Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Р. Мутафчиев, Предельная теорема о форме графов Ферре, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 76–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:10:34

Предельная теорема о форме графов Ферре

© 1999 г. Л. Р. Мутафчиев

Изучается асимптотическое поведение s -й по величине части $L_{s,n}$ случайного разбиения положительного целого числа n при $n \rightarrow \infty$. Доказана слабая сходимость распределения $L_{s,n}$ к нормальному распределению, когда s имеет порядок $n^{1/2}$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования, науки и техники Болгарии, контракт 705/97. Часть работы выполнена во время пребывания автора в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

1. Введение

Разбиение положительного целого числа n (n -разбиение) — это представление его в виде суммы положительных целых чисел без учета порядка слагаемых, эти слагаемые называются частями разбиения. Асимптотика числа n -разбиений, обычно обозначаемого $p(n)$, была получена Харди и Раманужданом [8]. Асимптотическое разложение, позволяющее вычислять $p(n)$ с большой точностью, было получено позднее Радемахером (см., например, гл. 5 в [2]). Зададим равномерное распределение вероятностей $\mathbf{P}$ на множестве всех n -разбиений, полагая, что каждому n -разбиению приписана одинаковая вероятность $1/p(n)$. Символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ обозначают математическое ожидание и дисперсию относительно распределения $\mathbf{P}$. Таким образом, любая числовая характеристика разбиения является случайной величиной. Эрдёш и Лехнер [6], были, по-видимому, первыми, кто изучал случайные разбиения, используя описанный выше вероятностный подход. Чтобы описать полученные ими результаты, обозначим $Z_{s,n}$ число частей, больших $s - 1$ в случайном n -разбиении, $s \geq 1$. Очевидно, что $Z_{1,n}$ равно общему числу частей в случайном разбиении. Эрдёш и Лехнер в [8] доказали, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} Z_{1,n} \sim \pi^{-1} (3/2)^{1/2} n^{1/2} \log n,$$

и, более того, что при подходящей нормировке $Z_{1,n}$ имеет нетривиальное предельное распределение, именно, для любого фиксированного v , $-\infty < v < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\pi Z_{1,n}}{\sqrt{6n}} - \log \frac{\sqrt{6n}}{\pi} < v \right\} = e^{-e^{-v}}. \quad (1)$$

Следует отметить, что в силу свойства двойственности разбиений, наглядно представляемого с помощью графов Ферре, то же предельное распределение имеет и наибольшая часть случайного разбиения, которое в дальнейшем будет обозначаться

$L_{1,n}$. Вообще, пусть $L_{k,n}$ обозначает k -ю по величине часть случайного n -разбиения. Граф Ферре с n точками определяется как плоская диаграмма, состоящая из столбцов, составленных из равноотстоящих точек так, что нижние точки столбцов расположены на одном горизонтальном уровне, общее число точек равно n и высота k -го столбца равна $L_{k,n}$. Числа точек в строках этой диаграммы, начиная с нижней строки, образуют сопряженную к $\{L_{k,n}\}$ диаграмму (разбиение) $\{L_{k,n}^*\}$. Так как $\{L_{k,n}\}$ равномерно распределены на множестве всех диаграмм размера n , сопряженные диаграммы $\{L_{k,n}^*\}$ также равномерно распределены. Пусть $X_{j,n}$ обозначает число частей, равных j , в случайном n -разбиении, $j = 1, \dots, n$. Заметим, что существует простая связь между $\{L_{k,n}^*\}$ и суммами величин $X_{j,n}$, именно,

$$L_{k,n}^* = \sum_{j \geq k} X_{j,n} = Z_{k,n}$$

при $k \geq 1$. Отсюда следует, что $L_{k,n}$ и $Z_{k,n}$ имеют одинаковое распределение вероятностей, и в силу этой двойственности результаты о распределении одной из величин $Z_{k,n}$ и $L_{k,n}$ влекут соответствующие результаты о распределении другой величины.

После значительного перерыва (в 1942 году локальный вариант равенства (1) был получен в [4]) форма графов Ферре изучалась Салаи и Тураном в серии статей [17–19]. В частности, они указали интервал (теорема II в [16]), с границами, зависящими от n , в котором $Z_{k,n}$ лежит с вероятностью, не меньшей $1 - Cn^{-7/4}$, где C — некоторая положительная постоянная, а k изменяется в некоторой указанной области. Позднее в [7] было предпринято систематическое изучение случайных разбиений. С помощью объединения аналитических и вероятностных соображений были получены результаты о слабой сходимости распределений. Ради полноты мы приведем формулировки трех результатов статьи [7], касающихся формы случайного графа Ферре. Первый из этих результатов обобщает предельную теорему Эрдёша и Лехнера (1).

Теорема 1 ([7]). Для любого фиксированного положительного целого числа k и любого фиксированного v , $-\infty < v < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\pi L_{k,n}}{(6n)^{1/2}} - \log \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} < v \right\} = \int_{-\infty}^v \frac{\exp(-e^{-w} - kw)}{(k-1)!} dw.$$

Второй результат описывает поведение умеренно больших частей случайного разбиения, для которых имеет место сходимость к гауссовскому распределению.

Теорема 2 ([7]). Пусть $s = s_n \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ так, что $s/n^{1/4} \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного v , $-\infty < v < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\pi s^{1/2} L_{s,n}}{(6n)^{1/2}} - s^{1/2} \log \frac{(6n)^{1/2}}{\pi s} < v \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-w^2/2} dw.$$

Третий результат статьи [7] описывает величину столбцов наименьшей высоты в случайном графе Ферре.

Теорема 3 ([7]). Пусть $s = s_n$ таково, что при $n \rightarrow \infty$

$$s_n/n^{1/2} \rightarrow \infty$$

и

$$\pi s_n / (6n)^{1/2} - \frac{1}{2} \log n \rightarrow -\infty.$$

Тогда для любого фиксированного v , $-\infty < v < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{(L_{s,n} + \pi^{-1}(6n)^{1/2} \log(1 - \exp(-\pi s / (6n)^{1/2}))) / (\pi^{-1/2}(6n)^{1/4} e^{-\pi s / 2(6n)^{1/2}}) < v\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-w^2/2} dw.$$

Недавно Питтель [13] обобщил основную идею доказательства теоремы 3. Он подтвердил гипотезу, выдвинутую Арратия и Таваре в [3] в терминах рассотия по вариации. Его результат показывает, что второе условие теоремы 3 можно заменить более общим условием, расширяющим область допустимых значений s . Питтель указал также вероятностные границы для $L_{s,n}$ во всей области изменения s и получил результаты, аналогичные результатам Салаи и Турана [16–18]. Таким образом, статья Питтеля [13] показывает, что следовало бы заполнить пробел в исследованиях графов Ферре, изучив поведение частей порядка $O(n^{1/2})$ случайного разбиения, и тем самым закончить изучение поведения случайных графов Ферре в терминах слабой сходимости распределений их характеристик к нетривиальным предельным распределениям. Цель настоящей статьи доказать следующую предельную теорему, которая вместе с теоремами 1 и 2 из [7] завершает описание асимптотического поведения случайного графа Ферре.

Теорема 4. Пусть

$$\lambda = \pi s / (6n)^{1/2},$$

$$\mu_n(\lambda) = -\frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \log(1 - e^{-\lambda}), \quad (2)$$

$$C(\lambda) = -\frac{\sqrt{3} \log(1 - e^{-\lambda})}{\pi e^{-\lambda/2} (1 - e^{-\lambda})^{1/2}}, \quad (3)$$

$$\sigma_n^2(\lambda) = \frac{(6n)^{1/2} e^{-\lambda} (1 - C^2(\lambda))}{\pi (1 - e^{-\lambda})}. \quad (4)$$

Предположим, что целые $s = s_n$ таковы, что

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \log n - \log \log n - a_n,$$

где $a_n \rightarrow \infty$ как угодно медленно при $n \rightarrow \infty$, и

$$\lambda > \lambda_0,$$

где λ_0 — единственный корень уравнения $C(\lambda) = 1$.

Тогда для любого фиксированного v , $-\infty < v < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{(L_{s,n} - \mu_n(\lambda)) / \sigma_n(\lambda) < v\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-w^2/2} dw.$$

Замечание 1. Если $\lambda \rightarrow \infty$, то $-\log(1 - e^{-\lambda}) \sim e^{-\lambda}$ и $C(\lambda) \sim \sqrt{3}e^{-\lambda/2}/\pi \rightarrow 0$. Кроме того, из первого условия теоремы 4 следует второе условие теоремы 3. Таким образом, теорема 3 есть часть теоремы 4. Нетрудно также проверить, что $C(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $C(\lambda)$ строго убывает при возрастании λ . Поэтому уравнение $C(\lambda) = 1$ имеет единственный корень.

Замечание 2. Хванг недавно доказал [10] локальный вариант теоремы 2 в несколько более узкой области изменения s .

Замечание 3. Прямым следствием свойства двойственности графов Ферре является возможность переформулировать теорему 4 в терминах случайных величин $Z_{s,n}$. Ниже мы будем существенно пользоваться этим фактом при выводе основного результата с использованием тождества для производящей функции для $Z_{s,n}$ (см. лемму 1).

Замечание 4. Теоремы 1–3 были доказаны вероятностным методом. Чтобы описать основную идею доказательства, рассмотрим число $X_{j,n}$ частей, равных j , в случайном разбиении числа n . Оказывается, что совместное распределение $X_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, совпадает с совместным распределением первых n членов последовательности $\{Z_j\}$, где Z_j — независимые геометрически распределенные с параметрами $e^{-\pi j/(6n)^{1/2}}$ случайные величины, при условии, что

$$Z_1 + 2Z_2 + \dots + nZ_n = n.$$

Этот факт позволяет сводить задачи об асимптотическом поведении случайных разбиений к эквивалентным задачам для функций от случайных величин Z_j , $j = 1, \dots, n$. Указанная выше связь играет важную роль в доказательствах основных результатов статей [7] и [13]. Подобный подход был впервые предложен Колчиным [11], применявшим его при изучении других комбинаторных объектов (подстановок, отображений, деревьев, лесов). В отличие от приведенных выше исследований в настоящей статье используется аналитический метод, основанный на применении метода перевала в форме, предложенной Нейманом [9]. Мы показываем, что основные производящие функции рассматриваемых в статье величин обладают свойствами, близкими свойствам рядов допустимых по Нейману функций (см., например, леммы 2, 3 и доказательство малости $J_2(y)$). Поскольку мы используем производящие функции моментов, мы также в доказательствах опираемся на теорему Куртисса, аналог теоремы непрерывности Леви [5].

Статья построена следующим образом. Раздел 2 содержит вспомогательные результаты об аналитических и асимптотических свойствах производящих функций и о расходящихся рядах, которые используются в дальнейшем. Доказательство теоремы 4 разбито на две части и изложено в разделах 3 и 4. В разделе 3 найден основной вклад в асимптотику изучаемой вероятности, а в разделе 4 оценивается остаточный член.

2. Производящие функции и вспомогательные результаты

Начнем с производящей функции $g(x)$ последовательности $\{p(n)\}$, где $p(n)$ обозначает общее число разбиений положительного целого числа n . Хорошо известно, что

при $|x| < 1$ производящая функция $g(x)$ может быть записана в виде

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m \geq 1} (1 - x^m)^{-1} \quad (5)$$

(см., например, гл. 1 в [2]).

Пусть $a(n, k, s)$ обозначает число разбиений n , имеющих ровно k частей, больших $s-1$. Рассуждая так же, как при доказательстве представления (5), можно показать, что

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n a(n, k, s) x^n y^k &= \prod_{m=1}^{s-1} (1 - x^m)^{-1} \prod_{m=s}^{\infty} (1 - x^m y)^{-1} \\ &= g(x) \prod_{m \geq s} \frac{1 - x^m}{1 - x^m y} \end{aligned}$$

(см. также [17], стр. 382–383). Из определения $Z_{s,n}$, приведенного во введении, следует, что

$$\frac{1}{p(n)} \sum_{k=0}^n a(n, k, s) y^k = \mathbf{E} y^{Z_{s,n}}.$$

Это равенство приводит к следующему основному тождеству для производящей функции, которое ниже будет использовано как отправная точка асимптотического анализа.

Лемма 1. При $|x| < 1$ и $|y| \leq 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n p(n) \mathbf{E} y^{Z_{s,n}} = g(x) \prod_{m \geq s} \frac{1 - x^m}{1 - x^m y},$$

где $g(x)$ определена в (5).

Приступим к асимптотической оценке $g(x)$. Введем дополнительные обозначения. Пусть $\lambda = \lambda_n$ — последовательность, удовлетворяющая обоим условиям теоремы 4, и определим последовательность $\{r_n\}$ так, что

$$r_n = 1 - \pi/(6n)^{1/2} - \lambda/2n + O(\lambda^2/n^{3/2}) \quad (6)$$

при $n \rightarrow \infty$. Для краткости введем также обозначение

$$b(r_n) = \frac{\pi^2}{3(1 - r_n)^3}. \quad (7)$$

Для последующего асимптотического анализа важно изучить поведение производящей функции $g(x)$ в окрестности $x = 1$. Следующая лемма содержит результат, который впоследствии, в доказательстве теоремы 4, используется для получения главного члена асимптотики изучаемой вероятности.

Лемма 2. Если r_n удовлетворяет соотношению (6), то при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $|\theta| \leq \delta_n$

$$g(r_n e^{i\theta}) e^{-i\theta n} = g(r_n) e^{-\theta^2 b(r_n)/2} (1 + O(1/\log^3 n)),$$

где $b(r_n)$ определено в (7) и

$$\delta_n = n^{-2/3} / \log n. \quad (8)$$

Доказательство. Отправной точкой доказательства будет принадлежащее Фрейману простое представление $g(e^{-z})$ при $z \rightarrow 0$ (см. раздел 2.7 в [14])

$$g(e^{-z}) = \exp \left\{ \frac{\pi^2}{6z} + \frac{1}{2} \log \frac{z}{2\pi} + O(|z|) \right\}, \quad (9)$$

равномерное в области

$$\{z: \Im(z) \leq \varepsilon \Re(z), \Re(z) > 0\},$$

где $\varepsilon > 0$ фиксировано. Если в этой формуле положить $x = e^{-z}$, то $x \rightarrow 1$ и

$$z = -\log(1 - (1 - x)) = 1 - x + \frac{1}{2}(1 - x)^2 + O(|1 - x|^3).$$

Поэтому в терминах x соотношение (9) принимает следующий вид: при $x \rightarrow 1$

$$g(x) = \exp \left\{ \frac{\pi^2}{6(1 - x)} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \log \frac{1 - x}{2\pi} + O(|1 - x|) \right\}. \quad (10)$$

При $x = r_n e^{i\theta}$

$$\Re(z) = -\log r_n, \quad \Im(z) = -\theta.$$

Таким образом, (10) справедливо, если $|\theta| \leq \delta_n$, так как в силу (8) и (6)

$$\delta_n < -\varepsilon \log r_n \sim \frac{\varepsilon \pi}{(6n)^{1/2}}$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Легко проверить, что в силу (6) и (8)

$$|1 - r_n e^{i\theta}| = \frac{\pi}{(6n)^{1/2}} (1 + o(n^{-1/3})),$$

так что остаточный член в (10) есть $O(n^{-1/2})$. Полагая вначале $x = r_n e^{i\theta}$, а затем $x = r_n$ в (10), деля первое выражение на второе и разлагая $(1 - r_n e^{i\theta})^{-1}$ в ряд

Тейлора, находим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-i\theta n} g(r_n e^{i\theta})}{g(r_n)} &= \left(\frac{1 - r_n e^{i\theta}}{1 - r_n} \right)^{1/2} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 - r_n e^{i\theta}} - \frac{1}{1 - r_n} \right) - i\theta n + O(n^{-1/2}) \right\} \\
 &= \left(\frac{1 - r_n + O(|\theta|)}{1 - r_n} \right)^{1/2} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{r_n(e^{i\theta} - 1)}{(1 - r_n)^2} + \frac{r_n^2(e^{i\theta} - 1)^2}{(1 - r_n)^3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + O\left(\frac{|e^{i\theta} - 1|^3}{(1 - r_n)^4} \right) \right) - i\theta n + O(n^{-1/2}) \right\} \\
 &= \exp \left\{ i\theta \left(\frac{\pi^2 r_n}{6(1 - r_n)^2} - n \right) - \frac{\theta^2 \pi^2 r_n}{12(1 - r_n)^2} \left(1 + \frac{2r_n}{1 - r_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{|\theta|^4}{(1 - r_n)^3} \right) + O\left(\frac{|\theta|^3}{(1 - r_n)^4} \right) + O(n^{-1/2}) \right\} \\
 &\quad \times (1 + O(\delta_n(1 - r_n)^{-1}))^{1/2} \\
 &= \exp \left\{ i\theta \left(\frac{\pi^2 r_n}{6(1 - r_n)^2} - n \right) - \frac{\theta^2 \pi^2 r_n}{12(1 - r_n)^2} \left(1 + \frac{2r_n}{1 - r_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{\delta_n^4}{(1 - r_n)^3} \right) + O\left(\frac{\delta_n^3}{(1 - r_n)^4} \right) + O(n^{-1/2}) \right\} \\
 &\quad \times (1 + O(\delta_n(1 - r_n)^{-1})).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Заменим теперь r_n в (11) на асимптотическое представление (6), δ_n на (8) и λ на оценку сверху из первого условия теоремы 4. В результате множитель вне экспоненты окажется равным

$$1 + O(\delta_n(1 - r_n)^{-1}) = 1 + O(\delta_n n^{1/2}) = 1 + O(n^{-1/6} / \log n). \tag{12}$$

Член, содержащий $i\theta$, пренебрежимо мал, так как

$$\begin{aligned}
 i\theta \left(\frac{\pi^2}{6(1 - r_n)^2} - n \right) &= i\theta \left(\frac{\pi^2}{6(\pi^2/(6n) + O(\lambda/n^{3/2}))} - n \right) \\
 &= i\theta \left(\frac{n}{1 + O(\lambda/n^{1/2})} - n \right) = i\theta(n(1 + O(\lambda/n^{1/2})) - n) \\
 &= O(\delta_n \lambda n^{1/2}) = O(n^{-1/6}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для того чтобы найти коэффициент при $-\theta^2$ в последней экспоненте в (11), заметим прежде всего, что из (6) и (7) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$b(r_n) = (2/\pi)6^{1/2}n^{3/2}(1 + O(\lambda/n^{1/2})). \tag{14}$$

Поэтому

$$\frac{\pi^2 r_n}{12(1 - r_n)^2} \left(1 + \frac{2r_n}{1 - r_n} \right) = \frac{\pi^2 r_n^2}{6(1 - r_n)^3} + O(n) = \frac{\pi^2}{6(1 - r_n)^3} + O(n) = \frac{1}{2}b(r_n) + O(n).$$

Поскольку $O(n|\theta|^2) = O(n\delta_n^2) = O(n^{-1/3}/\log^2 n)$, получаем, что

$$-\frac{\theta^2 \pi^2}{12(1-r_n)^2} \left(1 + \frac{2r_n}{1-r_n}\right) = -\frac{1}{2}\theta^2 b(r_n) + O(n^{-1/3}/\log^2 n). \quad (15)$$

Другие остаточные члены в экспоненте оцениваются аналогично:

$$O(\delta_n^4(1-r_n)^{-3}) = O(n^{-7/6}/\log^4 n), \quad (16)$$

$$O(\delta_n^3(1-r_n)^{-4}) = O(1/\log^3 n). \quad (17)$$

Подставляя оценки (12), (13), (15)-(17) в (11), получаем требуемое соотношение.

При изучении поведения $g(r_n e^{i\theta})$ вне области $-\delta_n < \theta < \delta_n$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. Если r_n удовлетворяет (6) и $\delta_n \leq \Delta_n = o(n^{-1/2})$, то

$$\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} \leq -\frac{3\sqrt{6}n^{3/2}\Delta_n^2}{\pi^3} + O(\lambda^2)$$

равномерно относительно $|\theta| \geq \Delta_n$.

Доказательство. С использованием (6) и (8) находим, что

$$\begin{aligned} |1 - r_n e^{i\theta}| &= (1 + r_n^2 - 2r_n \cos \theta)^{1/2} \geq (1 + r_n^2 - 2r_n \cos \Delta_n)^{1/2} \\ &= (2 - 2\pi/(6n)^{1/2} + \pi^2/(6n) - \lambda/n + O(\lambda^2/n^{3/2}) \\ &\quad - 2(1 - \pi/(6n)^{1/2} - \lambda/(2n) + O(\lambda^2/n^{3/2}))(1 - \Delta_n^2/2 + O(\Delta_n^4)))^{1/2} \\ &= (\Delta_n^2 + \pi^2/(6n) + O(\lambda^2/n^{3/2}))^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} &\leq \frac{1}{(\Delta_n^2 + \pi^2/(6n) + O(\lambda^2/n^{3/2}))^{1/2}} \\ &\quad - \frac{1}{\pi/(6n)^{1/2} + \lambda/(2n) + O(\lambda^2/n^{3/2})} \\ &= \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \left(\frac{1}{(1 + 6n\Delta_n^2/\pi^2 + O(\lambda/n^{1/2}))^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 + (\lambda/2\pi)(6/n)^{1/2} + O(\lambda^2/n)} \right) \\ &= \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{6n\Delta_n^2}{\pi^2} + O\left(\frac{\lambda^2}{n^{1/2}}\right) \right) + \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{6}{n}\right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + O(n^2\Delta_n^4) + O(\lambda^2\Delta_n^2n^{1/2}) + O(\lambda^2/n) \right) \\ &= \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} (-3n\Delta_n^2/\pi^2 + O(\lambda^2/n^{1/2}) + (\lambda/2\pi)(6/n)^{1/2}) \\ &= -\frac{(6n)^{1/2}3n\Delta_n^2}{\pi^3} + \frac{3\lambda}{\pi^2} + O(\lambda^2) = -\frac{3\sqrt{6}n^{3/2}\Delta_n^2}{\pi^3} + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Далее изучается асимптотическое поведение сумм

$$d_j(x) = \sum_{m \geq s} \frac{x^{mj}}{(1-x^m)^j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (18)$$

и их производных $d'_1(x)$, $d''_1(x)$, $d'_2(x)$ для значений s таких, как в теореме 4, при $x = r_n$. Начнем с изучения асимптотики $d_1(r_n)$. Остальные функции могут быть проанализированы аналогичным образом, поэтому мы опускаем детали доказательств.

Логарифмируя обе части (6), получаем, что

$$\log r_n = -\frac{\pi}{(6n)^{1/2}} - \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right) + O\left(\frac{\lambda^2}{n^{3/2}}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d_1(r_n) &= \sum_{m \geq s} \frac{e^{m \log r_n}}{1 - e^{m \log r_n}} = \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \\ &\times \sum_{\pi m / (6n)^{1/2} \geq \lambda} \frac{\pi \exp(-m\pi / (6n)^{1/2} - m(\lambda/2 + \pi^2/12)/n + O(\lambda^2 m / n^{3/2}))}{(6n)^{1/2} (1 - \exp(-m\pi / (6n)^{1/2} - m(\lambda/2 + \pi^2/12)/n + O(\lambda^2 m / n^{3/2})))}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассматривая сумму в (19) как интегральную сумму, заменим ее соответствующим интегралом. Поэтому в силу мажорируемой сходимости (см., например, [15])

$$\begin{aligned} d_1(r_n) &= \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} (1 + O(n^{-1/2})) \\ &\times \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-u} \exp\{-(6/n)^{1/2} u (\lambda/2 + \pi^2/12)/\pi + O(\lambda^2 u / n)\}}{1 - e^{-u} \exp\{-(6/n)^{1/2} u (\lambda/2 + \pi^2/12)/\pi + O(\lambda^2 u / n)\}} du \\ &= \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} du (1 + O(\lambda/n^{1/2})) \\ &= -\frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \log(1 - e^{-\lambda}) (1 + O(\lambda/n^{1/2})). \end{aligned}$$

Поэтому, заключаем, что

$$d_1(r_n) = -\frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \log(1 - e^{-\lambda}) (1 + O(\lambda/n^{1/2})). \quad (20)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что

$$d'_1(r_n) = \sum_{m \geq s} \frac{m r_n^{m-1}}{(1 - r_n^m)^2} = -\frac{6n(1 + O(\lambda/n^{1/2}))}{\pi^2(1 - e^{-\lambda})} \log(1 - e^{-\lambda}), \quad (21)$$

$$d''_1(r_n) = \sum_{m \geq s} \frac{m^2 r_n^{m-2} (1 + r_n^m + (r_n^m - 1)/m)}{(1 - r_n^m)^3} = O(ne^{-\lambda}), \quad (22)$$

$$d_2(r_n) = \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} (e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda}) + \log(1 - e^{-\lambda}) + O(\lambda/n^{1/2})), \quad (23)$$

$$d'_2(r_n) = \frac{2}{r_n} \sum_{m \geq s} \frac{m r_n^{2m}}{(1 - r_n^m)^3} = O(ne^{-\lambda}), \quad (24)$$

$$d_3(r_n) = O(n^{1/2} e^{-\lambda}), \quad (25)$$

Далее нам понадобится асимптотика коэффициентов $p(n)$ в представлении (5). Хотя формула Харди–Рамануджана [2] дает возможность достаточно точно вычислять $p(n)$, мы будем использовать этот результат в несколько иной форме. Одлжко и Ричмонд доказали [13], что производящая функция $g(x)$, определенная в (5), принадлежит классу Неймана допустимых функций [9]. Поэтому общий результат Неймана верен для асимптотики чисел $p(n)$ разбиений n . Следующая лемма объединяет эти два результата.

Лемма 4 ([9, 13]). При $n \rightarrow \infty$

$$p(n) \sim g(r_n)r_n^{-n}/(2\pi\beta(r_n))^{1/2},$$

где

$$\begin{aligned}\beta(r) &= r \frac{g'(r)}{g(r)} + r^2 \frac{g''(r)}{g(r)} - r^2 \left(\frac{g'(r)}{g(r)} \right)^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mr^m}{(1-r^m)^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mr^{m+1}}{(1-r^m)^3}\end{aligned}\quad (26)$$

и r_n удовлетворяет уравнению

$$rg'(r)/g(r) = n \quad (27)$$

при достаточно больших n .

Замечание 5. Поскольку при $r \rightarrow 1-$

$$\frac{rg'(r)}{g(r)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{(1-r^m)^2} = \frac{\pi^2}{6(1-r)^2}(1+o(1)),$$

нетрудно проверить, что r_n , определенное уравнением (27), удовлетворяет соотношению (6). Кроме того, используя (26), можно показать, что при $r \rightarrow 1-$

$$\beta(r) = \frac{\pi^2}{3(1-r)^3}(1+O((1-r)^{1/2})),$$

так что в силу (7)

$$b(r_n)/\beta(r_n) = 1 + O((1-r_n)^{1/2}) \quad (28)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Начнем с того, что для определения коэффициентов в тождестве леммы 1, мы применим формулу Коши с контуром интегрирования $\{x: x = r_n e^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi\}$. Таким образом,

$$r_n^n p(n) \mathbf{E} y^{Z_{s,n}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(G(r_n e^{i\theta}, y) - i\theta n) d\theta, \quad (29)$$

где

$$G(x, y) = \log g(x) + \sum_{m \geq s} \log \frac{1-x^m}{1-x^m y}, \quad (30)$$

причем берется основная ветвь логарифмической функции так, что $\log g(x) > 0$, если $0 < x < 1$. Разобьем (29) на две части, полагая

$$r_n^n p(n) \mathbf{E} y^{Z_{s,n}} = J_1(y) + J_2(y), \quad (31)$$

где

$$J_1(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \exp(G(r_n e^{i\theta}, y) - i\theta n) d\theta, \quad (32)$$

$$J_2(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_n < |\theta| \leq \pi} \exp(G(r_n e^{i\theta}, y) - i\theta n) d\theta \quad (33)$$

и δ_n определяется равенством (8). Асимптотический анализ $J_j(y)$, $j = 1, 2$, проводится в двух следующих разделах.

3. Асимптотическая оценка $J_1(y)$

Заметим, что

$$G(x, 1) = \log g(x),$$

и

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j} G(x, y) \big|_{y=1} = d_j(x), \quad j = 1, 2, 3$$

(см. (30)). Используя разложение в ряд Тейлора, находим, что

$$\begin{aligned} G(r_n e^{i\theta}, y) &= \log g(r_n e^{i\theta}) + (y-1)d_1(r_n e^{i\theta}) + \frac{1}{2}(y-1)^2 d_2(r_n e^{i\theta}) \\ &\quad + O\left(|y-1|^3 \sum_{m \geq 3} \frac{r_n^{3m}}{|1 - r_n^m e^{i\theta m} y_0|}\right), \end{aligned}$$

где $0 < y_0 < y$. Ясно, что остаточный член в этой формуле есть $O(|y-1|^3 d_3(r_n))$. Поэтому, применяя лемму 2, находим, что

$$\begin{aligned} J_1(y) &= (1 + O(1/\log^3 n)) \frac{g(r_n)}{2\pi} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{-\theta^2 b(r_n)/2} \exp((y-1)d_1(r_n e^{i\theta}) \\ &\quad + (y-1)^2 d_2(r_n e^{i\theta})/2 + O(|y-1|^3 d_3(r_n))) d\theta \\ &= (1 + O(1/\log^3 n)) \frac{g(r_n)}{2\pi b^{1/2}(r_n)} \int_{-\delta_n b^{1/2}(r_n)}^{\delta_n b^{1/2}(r_n)} e^{-t^2/2} \exp((y-1)d_1(r_n e^{it/b^{1/2}(r_n)}) \\ &\quad + (y-1)^2 d_2(r_n e^{it/b^{1/2}(r_n)})/2 + O(|y-1|^3 d_3(r_n))) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что для получения последней оценки используется замена переменной интегрирования $\theta = t/b^{1/2}(r_n)$. Снова применяя разложение в ряды Тейлора функций

d_1 и d_2 и используя (8), (21), (22) и (24), получаем, что

$$\begin{aligned} d_1(r_n e^{it/b^{1/2}(r_n)}) &= d_1(r_n) + r_n d'_1(r_n)(e^{it/b^{1/2}(r_n)} - 1) + O(d''_1(r_n)\delta_n^2) \\ &= d_1(r_n) + r_n d'_1(r_n)it/b^{1/2}(r_n) + O((d'_1(r_n) + d''_1(r_n))\delta_n^2) \\ &= d_1(r_n) + r_n d'_1(r_n)it/b^{1/2}(r_n) + O(n^{-1/12} \log^3 n), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} d_2(r_n e^{it/b^{1/2}(r_n)}) &= d_2(r_n) + O(d'_2(r_n)\delta_n) \\ &= d_2(r_n) + O(n^{1/3} e^{-\lambda} / \log n), \end{aligned} \quad (36)$$

В (34) положим $y = e^{w/\sigma'_n(\lambda)}$, где

$$\sigma_n'^2(\lambda) = \sigma_n^2(\lambda)/(1 - C(\lambda)), \quad (37)$$

а $C(\lambda)$ и $\sigma_n(\lambda)$ определены формулами (3) и (4), и оценим $J_1(y)$ при произвольном фиксированном w , $-\infty < w < \infty$.

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$

$$y - 1 = w/\sigma'_n(\lambda) + w^2/(2\sigma_n'^2(\lambda)) + O((\sigma'_n)^{-3}(\lambda)), \quad (38)$$

$$(y - 1)^2 = w^2/\sigma_n'^2(\lambda) + O((\sigma'_n)^{-3}(\lambda)), \quad (39)$$

$$(y - 1)^3 = O((\sigma'_n)^{-3}(\lambda)). \quad (40)$$

Из (3) и (4) следуют также оценки

$$\sigma_n'^2(\lambda) \sim (6n)^{1/2} e^{-\lambda} / \pi, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (41)$$

$$C_1 n^{1/2} \leq \sigma_n'^2(\lambda) \leq C_2 n^{1/2}, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0, \quad (42)$$

$$0 < \lambda \leq \lambda = O(1),$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные и неравенства выполняются, начиная с некоторого n , равномерно по λ . Используя (8) и (14), находим асимптотику границ интегрирования в интеграле в (34), а именно, при $n \rightarrow \infty$

$$\delta_n b^{1/2}(r_n) \sim cn^{1/12} \log n, \quad (43)$$

где $c = (2/\pi)^{1/2} 6^{1/4}$.

Поэтому, подставляя (35)–(43) в (34), после некоторых алгебраических преобразований, находим, что

$$J_1(e^{w/\sigma'_n(\lambda)}) = (1 + O(1/\log^3 n)) \frac{g(r_n)}{2\pi b^{1/2}(r_n)} \int_{-cn^{1/12} \log n}^{cn^{1/12} \log n} \exp(-t^2/2 + W_n(t, w)) dt, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} W_n(t, w) &= (w/\sigma'_n(\lambda))(d_1(r_n) - \mu_n(\lambda)) + itwr_n d'_1(r_n)/(\sigma'_n(\lambda)b^{1/2}(r_n)) \\ &\quad + (w^2/(2\sigma_n'^2(\lambda)))(d_1(r_n) + d_2(r_n)) + U_n(w), \end{aligned} \quad (45)$$

и в силу (3), (4), (8), (21), (36) и (41) остаточный член $U_n(w)$ есть $O(n^{-1/6})$ при фиксированном w . Кроме того, из (20) и (41) следует, что

$$(w/\sigma'_n(\lambda))(d_1(r_n) - \mu_n(\lambda)) = O(\lambda n^{-1/4} \log(1 - e^{-\lambda})) = O(n^{-1/4} \log^2 n).$$

Таким образом, возвращаясь к (45), мы можем переписать это соотношение при фиксированном w и $n \rightarrow \infty$ в более удобной форме:

$$W_n(t, w) = \frac{itr_n d'_1(r_n)}{\sigma'_n(\lambda) b^{1/2}(r_n)} + \frac{w^2}{2\sigma'^2_n(\lambda)} (d_1(r_n) + d_2(r_n)) + O(n^{-1/6}). \quad (46)$$

Теперь нужно найти оценки коэффициентов при itw и $w^2/2$ в $W_n(t, w)$. Напомним, что величина $C(\lambda)$ определено в (3) и она вносит ненулевой вклад в (4), если λ не стремится к бесконечности (см. замечание 1). Используя (21), (3), (4), (14) и (6), легко находим, что

$$itwr_n d'_1(r_n)/(\sigma'_n(\lambda) b^{1/2}(r_n)) = (1 + O(\lambda/n^{1/2}))itwC(\lambda). \quad (47)$$

Далее, из (20) и (23) следует, что

$$d_1(r_n) + d_2(r_n) = \frac{(6n)^{1/2} e^{-\lambda}}{\pi(1 - e^{-\lambda})} (1 + O(\lambda/n^{1/2})),$$

поэтому так же, как и (47), получаем, что

$$\frac{w^2}{2\sigma'^2_n(\lambda)} (d_1(r_n) + d_2(r_n)) = \frac{w^2}{2} + O(\lambda/n^{1/2}). \quad (48)$$

Прежде чем приступить к получению окончательной оценки заметим, что в силу (31) удобно разделить $J_1(e^{w/\sigma'_n(\lambda)})e^{-w\mu_n(\lambda)/\sigma'_n(\lambda)}$ на $r_n^n p(n)$. Подставляя вначале (46)–(48) в (44) и учитывая лемму 4 и (28), получаем, что

$$\begin{aligned} & J_1(e^{w/\sigma'_n(\lambda)}) \frac{e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)}}{p(n)r_n^n} \\ &= (1 + O(1/\log^3 n)) \frac{g(r_n)r_n^{-n}}{2\pi p(n)b^{1/2}(r_n)} \\ & \quad \times \int_{-cn^{1/12} \log n}^{cn^{1/12} \log n} \exp\{-t^2/2 + itwC(\lambda) + w^2/2 + O(n^{-1/6})\} dt \\ &= (1 + O(1/\log^3 n)) (2\pi)^{-1/2} (\beta(r_n)/b(r_n))^{1/2} \\ & \quad \times \exp\{w^2/2 + O(n^{-1/6})\} \int_{-cn^{1/12} \log n}^{cn^{1/12} \log n} \exp\{-t^2/2 + itwC(\lambda)\} dt \\ &= (1 + O(1/\log^3 n)) (2\pi)^{-1/2} \exp\{w^2/2 + O(n^{-1/6})\} \\ & \quad \times \int_{-cn^{1/12} \log n}^{cn^{1/12} \log n} \exp\{-t^2/2 + itwC(\lambda)\} dt \\ &= (1 + O(1/\log^3 n)) (2\pi)^{-1/2} \exp\{w^2/2 + O(n^{-1/6})\} \\ & \quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-t^2/2 + itwC(\lambda)\} dt + O(e^{-cn^{1/6} \log^2 n} / (n^{1/12} \log n)) \right). \quad (49) \end{aligned}$$

В последней оценке мы использовали хорошо известную асимптотику при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$2\pi^{-1/2} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$$

(см., например, гл. 7 в [1]). Далее, ясно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-t^2/2 + itwC(\lambda)\} dt = e^{-w^2 C^2(\lambda)/2}. \quad (50)$$

Записывая остаточный член в (49) как $O(1/\log^3 n)$ и подставляя (50) в (49), окончательно получаем, что

$$J_1(e^{w/\sigma'_n(\lambda)}) \frac{e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)}}{p(n)r_n^n} = e^{w^2(1-C^2(\lambda)/2} + O(1/\log^3 n). \quad (51)$$

Это завершает асимптотическую оценку интеграла $J_1(y)$.

4. Асимптотическая оценка $J_2(y)$

Начнем с простого тождества

$$\begin{aligned} \log g(x) &= \sum_{m=1}^\infty \log \frac{1}{1-x^m} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \frac{x^{ml}}{l} \\ &= \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l} \sum_{m=1}^\infty (x^l)^m = \frac{x}{1-x} + \sum_{l=2}^\infty \frac{x^l}{l(1-x^l)}, \end{aligned}$$

где $|x| < 1$. Отсюда следует, что при $x = r_n e^{i\theta}$

$$|\log g(r_n e^{i\theta})| \leq \frac{r_n}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{r_n}{1 - r_n} + \sum_{l=2}^\infty \frac{r_n^l}{l(1 - r_n^l)} \quad (52)$$

$$= r_n \left(\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} \right) + \log g(r_n). \quad (53)$$

Теперь, используя неравенство $|g(r_n e^{i\theta})| \leq \exp |\log g(r_n e^{i\theta})|$ и лемму 3 при $\Delta_n = \delta_n$, получаем, что

$$\begin{aligned} |g(r_n e^{i\theta})| &\leq g(r_n) \exp(-r_n 3\sqrt{6}n^{3/2}\delta_n^2/\pi^3 + O(\lambda^2)) \\ &= g(r_n) \exp(-r_n 3\sqrt{6}n^{1/6}/\pi^3 \log^2 n + O(\lambda^2)) \end{aligned} \quad (54)$$

равномерно относительно $|\theta| \geq \delta_n$.

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

В первом случае $y = e^{w/\sigma'_n(\lambda)} \geq 1$, то есть $w \geq 0$.

Заметим, что подынтегральную функцию в (33) можно представить в виде

$$g(r_n e^{i\theta}) \prod_{m \geq s} \left(1 + \frac{r_n^m e^{i\theta m} (y - 1)}{1 - r_n^m y} \right) e^{-in\theta}. \quad (55)$$

Оценим сверху второй множитель:

$$\begin{aligned}
 \left| \prod_{m \geq s} \left(1 + \frac{r_n^m e^{i\theta m} (y-1)}{1 - r_n^m y} \right) \right| &\leq \prod_{m \geq s} \left(1 + \frac{r_n^m (y-1)}{1 - r_n^m y} \right) \\
 &= \exp \left\{ \log \prod_{m \geq s} \left(1 + \frac{r_n^m (y-1)}{1 - r_n^m y} \right) \right\} \\
 &= \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left(1 + \frac{r_n^m (y-1)}{1 - r_n^m y} \right) \right\}. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Внутреннюю сумму логарифмов можно оценить так же, как это было сделано в разделе 2 при выводе (20). Таким образом, с учетом (6), (38) и (41) при фиксированном $w \geq 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \geq s} \log \left(1 + \frac{(y-1)r_n^m}{1 - r_n^m y} \right) &\sim -\frac{1}{\log r_n} \int_{\lambda}^{\infty} \log \left(1 + \frac{e^{-u}(y-1)}{1 - e^{-u}y} \right) du \\
 &\leq \frac{(6n)^{1/2}(y-1)}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}y} du \\
 &= -\frac{(6n)^{1/2}w}{\sigma'_n(\lambda)\pi y} \log(1 - e^{-\lambda}y) + O(1). \quad (57)
 \end{aligned}$$

Собирая вместе (2), (38) и (54)–(57), получаем, что для достаточно больших n и некоторого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 |J_2(y)| e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} &\leq \frac{e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)}}{2\pi} \int_{\delta_n \leq |\theta| \leq \pi} |g(r_n e^{i\theta})| \prod_{m \geq s} \left| 1 + \frac{r_n^m e^{i\theta m} (y-1)}{1 - r_n^m y} \right| d\theta \\
 &\leq g(r_n) \exp \left\{ -r_n 3\sqrt{6}n^{1/6}/\pi^3 \log^2 n + O(\lambda^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(6n)^{1/2}w}{\sigma'_n(\lambda)\pi y} \log(1 - e^{-\lambda}y) + \frac{(6n)^{1/2}w}{\pi\sigma'_n(\lambda)} \log(1 - e^{-\lambda}) \right\} \\
 &= O(g(r_n) \exp\{-(1-\varepsilon)3\sqrt{6}n^{1/6}/(\pi^3 \log^2 n) + O(\lambda^2)\}). \quad (58)
 \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (14)

$$\log b^{1/2}(r_n) = \frac{3}{4} \log n + O(1).$$

Отсюда и из первого условия теоремы 4 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 &g(r_n) \exp\{-(1-\varepsilon)3\sqrt{6}n^{1/6}/(\pi^3 \log^2 n) + O(\lambda^2)\} \\
 &= b^{-1/2}(r_n) g(r_n) \exp \left\{ -(1-\varepsilon)3\sqrt{6}n^{1/6}/(\pi^3 \log^2 n) + O(\lambda^2) + \frac{3}{4} \log n \right\} \\
 &= b^{-1/2}(r_n) g(r_n) \exp\{-(1-\varepsilon)3\sqrt{6}n^{1/6}/(\pi^3 \log^2 n) + O(\log^2 n)\} \\
 &= o(g(r_n)/b^{1/2}(r_n)).
 \end{aligned}$$

Теперь из (58) следует, что

$$|J_2(y)|e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} = o(g(r_n)/b^{1/2}(r_n)). \quad (59)$$

Во втором случае $y = e^{w/\sigma'_n(\lambda)} < 1$, то есть $w < 0$.

Для того чтобы оценить произведение в подынтегральной функции в (55) с множителем $e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)}$, прежде всего используем равенство $|e^{\log z}| = e^{\log |z|}$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} & \left| \exp \left\{ \log \prod_{m \geq s} \left(1 + \frac{r_n^m e^{i\theta m}(y-1)}{1 - r_n^m e^{i\theta m}} \right) \right\} \right| \\ & = e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} \\ & \quad \times \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ - \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left| 1 - \frac{(1-y)r_n^m e^{i\theta m}}{1 - r_n^m e^{i\theta m}} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Теперь ясно, что в силу (38), (20), (41) и (2),

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) & \leq -(1-y) \sum_{m \geq s} \frac{r_n^m}{1 - r_n^m} \\ & = (w/\sigma'_n(\lambda) + O((\sigma'_n)^{-2}(\lambda)))d_1(r_n) \\ & = -\frac{w(6n)^{1/2}}{\sigma'_n(\lambda)\pi} \log(1 - e^{-\lambda}) + O(1) = \mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda) + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили оценку

$$\begin{aligned} e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right\} \\ = e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} \exp\{\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda) + O(1)\} = O(1). \end{aligned} \quad (61)$$

Оценим теперь оставшийся множитель в (60). Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq s} \left(\log \left| 1 - \frac{(1-y)r_n^m e^{i\theta m}}{1 - r_n^m e^{i\theta m}} \right| - \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right) \\ = \sum_{m \geq s} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 - 2(2-y)r_n^m \cos m\theta + (2-y)^2 r_n^{2m}}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} - \log \frac{1 - (2-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Детали доказательства этой формулы, которые заключаются в простых алгебраических преобразованиях комплексных чисел, мы оставляем читателю. Далее, прямые

вычисления приводят к следующей оценке аргумента первого логарифма в (62):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - 2(2 - y)r_n \cos m\theta + (2 - y)^2 r_n^{2m}}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} \\
 &= 1 - 2(1 - y) \frac{r_n^m \cos m\theta}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} + 2(1 - y) \frac{r_n^{2m}}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} \\
 & \quad + \frac{(1 - y)^2 r_n^{2m}}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} \\
 &\leq 1 - 2(1 - y) \frac{r_n^m (\cos m\theta - 1 + 1)}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} + 2(1 - y) \frac{r_n^{2m}}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} + \frac{(1 - y)^2 r_n^{2m}}{(1 - r_n^m)^2} \\
 &\leq 1 + 2(1 - y) \frac{r_n^m (1 - \cos m\theta)}{(1 - r_n^m)^2} - 2(1 - y) \frac{r_n^m (1 - r_n^m)}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} + \frac{(1 - y)^2 r_n^{2m}}{(1 - r_n^m)^2}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь аргумент второго логарифма в (62):

$$\frac{1 - (2 - y)r_n^m}{1 - r_n^m} = 1 - \frac{(1 - y)r_n^m}{1 - r_n^m}. \quad (64)$$

Учитывая (63) и (64), получаем, что слагаемое правой суммы в (62) не превосходит

$$\begin{aligned}
 & (1 - y)r_n^m \left(\frac{1}{1 - r_n^m} - \frac{1 - r_n^m}{1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m}} \right) \\
 & \quad + (1 - y) \frac{r_n^m (1 - \cos m\theta)}{(1 - r_n^m)^2} + O((1 - y)^2 r_n^{2m} / (1 - r_n^m)^2) \\
 &= (1 - y) \frac{2r_n^m (1 - \cos m\theta)}{(1 - r_n^m)(1 - 2r_n^m \cos m\theta + r_n^{2m})} \\
 & \quad + (1 - y) \frac{r_n^m (1 - \cos m\theta)}{(1 - r_n^m)^2} + O((1 - y)^2 r_n^{2m} / (1 - r_n^m)^2) \\
 &\leq (1 - y)(1 - \cos m\theta) \left(\frac{2r_n^{2m}}{(1 - r_n^m)^3} + \frac{r_n^m}{(1 - r_n^m)^2} \right) \\
 & \quad + O((1 - y)^2 r_n^{2m} / (1 - r_n^m)^2) \\
 &= (1 - y)(1 - \cos m\theta) \frac{r_n^m (1 + r_n^m)}{(1 - r_n^m)^3} + O((1 - y)^2 r_n^{2m} / (1 - r_n^m)^2) \\
 &< \frac{2(1 - y)}{(1 - r_n^s)^3} (1 - \cos m\theta) r_n^m + O((1 - y)^2 r_n^{2m} / (1 - r_n^m)^2).
 \end{aligned} \quad (65)$$

Оценка сверху для r_n^s получается из (6) и предположения теоремы 4 относительно параметра s :

$$r_n^s = \exp \left\{ \lambda \frac{(6n)^{1/2}}{\pi} \log(1 - \pi/(6n)^{1/2} - \lambda/(2n) + O(\lambda^2/n^{3/2})) \right\} \leq e^{-\lambda}. \quad (66)$$

Подставляя (66) и (38) в (65) и затем (65) в (62), получаем, что

$$\begin{aligned}
 S_{s,n} &= \sum_{(m \geq s)} \left(\log \left| 1 - \frac{(1-y)r_n^m e^{i\theta m}}{1 - r_n^m e^{i\theta m}} \right| - \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right) \\
 &\leq -\frac{2w}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} (1 + O(1/\sigma'_n(\lambda))) \\
 &\quad \times \sum_{m \geq s} ((1 - \cos m\theta) r_n^m + O(r_n^{2m}/(\sigma'_n(\lambda)(1 - r_n^m)^2))) \\
 &= -\frac{2w}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \left(\frac{r_n^s}{1 - r_n} - \Re \left(\frac{r_n^s e^{i\theta s}}{1 - r_n e^{i\theta}} \right) \right) + O(d_2(r_n)/\sigma_n^{i^2}(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Теперь в силу (23) и (4)

$$S_{s,n} = -\frac{2wr_n^s}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \left(\frac{1}{1 - r_n} - \Re \left(\frac{e^{i\theta s}}{1 - r_n e^{i\theta}} \right) \right) + O(1)$$

и, наконец, в силу (66)

$$\begin{aligned}
 S_{s,n} &= -\frac{2we^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \left(\frac{1}{1 - r_n} - \frac{\cos(\theta s - \arg(1 - r_n e^{i\theta}))}{|1 - r_n e^{i\theta}|} \right) + O(1) \\
 &= -\frac{2we^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \left(\frac{1}{1 - r_n} - \frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} \right) \\
 &\quad + \frac{2we^{-\lambda}(\cos(\theta s - \arg(1 - r_n e^{i\theta})) - 1)}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)|1 - r_n e^{i\theta}|} + O(1).
 \end{aligned}$$

Для получения требуемой оценки интеграла $J_2(y)$, определенного равенствами (33) и (55), воспользуемся полученной выше оценкой и оценками (52), (61). Оценки, полученные к настоящему моменту во втором случае, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} |J_2(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} \int_{\delta_n \leq |\theta| \leq \pi} |g(r_n e^{i\theta})| \\
 &\quad \times \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{m \geq s} \log \left(1 - \frac{(1-y)r_n^m}{1 - r_n^m} \right) \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ \sum_{m \geq s} \log \left| 1 - \frac{(1-y)r_n^m e^{i\theta m}}{1 - r_n^m e^{i\theta m}} \right| \right\} d\theta \\
 &\leq \frac{g(r_n)}{2\pi} \exp\{-wq(\theta)/\sigma'_n(\lambda) + O(1)\} \\
 &\quad \times \int_{\delta_n \leq |\theta| \leq \pi} \exp \left\{ \left(r_n + \frac{2we^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{1}{1 - r_n} - \frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} \right) + O(1) \right\} d\theta, \tag{67}
 \end{aligned}$$

где

$$q(\theta) = \frac{2e^{-\lambda}(1 - \cos(\theta s - \arg(1 - r_n e^{i\theta})))}{(1 - e^{-\lambda})^3 |1 - r_n e^{i\theta}|}. \quad (68)$$

Используя оценку снизу для λ из условия теоремы 4, и соотношения (6) и (41), получаем, что

$$r_n + \frac{2we^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^3 \sigma'_n(\lambda)} \geq 1 - \varepsilon$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и произвольном фиксированном $w < 0$. Поэтому (67) можно переписать в виде

$$e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)} |J_2(y)| = O(g(r_n)I_n), \quad (69)$$

где

$$I_n = \int_{\delta_n \leq |\theta| \leq \pi} \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} \right) + O(1) \right\} \times \exp \{ -wq(\theta)/\sigma'_n(\lambda) + O(1) \} d\theta, \quad (70)$$

и $q(\theta)$ определено в (68). Чтобы закончить доказательство, то есть получить (59), остается показать, что

$$I_n = o(b^{-1/2}(r_n)). \quad (71)$$

Представим I_n в виде суммы

$$I_n = I'_n + I''_n, \quad (72)$$

где

$$I'_n = \int_{\delta_n \leq |\theta| < (\log n)/n^{7/12}} \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} \right) + O(1) \right\} \times \exp \{ -wq(\theta)/\sigma'_n(\lambda) + O(1) \} d\theta, \\ I''_n = \int_{(\log n)/n^{7/12} \leq |\theta| \leq \pi} \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} - \frac{1}{1 - r_n} \right) + O(1) \right\} \times \exp \{ -wq(\theta)/\sigma'_n(\lambda) + O(1) \} d\theta.$$

Далее $c_0, c_1, \dots$ обозначают явно вычисляемые положительные постоянные.

Чтобы оценить I'_n , заметим, что из (6) следует оценка

$$\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} = (1 + r_n^2 - 2r_n \cos \theta)^{-1/2} \quad (73) \\ = (\pi^2/6n + \theta^2 - \theta^2 \pi/(6n)^{1/2} + O(\theta^2/n) + \theta^4)^{-1/2} \leq (6n)^{1/2}/\pi.$$

С другой стороны, при $\delta_n \leq |\theta| < (\log n)/n^{7/12}$

$$1 - \cos(\theta s - \arg(1 - r_n e^{i\theta})) \leq (\theta s - \arg(1 - r_n e^{i\theta}))^2/2 \leq c_0 n \theta^2$$

в силу условия теоремы 4 относительно s . Поэтому согласно (41)

$$-\frac{wq(\theta)}{\sigma'_n(\lambda)} \leq c_1(-w)n^{5/4}\theta^2$$

для всех λ , удовлетворяющих первому и второму условиям теоремы 4. Применяя это неравенство и лемму 3 при $\Delta_n = \delta_n$ для оценки подынтегральной функции в I'_n , находим, что при $w < 0$ для некоторого $\eta \in (0, (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}/\pi^3)$

$$\begin{aligned} I'_n &\leq 2 \int_{\delta_n \leq \theta < (\log n)/n^{7/12}} \exp\{c_2(-w)n^{5/4}\theta^2\} \exp\{-(1 - \varepsilon)3\sqrt{6}n^{3/2}\delta_n^2/\pi^3\} d\theta \\ &= O\left(\frac{\log n}{n^{7/12}} \exp\{c_2(-w)n^{5/4}(\log^2 n)n^{-7/6} - (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}n^{1/6}/(\pi^3 \log^2 n)\}\right) \\ &= O\left(\frac{\log n}{n^{7/12}} \exp\{n^{1/6}/(\log^2 n)(c_1(-w)n^{-1/12} \log^4 n - (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}/\pi^3)\}\right) \\ &= O\left(\frac{\log n}{n^{7/12}} \exp\{n^{1/6}/(\log^2 n)(\eta - (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}/\pi^3)\}\right). \end{aligned} \quad (74)$$

Наконец, для оценки I''_n заметим, что из (73) следует, что

$$\frac{1}{|1 - r_n e^{i\theta}|} \leq \frac{1}{|\theta|}.$$

Подставляя эту оценку в (68) и используя (41), находим, что

$$\frac{(-w)q(\theta)}{\sigma'_n(\lambda)} \leq c_2(-w)n^{-1/4}/|\theta|.$$

Теперь, применяя так же, как и выше, лемму 3 при $\Delta_n = (\log n)/n^{7/12}$, находим, что при $w < 0$

$$\begin{aligned} I''_n &= O(\exp\{(n^{1/3} \log^2 n)(c_2(-w)/\log^3 n - (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}/\pi^3)\}) \\ &= O(\exp\{(n^{1/3} \log^2 n)(\eta - (1 - \varepsilon)3\sqrt{6}/\pi^3)\}). \end{aligned} \quad (75)$$

Применяя (72), (74), (75) и аргументы, использованные для оценки $b^{1/2}(r_n)$ в первом случае, получаем соотношение (71), которое с учетом (69) приводит к (59). Теперь, применяя лемму 4, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_2(e^{w/\sigma'_n(\lambda)}) \frac{e^{-\mu_n(\lambda)w/\sigma'_n(\lambda)}}{p_n r_n^n} = o(1). \quad (76)$$

Наконец, применяя модификацию Куртисса теоремы Леви о непрерывном соответствии между распределениями и характеристическими функциями, из соотношений (31), (51) и (76) заключаем, что распределение случайной величины

$$(L_{s,n} - \mu_n(\lambda))/\sigma'_n(\lambda)$$

слабо сходится к нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией $1 - C^2(\lambda)$. С помощью перенормировки (37) получаем требуемый результат.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Abramovitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publ., New York, 1965.
2. Andrews G. E. *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976.
3. Arratia R., Tavaré S. Independent process approximations for random combinatorial structures. *Adv. Math.* (1994) **104**, 90–154.
4. Auluck F. C., Chowla S., Gupta H. On the maximum of the number of partitions of n into k parts. *J. Indian Math. Soc.* (1942) **6**, 105–112.
5. Curtiss J. A note on the theory of moment generating functions. *Ann. Math. Statist.* (1942) **13**, 430–433.
6. Erdős P., Lehner J. The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integers. *Duke Math. J.* (1941) **8**, 335–345.
7. Fristedt B. The structure of random partitions of large integers. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1993) **337**, 703–735.
8. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.* (1918) **17**, 75–115.
9. Hayman W. K. A generalization of Stirling's formula, *J. Reine Angew. Math.* (1956) **196**, 67–95.
10. Hwang H. K. Distribution of integer partitions with large number of summands. *Acta Arithm.* (1997) **78**, 351–365.
11. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
12. Odlyzko A. M., Richmond L. B. Asymptotic expansions for the coefficients of analytic generating functions. *Aequationes Math.* (1985) **28**, 50–63.
13. Pittel B. On a likely shape of the random Ferrers diagram. *Adv. Appl. Math.* (1997) **18**, 432–488.
14. Постников А. Г. *Введение в аналитическую теорию чисел*. Наука, Москва, 1971.
15. Stromberg K. R. *Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth, New York, 1981.
16. Szalay M., Turán P. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group I. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1977) **29**, 361–379.
17. Szalay M., Turán P. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group II. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1977) **29**, 381–392.
18. Szalay M., Turán P. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1978) **32**, 129–155.

Статья поступила 19.09.1998.