с одним и тем же набором кратностей вершин равномерно на множествах $\Delta(T_n^{(m)})$, эти предельные теоремы переносятся и на случайные корневые m -гипердеревья с занумерованными некорневыми вершинами.

Итак, рассмотрим критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона G_R с $R = R_m = \{0, m, 2m, \dots\}$, с производящей функцией числа потомков одной частицы

$$F_m(z) = \sum_{r \in R_m} p_r z^r = \sum_{k=0}^{\infty} p_{mk} z^{mk} \quad (4)$$

и дисперсией числа потомков одной частицы B_m .

Обозначим $\mu_r(\mathcal{P}_n^{(m)})$ число вершин в случайном плоском корневом дереве из $\mathcal{P}_n^{(m)}$, имеющих кратность r . Переформулируя теорему 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Если $n = Tm + 1 \rightarrow \infty$ и $p_r > 0$, то равномерно относительно целых k , для которых

$$u = (k - np_r)/(\sigma_r \sqrt{n})$$

лежит в любом конечном фиксированном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r(\mathcal{P}_n^{(m)}) = k\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi n}} e^{-u^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_r^2 = p_r(1 - p_r - (1 - p_r)^2 p_r / B_m).$$

Обозначим $\mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)})$ число вершин в случайном плоском корневом m -гипердереве из $\mathcal{P}_n^{(m)}$, лежащих в слое t и имеющих кратность r . Переформулируя теорему 3, получаем следующее утверждение о числе вершин в самых нижних слоях случайного плоского корневого m -гипердеревья с висячим корнем.

Теорема 9. Если максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе G_R с $R = R_m$ равен M , то для любых фиксированных целых положительных $k_1, \dots, k_t$, кратных M , при $n \rightarrow \infty$ по значениям $n \equiv 1 \pmod{M}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu(1, \mathcal{P}_n^{(m)}) = k_1, \dots, \mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)}) = k_t\} \\ \rightarrow k_t \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1\} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_k = k_2\} \dots \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{k_{t-1}} = k_t\}, \end{aligned}$$

где случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют распределение числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе G_R , порождающем распределение на $\mathcal{P}_n^{(m)}$.

Рассмотрим теперь распределение числа вершин $\mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)})$ в нижних слоях m -гипердеревья, когда $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Переформулируя теорему 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 10. Если в критическом ветвящемся процессе G_R с $R = R_m$ дисперсия числа потомков одной частицы равна B_m , то при $n, t \rightarrow \infty$, $tn^{-1/2} \rightarrow 0$ для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\{2\mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)})/(tB_m) \leq x\} \rightarrow 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

Из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 11. Если в критическом ветвящемся процессе G_R с $R = R_m$ дисперсия числа потомков одной частицы равна B_m , то при $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t(B_m/n)^{1/2} \rightarrow \beta$ где β — положительная постоянная, для любых фиксированных положительных $x_1 < x_2$

$$\mathbf{P}\{x_1 \leq 2\mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)})/(tB_m) \leq x_2\} \rightarrow F(x_1, x_2),$$

где

$$F(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/(8(1-y))} dG_\beta(x, y)$$

и функция распределения $G_\beta(x, y)$ имеет характеристическую функцию

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\sinh(\beta\sqrt{-2i\theta_2})}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}} - i\theta_1 \left(\frac{\sinh(\beta\sqrt{-i\theta_2}/2)}{\beta\sqrt{-i\theta_2}/2} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь высоту $\tau(\mathcal{P}_n^{(m)})$ случайного m -гипердерева из $\mathcal{P}_n^{(m)}$, которой соответствует момент вырождения критического ветвящегося процесса G_R с $R = R_m$, уменьшенный на единицу. Из теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. Если в критическом ветвящемся процессе G_R с $R = R_m$ распределение числа потомков одной частицы имеет максимальный шаг M , дисперсию B_m , то при $n \rightarrow \infty$ по значениям $n \equiv 1 \pmod{M}$ для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\tau(\mathcal{P}_n^{(m)})\sqrt{B_m/n} \leq x\} = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2) e^{-k^2 x^2/2} (1 + o(1)).$$

Поведение $\mu(t, \mathcal{P}_n^{(m)})$ в последнем слое случайного плоского корневого m -гипердерева описывается следующей теоремой, являющейся непосредственным следствием теоремы 7.

Теорема 13. Если в критическом ветвящемся процессе G_R с $R = R_m$ распределение числа потомков одной частицы имеет максимальный шаг M , дисперсию B_m и $n \rightarrow \infty$ по значениям $n \equiv 1 \pmod{M}$, то равномерно по l

$$\mathbf{P}\{\mu(\tau(\mathcal{P}_n^{(m)}), \mathcal{P}_n^{(m)}) = l\} - \pi_l p_0^l \rightarrow 0,$$

где числа π_l , $l = 1, 2, \dots$, однозначно определяются условиями

$$\begin{aligned} \pi_l &\leq 0, \quad \pi_l = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P(k, l), \quad l = 1, 2, \dots, \\ \sum_{l=1}^{\infty} \pi_l p_0^l &= 1, \end{aligned}$$

в которых

$$P(k, l) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_k = l\},$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют распределение числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе G_R , порождающем распределение на $\mathcal{P}_n^{(m)}$.

Перейдем теперь к корневым m -гипердереьям с занумерованными вершинами. Поскольку в приведенной конструкции, описывающей связь таких деревьев с ветвящимися процессами, на множествах $\Delta(T_n^{(m)}), T_n^{(m)} \in \mathcal{T}_n^{(m)}$, задается равномерное распределение, теоремы 8–13 верны и для случайного m -гипердерева из $\mathcal{H}_n^{(m)}$.

Приведем значения дисперсии в тех двух важных случаях, когда соответствующий ветвящийся процесс порождает равномерное распределение на множествах $\mathcal{P}_n^{(m)}$ и $\mathcal{H}_n^{(m)}$.

Для плоских корневых m -гипердереьев критический ветвящийся процесс, порождающий равномерное распределение, имеет распределение числа потомков одной частицы с максимальным шагом $M = m$, задаваемое производящей функцией

$$F_m(z) = (1 - p^m) \sum_{k=0}^{\infty} p^{mk} z^{km},$$

где $p = (m + 1)^{-1/m}$, $m = 1, 2, \dots$. Дисперсия числа потомков одной частицы равна в этом случае $B_m = m$.

Для корневых m -гипердереьев с занумерованными вершинами критический ветвящийся процесс, порождающий равномерное распределение на $\mathcal{H}_n^{(m)}$, имеет распределение (1) числа потомков одной частицы с максимальным шагом $M = m$ и параметром $\lambda = 1/m$. При таком выборе параметра λ процесс G_R с $R = R_m$ является критическим, и дисперсия $B_m = m$.

Список литературы

1. Селиванов Б. И. Перечисление регулярных гиперграфов с простой цикловой структурой. *Комбинаторный анализ* (1972) №2, 60–67.
2. Селиванов Б. И. О случайных гипердереьях и гиперлесах. *Матем. заметки* (1974) 15, 5134–521.
3. Kennedy D. P. The Galton–Watson process conditioned on the total progeny. *J. Appl. Probab.* (1975) 12, №4, 800–806.
4. Степанов В. Е. О распределении числа вершин в слоях случайного дерева. *Теория вероятностей и ее применения* (1969) 14, №1, 64–77.
5. Колчин В. Ф. Ветвящиеся процессы, случайные деревья и обобщенная схема размещения частиц. *Матем. заметки* (1977) 21, №5, 691–705.
6. Колчин В. Ф. Момент вырождения ветвящегося процесса и высота случайного дерева. *Матем. заметки* (1978) 24, №6, 859–870.
7. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
8. Харрис Т. *Теория ветвящихся случайных процессов*. Мир, Москва, 1966.
9. Ватутин В. А. Распределение расстояния до корня минимального поддеревья, содержащего все вершины данной высоты. *Теория вероятностей и ее применения* (1993) 38, №2, 273–287.

10. Ватутин В. А. О высоте ствола случайных корневых деревьев. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 110–121.
11. Ватутин В. А. Ветвящиеся процессы с финальными типами частиц и случайные деревья. *Теория вероятностей и ее применения* (1994) **39**, №4, 699–716.
12. Павлов Ю. Л. *Случайные леса*. Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, 1996.
13. Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Матем. сб.* (1977) **103**, №3, 392–403.
14. Павлов Ю. Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 523–533.
15. Павлов Ю. Л. Некоторые свойства плоских деревьев с висячим корнем. *Тез. докл. Всесоюзной школы Дискретная математика и ее применения при моделировании сложных систем*. Иркутский госуниверситет, Иркутск, 1991, 14.
16. Павлов Ю. Л. Некоторые свойства плоских деревьев с висячим корнем. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 61–65.
17. Kesten H, Pittel B. A local limit theorem for the number of nodes, the height, and the number of final leaves in a critical branching process tree. *Random Structures and Algorithms* (1996) **8**, №4, 243–300.

Статья поступила 20.07.1998.