Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, И. А. Чеплюкова, Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 97–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:43:49

УДК 519.2

Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса

© 1999 г. Ю. Л. Павлов, И. А. Чеплюкова

Рассматриваются просто генерируемые леса, состоящие из N деревьев и содержащие n некорневых вершин. При $N, n \rightarrow \infty$ так, что $N^2/n \rightarrow \infty$, получены предельные распределения числа вершин в слоях таких лесов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00065.

Задача исследования предельного поведения числа вершин в слоях случайного леса впервые исследовалась, по-видимому, в работах [1, 2]. Там рассматривались леса, состоящие из N корневых деревьев с помеченными вершинами, корни которых занумерованы числами $1, 2, \dots, N$, а некорневые вершины имеют номера $1, 2, \dots, n$. При этом на множестве всех таких лесов задавалось равномерное распределение вероятностей. Кроме того, в [1] предполагалось, что кратности всех вершин деревьев принимают значения из некоторого подмножества R целых неотрицательных чисел, содержащего ноль (кратность вершины есть число дуг, выходящих из нее при ориентации дуг от корней). Назовем высотой вершины число дуг, образующих путь от корня к этой вершине и множество вершин высоты t назовем t -м слоем леса. В [1] были получены предельные распределения числа вершин в t -м слое для двух случаев стремления N и n к бесконечности. В первом случае считалось, что $N = cn(1 + o(1))$, $0 < c < 1$, t фиксировано либо $t \rightarrow \infty$, $n(1 - c)^t \rightarrow \infty$, а во втором случае $N = O(\sqrt{n})$, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$. В [2] такие предельные теоремы были доказаны при $n \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \leq C_1 < \infty$, $t/\sqrt{n} \leq C_2 < \infty$. Заметим, что при этих ограничениях высота случайного леса (максимальный номер слоя) имеет порядок $\sqrt{n}$ (см. [3]), поэтому результаты работы [2] дают исчерпывающую картину предельного поведения числа вершин в слоях леса в рассматриваемой зоне изменения параметров.

Идея доказательства результатов работ [1, 2] восходит к известной монографии В. Ф. Колчина [4], где рассматривалась асимптотика (при $n \rightarrow \infty$) числа вершин в слоях случайного дерева с n помеченными вершинами. В [4] эта задача сводилась к рассмотрению критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, начинающегося с одной частицы, с пуассоновским распределением числа прямых потомков каждой частицы при условии, что общее число частиц, существовавших в процессе до его вырождения, равно n . Естественно, что при изучении описанных выше случайных лесов в [1, 2] использовался аналогичный ветвящийся процесс, начинающийся с N частиц.

В [5] были получены результаты, аналогичные [2], для лесов, состоящих из N плоских деревьев с висячими корнями и n некорневыми вершинами при равномерном распределении вероятностей на множестве таких лесов. В этом случае для доказательства предельных теорем использовался условный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с геометрическим распределением числа потомков каждой частицы.

В статьях [6, 7] рассматривались леса, состоящие из N просто генерируемых деревьев. Определение просто генерируемого семейства корневых деревьев дано в [8]. Известно (см., например, [9]), что каждое конкретное просто генерируемое семейство можно рассматривать как множество реализаций некоторого ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, начинающегося с одной частицы. Аналогично, ветвящийся процесс G , начинающийся с N частиц, образует просто генерируемый лес из N деревьев и естественным образом индуцирует на нем распределение вероятностей. Обозначим $\mathcal{F}_{N,n}$ совокупность таких лесов, содержащих n некорневых вершин. Из [8, 9] следует, что случайные леса, рассматривавшиеся в [1, 2, 3, 5] являются частными случаями $\mathcal{F}_{N,n}$. Пусть χ — некоторая числовая характеристика леса из $\mathcal{F}_{N,n}$, $\chi(G)$ — аналогичная характеристика соответствующего ветвящегося процесса G . Пусть также ν_N обозначает случайную величину, равную числу частиц процесса G за все время его эволюции. В [7] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\chi = x\} = \mathbf{P}\{\chi(G) = x \mid \nu_N = N + n\}.$$

Эта лемма показывает, что изучение числовых характеристик просто генерируемого леса можно свести к исследованию аналогичных характеристик ветвящегося процесса G при условии $\nu_N = N + n$. Лемма 1 является обобщением леммы 1.4.1 книги [3], поэтому все результаты о случайных лесах, полученные в [3], распространяются и на $\mathcal{F}_{N,n}$.

Обозначим $\mu(t, \mathcal{F}_{N,n})$ число вершин в t -м слое леса из $\mathcal{F}_{N,n}$, а $\mu_N(t)$ — число частиц t -го поколения ветвящегося процесса G . Из леммы 1 следует, что распределения $\mu(t, \mathcal{F}_{N,n})$ и $\mu_N(t)$ связаны следующим образом.

Лемма 2. *При любых x и t справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = x\} = \mathbf{P}\{\mu_N(t) = x \mid \nu_N = N + n\}.$$

Для случая существования конечной дисперсии числа потомков частиц процесса G в [6] получено полное описание предельного поведения $\mu(t, \mathcal{F}_{N,n})$ при $n \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \leq C_1 < \infty$. В данной статье рассматривается асимптотика этой случайной величины в других зонах изменения параметров N, n . При этом номера слоев t в полученных ниже результатах, грубо говоря, удовлетворяют соотношению $t = o(\tau)$, где τ — высота леса (предельные распределения высоты леса во всех случаях стремления N, n к бесконечности получены в [3]).

Введем вспомогательную случайную величину ξ , имеющую распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

с максимальным шагом d и производящей функцией

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,$$

причем множество значений ξ , имеющих ненулевую вероятность, содержит ноль и не совпадает с множеством $\{0, 1\}$. Кроме того, мы будем считать, что $M\xi = 1$, $D\xi = B < \infty$, $F'''(1) < \infty$.

Известно (см., например, [9]), что если конечны первые три момента распределения числа прямых потомков частиц генерирующего $\mathcal{F}_{N,n}$ ветвящегося процесса G , то это распределение можно задать следующим образом:

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Далее мы будем полагать, что параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (2)$$

Обозначим m и B_λ соответственно математическое ожидание и дисперсию распределения (1). Из (2) следует, что $m = n/(N + n)$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \leq C < \infty$, $Nm^t \rightarrow \infty$. Пусть также $t \geq 3$ при $n/N \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ в противном случае. Тогда равномерно относительно k , для которых

$$y = (k - Nm^t) / \sqrt{(N + n)B_\lambda m^{t-1}}$$

лежит в любом конечном интервале,

$$P\{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = k\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi(N + n)B_\lambda m^{t-1}}} e^{-y^2/2}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$, а $t = t(N, n)$ выбрано так, что $tN/(n \ln(N^2/n)) \rightarrow 0$, $tN/n \rightarrow \infty$ и для некоторого $L > 0$ при достаточно больших N, n справедливо неравенство $\max\{n/N, N/\sqrt{n}\} \leq (N\sqrt{m^t/n})^L$. Тогда равномерно относительно k , для которых $y = (k - Nm^t) / \sqrt{B_\lambda n m^t}$ лежит в любом конечном интервале,

$$P\{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = k\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi B_\lambda n m^t}} e^{-y^2/2}.$$

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$, а $t = t(N, n)$ выбрано так, что $tN/n \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < \infty$ и для некоторого $L > 0$ при достаточно больших N, n выполняется неравенство $n/N < (N/\sqrt{n})^L$. Тогда равномерно относительно k , для которых $y = (k - Nm^t) / \sqrt{HBn}$ лежит в любом конечном интервале,

$$P\{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = k\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi HBn}} e^{-y^2/2},$$

где

$$H = e^{-2\alpha}(1 - e^{-\alpha})(1 + Q(1 - \rho^2)e^\alpha),$$

$$Q = 1 - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}, \quad \rho = \frac{(\alpha - 1 + e^{-\alpha})e^{-\alpha/2}}{\sqrt{(1 - e^{-\alpha})Q}}.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$, а $t = t(N, n)$ выбрано так, что $tN/n \rightarrow 0$, $N^4 t^2/n^3 \geq C > 0$ и для некоторого $L > 0$ при достаточно больших N, n выполняется неравенство $n/N < (N/\sqrt{n})^L$. Тогда равномерно относительно k , для которых $y = (k - Nm^t)/\sqrt{NBt}$ лежит в любом конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = k\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi NBt}} e^{-y^2/2}.$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$, $N^4 t^2/n^3 \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного x

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) - Nm^t}{\sqrt{NBt}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

Теорема 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, $t \geq 1$ фиксировано. Тогда равномерно относительно целых k_i , $i = 1, \dots, t$, таких, что $u_i = (k_i - Nm^t)/\sqrt{(N+n)B_\lambda}$ лежат в любых конечных интервалах,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu(1, \mathcal{F}_{N,n}) = k_1, \dots, \mu(t, \mathcal{F}_{N,n}) = k_t\} \\ = (2\pi(N+n)B_\lambda d^{-2})^{-t/2} \sqrt{\det Q(m)} \exp\{-2^{-1}uQ(m)u'\}(1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $u = (u_1, \dots, u_t)$, $Q(m) = \|q_{ij}(m)\|_{i,j=1}^t$ — матрица со следующими элементами:

$$\begin{aligned} q_{ii}(m) &= \begin{cases} ((1-m)^3 + m^{t+1-i}(1+m))/m^t(1-m), & 1 \leq i \leq t-1; \\ 1/m^t(1-m), & i = t; \end{cases} \\ q_{ij}(m) = q_{ji}(m) &= \begin{cases} ((1-m)^3 - m^{t+1-i})/m^t(1-m), & 1 \leq i \leq t-2, j = i+1; \\ (1-m)^3/m^t(1-m), & 1 \leq i \leq t-3, i+2 \leq j \leq t-1; \\ (1-m)^2/m^t(1-m), & 1 \leq i \leq t-2, j = t; \\ (1-2m)/m^t(1-m), & i = t-1, j = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Теоремы 1–6 являются обобщением результатов работы [1] о случайных лесах на просто генерируемые леса и различные зоны изменения параметров N, n, t . Для их доказательства оказалось достаточно применить идеи и методы, использованные в [1]. В то же время следует отметить, что при доказательстве теорем 1–6 этим путем возникает необходимость проведения хотя и элементарных, но весьма громоздких по сравнению с [1] выкладок, что и является основной трудностью получения этих результатов.

Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 3–14), а затем с их помощью доказываются теоремы 1–6.

Легко видеть, что ветвящийся процесс G естественным образом распадается на N независимых процессов $G_1, \dots, G_N$, каждый из которых начинается с одной частицы. Тогда $\mu_1(t)$ и ν_1 есть, соответственно, число частиц t -го поколения и общее число частиц процесса G_1 . Обозначим $\nu_N(t) = \mu_N(0) + \dots + \mu_N(t-1)$, $t = 1, 2, \dots$, $\nu_N(0) = 0$, следовательно, $\nu_1(t)$ есть аналогичная характеристика G_1 . Для доказательства теорем 1–4 нам потребуется рассмотреть пять различных случаев изменения параметров N, n, t при $N, n \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$. Введем условия A1–A5:

$$(A1) \quad n/N \rightarrow 0, Nm^t \rightarrow \infty, t \geq 3;$$

$$(A2) \quad 0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty, Nm^t \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty;$$

$$(A3) \quad n/N \rightarrow \infty, tN/n \rightarrow \infty, tN/(n \ln N^2/n) \rightarrow 0;$$

$$(A4) \quad n/N \rightarrow \infty, tN/n \rightarrow \alpha, 0 < \alpha < \infty;$$

$$(A5) \quad n/N \rightarrow \infty, tN/n \rightarrow 0, N^4 t^2/n^3 \geq C > 0.$$

Далее нам потребуется изучить асимптотику совместного распределения $\mu_N(t)$ и $\nu_N(t)$. Для этого рассмотрим сначала поведение характеристической функции $\Psi_t(\theta_1, \theta_2)$ случайного вектора $(\mu_1(t) - \mathbf{M}\mu_1(t), \nu_1(t) - \mathbf{M}\nu_1(t))$.

Лемма 3. Пусть выполнено одно из условий A1, A2, A3, A5. Тогда для любых фиксированных θ_1 и θ_2

$$\Psi_t^N \left(\frac{\theta_1}{\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}}, \frac{\theta_2}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}} \right) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \right\} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что для $\Psi_t(\theta_1, \theta_2)$ справедливо разложение

$$\Psi_t(\theta_1, \theta_2) = 1 - 2^{-1}\theta_1^2 \mathbf{D}\mu_1(t) - 2^{-1}\theta_2^2 \mathbf{D}\nu_1(t) - \theta_1\theta_2 \text{cov}(\mu_1(t), \nu_1(t)) + \varepsilon(\theta_1, \theta_2), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mu_1(t) &= m^t, \\ \mathbf{D}\mu_1(t) &= B_\lambda m^{t-1}(1-m^t)(1-m)^{-1}, \\ \mathbf{M}\nu_1(t) &= (1-m^t)/(1-m), \\ \mathbf{D}\nu_1(t) &= B_\lambda(1-(2t-1)(1-m)m^{t-1}-m^{2t-1})(1-m)^{-3}, \\ \text{cov}(\mu_1(t), \nu_1(t)) &= B_\lambda m^{t-1}((1-m)t - (1-m^t))(1-m)^{-2}, \\ |\varepsilon(\theta_1, \theta_2)| &\leq C_3(|\theta_1|^3 \mathbf{M}\mu_1^3(t) + |\theta_2|^3 \mathbf{M}\nu_1^3(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

C_3 — некоторая положительная постоянная. Используя явные выражения $\mathbf{M}\mu_1^3(t)$ и $\mathbf{M}\nu_1^3(t)$ во всех рассматриваемых случаях, а также соотношения (3), (4), приходим к утверждению леммы 3.

Аналогично можно доказать следующий результат.

Лемма 4. При выполнении условия A4 для любых фиксированных θ_1 и θ_2

$$\Psi_t^N \left(\frac{\theta_1}{\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}}, \frac{\theta_2}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}} \right) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_1\theta_2\rho \right\} (1 + o(1)),$$

где величина ρ определена в теореме 3.

Лемма 5. Пусть выполнено одно из условий A1–A5. Тогда при достаточно больших N, n найдутся такие положительные постоянные δ_1, C , что если $|\theta_1| \leq \delta_1, |\theta_2| \leq \delta_1$ в случаях A1, A2, $|\theta_1| \leq \delta_1(N/n), |\theta_2| \leq \delta_1(N/n)^2$ в случаях A3, A4 и $|\theta_1| \leq \delta_1/t, |\theta_2| \leq \delta_1 N/nt$ в случае A5, то справедливо неравенство

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-Cu(N, n, \theta_1, \theta_2)\},$$

где при выполнении условий A1 и A2

$$u(N, n, \theta_1, \theta_2) = \theta_1^2 m^t + \theta_2^2 m,$$

при выполнении условий A3 и A4

$$u(N, n, \theta_1, \theta_2) = \theta_1^2 m^t + \theta_2^2 (n/N)^2,$$

а при условии A5

$$u(N, n, \theta_1, \theta_2) = t(\theta_1^2 + \theta_2^2 t^2).$$

Доказательство. Все утверждения леммы 5 следуют непосредственно из (3) и (4). В случае выполнения условий A1 и A2 при этом возникают оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mu_1(t) &\geq C_3 m^t, \quad \mathbf{D}\nu_1(t) \geq C_4 m, \quad |\text{cov}(\mu_1(t), \nu_1(t))| \leq C_5 t m, \\ |\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| &\leq 1 - 2^{-1} C_4 (\theta_1^2 m^t + \theta_2^2) + m^{(t+1)/2} |\theta_1 \theta_2| (-C_4 + C_3 t m^{t/2}), \end{aligned}$$

где C_3, C_4, C_5 — некоторые положительные постоянные, а при достаточно больших N, n выполняется неравенство $-C_4 + C_3 t m^{t/2} < 0$. Аналогично в случае A3 получаем, что

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq 1 - 2^{-1} C_4 (n/N) (\theta_1^2 m^t + \theta_2^2 (n/N)^2) + m^{t/2} (n/N) |\theta_1 \theta_2| (-C_4 (n/N) + C_3 t m^{t/2})$$

с отрицательным последним слагаемым. Если же выполнено условие A4, то

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq 1 - 2^{-1} C_4 (n/N) (\theta_1^2 \theta_2^2 (n/N)^2) + (n/N)^2 |\theta_1 \theta_2| (-C_4 + C_3),$$

где при достаточно больших N, n постоянные C_3 и C_4 можно выбрать такими, что $-C_4 + C_3 < 0$. Аналогично рассматривается и случай A5.

Обозначим $f(z)$ производящую функцию случайной величины ν_1 , т.е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_1 = k\} z^k.$$

Лемма 6. Пусть $z \rightarrow 1$, $|z| \leq 1$, $m \rightarrow 1$. Тогда

$$f(z) = 1 - \frac{2\sqrt{1-z}}{\sqrt{2B+w^2+w}} (1 + o(1)),$$

где $w = (1 - zm)/\sqrt{1-z}$.

Заметим, что в критическом случае $m = 1$, $w \rightarrow 0$ и соответствующий результат доказан в [4] (лемма 2.4.4). Доказательство леммы 6 для случая $m \rightarrow 1$, $w \rightarrow 0$ приводится в [3] (лемма 1.3.3), оно сохраняет силу и при $w \not\rightarrow 0$.

Лемма 7. Пусть $|\theta_1| \leq \pi/d$, $|\theta_2| \geq 4m^{t/2}\sqrt{\mathbf{D}\nu_1}$, и выполнено одно из условий A1, A2, A3. Тогда при достаточно больших N, n найдется такое положительное δ_2 , что при $|\theta_2| \leq \delta_2$ в случаях A1, A2 и $|\theta_2| \leq \delta_2(N/n)^2$ в случае A3

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-\mathbf{D}\nu_1 \theta_2^2/8\}.$$

Доказательство. Обозначим $f_t(y, z)$ производящую функцию случайного вектора $(\mu_1(t), \nu_1(t))$. В [1] показано, что

$$f(z) - f_t(y, z) = z(f(z) - f_{t-1}(y, z)) \sum_{r=1}^{\infty} p_r(\lambda) \sum_{k=1}^r f^{r-k}(z) f_{t-1}^{k-1}(y, z), \quad (5)$$

откуда следует, что

$$|f_t(y, z)| \leq |f(z)| + 2m^t. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, применяя (4), что $|f(e^{i\theta_2})| \leq 1 - \mathbf{D}\nu_1\theta_2^2/4$, поэтому из соотношения $m^t \rightarrow 0$ и (6) следует утверждение леммы 7.

Лемма 8. Пусть выполнено одно из условий A1–A5. Тогда при достаточно больших N, n для любого $\delta > 0$ найдется такое $q_0 < 1$, что при $\delta \leq |\theta_2| \leq \pi/d$, $|\theta_1| \leq \pi/d$

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq q_0.$$

Доказательство. Легко видеть, что максимальный шаг распределения ν_1 равен d , поэтому для любого $\delta > 0$ найдется такое $q < 1$, что при $\delta \leq |\theta_2| \leq \pi/d$ справедливо неравенство

$$|f(e^{i\theta_2})| \leq q. \quad (7)$$

Пусть выполнено одно из условий A1–A3. Тогда $m^t \rightarrow 0$ и утверждение леммы 8 следует из (6) и (7). Рассмотрим условия A4 и A5. Раскрывая суммы, стоящие в правой части равенства (5), получаем, что

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} p_r(\lambda) \sum_{k=1}^r f^{r-k}(e^{i\theta_2}) f_{t-1}^{k-1}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \right| \leq (1-q)^{-1}(1-p_0(\lambda) - qp_1(\lambda) - q^2p_2(\lambda) - \dots).$$

Используя явный вид вероятностей $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots$ (см. (1)) и свойства производящей функции $F(z)$, нетрудно показать, что

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} p_r(\lambda) \sum_{k=1}^r f^{r-k}(e^{i\theta_2}) f_{t-1}^{k-1}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \right| \leq q_1 < 1. \quad (8)$$

Отсюда и из (5) следует, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$|f(e^{i\theta_2}) - f_t(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| \leq q_1^t \rightarrow 0,$$

поэтому из (7) следует лемма 8 и для этого случая.

Лемма 9. Пусть выполнено одно из условий A1–A5. Тогда при достаточно больших N, n для любого $\delta > 0$ найдется такая положительная постоянная C_3 , что при $\delta N/n \leq |\theta_1| \leq \pi/d$, $|\theta_2| \leq \pi/d$ в случаях A1–A4

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-C_3|\theta_1|m^tN/n\},$$

а в случае A5

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-C_3|\theta_1|/t\}.$$

Доказательство. В [1] показано, что

$$|f_t(y, z)| \leq 1 - (1 - |F(y)|)P\{\mu_1(t-1) \geq 1\}. \quad (9)$$

Легко видеть, что если $|\theta_1| \geq \delta$, то существует положительная постоянная $q < 1$ такая, что $|F(e^{i\theta_1})| < q$, а если $\delta N/n \leq |\theta_1| < \delta$, то существует такое $C > 0$, что $|F(e^{i\theta_1})| \leq 1 - C|\theta_1|$. Согласно теореме 2.2.2 книги [10]

$$P\{\mu_1(t) \geq 1\} = Km^t(1 + o(1)), \quad 0 < K < \infty, \quad (10)$$

поэтому утверждение леммы справедливо при выполнении условия А2. В случае А1 оно следует из (9), (10) и следствия 1.3.1 [3], где показано, что $K = 1$. Применяя в оставшихся случаях теорему 1.3.4 [3], получаем, что

$$P\{\mu_1(t) \geq 1\} = m^t N/n(1 + o(1))$$

для условий А3, А4 и

$$P\{\mu_1(t) \geq 1\} = 2/Bt(1 + o(1))$$

для условия А5, поэтому утверждение леммы 9 следует из (9).

Лемма 10. Пусть выполнено одно из условий А3, А4, А5. Тогда при достаточно больших N, n для любого $\delta > 0$ найдется такая положительная постоянная C_4 , что при $\delta(N/n)^2 \leq |\theta_2| \leq \delta$, $|\theta_1| \leq \pi/d$ в случаях А3 и А4

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-C_4\sqrt{|\theta_2|}\},$$

а в случае А5

$$|\Psi_t(\theta_1, \theta_2)| \leq \exp\{-C_4 t |\theta_2|\}.$$

Доказательство. Из (5) следует, что

$$|f(z) - f_t(y, z)| \leq |f(z) - f_{t-1}(y, z)| \sum_{r=1}^{\infty} r p_r(\lambda) = m |f(z) - f_{t-1}(y, z)|,$$

поэтому

$$|f(z) - f_t(y, z)| \leq m^t |f(z) - f_1(y, z)|,$$

при этом $f_1(y, z) = zF(y)$ [1]. Используя лемму 6 и то, что в условиях А3 $m^t \rightarrow 0$, а при А4 $m^t \rightarrow e^{-\alpha} < 1$, получаем требуемое утверждение для этих двух случаев. Пусть выполнено условие А5. Рассуждая аналогично тому, как была получена оценка (8), нетрудно доказать, что при достаточно больших N, n существует такое $C_5 > 0$, что

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} p_r(\lambda) \sum_{k=1}^r f^{r-k}(e^{i\theta_2}) f_{t-1}^{k-1}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \right| \leq \exp\{-C_5(1 - |f(e^{i\theta_2})| - N/n)\}.$$

Применяя лемму 6, отсюда получаем, что последнее выражение не превосходит $\exp\{-C_6\sqrt{|\theta_2|}\}$, где C_6 — некоторая положительная постоянная. Отсюда и из (5) следует, что

$$|f(e^{i\theta_2}) - f_t(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| \leq |f(e^{i\theta_2}) - f_1(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})| \exp\{-C_6 t \sqrt{|\theta_2|}\}.$$

Опять используя лемму 6 и соотношение $f_1(y, z) = zF(y)$, приходим к утверждению леммы 10 в случае А5.

Лемма 11. При выполнении условий любой из теорем 1, 2, 4

$$\sup_{k,s} |Nd^{-2} \sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)\mathbf{D}\nu_1(t)} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} - (2\pi)^{-1} \exp\{-(u^2 + v^2)/2\}| \rightarrow 0,$$

где

$$u = (k - N\mathbf{M}\mu_1(t))/\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, \quad v = (s - N\mathbf{M}\nu_1(t))/\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы 11 можно получить, следуя обычной схеме доказательства локальных предельных теорем. Для этого достаточно показать, что разность

$$R(u, v) = 4\pi^2 d^{-2} N \sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)\mathbf{D}\nu_1(t)} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} - 2\pi \exp\{-(u^2 + v^2)/2\}$$

стремится к нулю. По формулам обращения

$$\frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\right\} d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\}$$

$$= d^2 (4\pi N \sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)\mathbf{D}\nu_1(t)})^{-1} \iint \exp\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v\} \varphi_{N,t}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,$$

где

$$\varphi_{N,t}(\theta_1, \theta_2) = \Psi_t^N \left(\frac{\theta_1}{\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}}, \frac{\theta_2}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}} \right),$$

а интегрирование проводится по области вида

$$|\theta_1| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, \quad |\theta_2| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}/d.$$

Следуя [1], обозначим

$$M_1 = \{(\theta_1, \theta_2): |\theta_1| \leq T, |\theta_2| \leq T\},$$

$$M_2 = \{(\theta_1, \theta_2): |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, T < |\theta_2| \leq \delta \sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\},$$

$$M_3 = \{(\theta_1, \theta_2): T < |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, |\theta_2| \leq T\},$$

$$M_4 = \{(\theta_1, \theta_2): \delta \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, |\theta_2| \leq 4\sqrt{Nm^t}\},$$

$$M_5 = \{(\theta_1, \theta_2): \delta \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, 4\sqrt{Nm^t} < |\theta_2| \leq \delta \sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\},$$

$$M_6 = \{(\theta_1, \theta_2): |\theta_1| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, \delta \sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)} < |\theta_2| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}/d\},$$

где выбор положительных постоянных δ, T ясен из дальнейшего. Легко видеть, что разность $R(u, v)$ можно представить в виде суммы интегралов

$$R(u, v) = \sum_{j=1}^8 I_j,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{M_1} \exp\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v\} (\varphi_{N,t}(\theta_1, \theta_2) - \exp\{-2^{-1}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\}) d\theta_1 d\theta_2; \\ I_j &= \iint_{M_j} \exp\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v\} \varphi_{N,t}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad j = 2, 3, \dots, 6; \\ I_7 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\theta_2| \geq T} \exp\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v - 2^{-1}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\} d\theta_1 d\theta_2; \\ I_8 &= - \int_{|\theta_1| \geq T} \int_{-T}^T \exp\{-i\theta_1 u - i\theta_2 v - 2^{-1}(\theta_1^2 + \theta_2^2)\} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

В силу леммы 3, интеграл $I_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном T . Очевидно, что

$$|I_7| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\theta_1^2/2\} d\theta_1 \int_{|\theta_2| \geq T} \exp\{-\theta_2^2/2\} d\theta_2$$

и этот интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого T . Аналогичная оценка справедлива и для интеграла I_8 .

Рассмотрим I_2 . При выполнении условий теоремы 1 в области M_2 справедлива лемма 5, поэтому

$$|I_2| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-C_3\theta_1^2\} d\theta_1 \int_{|\theta_2| > T} \exp\{-C_4\theta_2^2\} d\theta_2, \quad (11)$$

здесь и далее символы $C_3, C_4, \dots$ обозначают некоторые положительные постоянные. Легко видеть отсюда, что $|I_2|$ можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого T . Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда разобьем область M_2 на три части:

$$\begin{aligned} M_2^{(1)} &= \{(\theta_1, \theta_2): |\theta_1| \leq \delta(N/n)\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, T < |\theta_2| \leq \delta(N/n)^2\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\}, \\ M_2^{(2)} &= \{(\theta_1, \theta_2): \delta(N/n)\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \delta\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, T < |\theta_2| \leq \delta(N/n)^2\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\}, \\ M_2^{(3)} &= \{(\theta_1, \theta_2): |\theta_1| \leq \delta\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, \delta(N/n)^2\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)} < |\theta_2| \leq \delta\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\}. \end{aligned}$$

Обозначим соответствующие этим областям части интеграла I_2 через $I_2^{(1)}, I_2^{(2)}, I_2^{(3)}$. Применяя для оценки $I_2^{(1)}$ лемму 5, получаем оценку, аналогичную (11). Из леммы 9 и (4) следует, что

$$|I_2^{(2)}| \leq C_5(N/\sqrt{n}) \int_{Nm^{t/2}/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\{-C_6\theta_1 m^t/n\} d\theta_1 \leq C_7\sqrt{n} \exp\{-C_6N\sqrt{m^t/n}\}.$$

Отсюда и из условия

$$\sqrt{n} \leq (N/\sqrt{n})(N\sqrt{m^t/n})^L \leq (N\sqrt{m^t/n})^{2L} \quad (12)$$

получаем, что $I_2^{(2)} \rightarrow 0$. Применяя для оценки $I_2^{(3)}$ лемму 10 и (4), находим, что

$$\begin{aligned} |I_2^{(3)}| &\leq \iint_{M_2^{(3)}} \exp\left\{-C_7N\sqrt{|\theta_2|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}}\right\} d\theta_1 d\theta_2 \\ &\leq C_8\sqrt{nm^t} \int_{N/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left\{-C_8\sqrt{N^3\theta_2/n\sqrt{n}}\right\} d\theta_2, \end{aligned}$$

поэтому с помощью (12) получаем, что

$$|I_2^{(3)}| < C_8(N/\sqrt{n})^L \exp\{-N^2/n\} \rightarrow 0.$$

Таким образом, в условиях теоремы 2 $I_2 \rightarrow 0$.

Пусть выполнены условия теоремы 4. Разобьем область M_2 на следующие части:

$$M_2^{(1)} = \{(\theta_1, \theta_2) : |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}/t, T < |\theta_2| \leq \delta N \sqrt{N \mathbf{D} \nu_1(t)}/nt\},$$

$$M_2^{(2)} = \{(\theta_1, \theta_2) : \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}/t < |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}, T < |\theta_2| \leq \delta N \sqrt{N \mathbf{D} \nu_1(t)}/nt\},$$

$$M_2^{(3)} = \{(\theta_1, \theta_2) : |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}, \delta N \sqrt{N \mathbf{D} \nu_1(t)}/nt < |\theta_2| \leq \delta \sqrt{N \mathbf{D} \nu_1(t)}\},$$

и снова обозначим $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, $I_2^{(3)}$ соответствующие части I_2 . Интеграл $I_2^{(1)}$ с помощью леммы 5 оценивается аналогично предыдущему. Нетрудно видеть, что в области $M_2^{(2)}$ можно использовать лемму 9, поэтому с помощью (4) получаем, что

$$|I_2^{(2)}| \leq C_9(N/\sqrt{n}) \int_{N/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\{-C_{10}N\theta_1/(t\sqrt{Nt})\} d\theta_1 < C_{11}t^{3/2}e^{-t} \rightarrow 0.$$

Из леммы 10, (4) и условий $n/N < (N/\sqrt{n})^L$, $t = o(N/n)$ следует, что

$$|I_2^{(3)}| \leq C_{12}\sqrt{Nt} \int_{N/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\{-C_{13}N\theta_2/\sqrt{n}\} d\theta_2 < C_{12}(N/\sqrt{n})^L \exp\{-C_{14}N^2/\sqrt{n}\} \rightarrow 0.$$

Оценим I_3 . При выполнении условий теоремы 1 в области M_3 выполняется лемма 5, поэтому I_3 оценивается аналогично I_2 . В условиях теоремы 2 разобьем M_3 на две части:

$$M_3^{(1)} = \{(\theta_1, \theta_2) : T \leq |\theta_1| \leq \delta(N/n)\sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}, |\theta_2| \leq T\},$$

$$M_3^{(2)} = \{(\theta_1, \theta_2) : de(N/n)\sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}, |\theta_2| \leq T\},$$

тогда, соответственно, $I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$. Интеграл $I_3^{(1)}$ с помощью леммы 5 оценивается аналогично $I_2^{(1)}$, а соотношение $I_3^{(2)} \rightarrow 0$ доказывается с помощью леммы 9, как и в случае $I_2^{(2)}$. При выполнении условий теоремы 4 положим

$$M_3^{(1)} = \{(\theta_1, \theta_2) : T \leq |\theta_1| \leq \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}/t, |\theta_2| \leq T\},$$

$$M_3^{(2)} = \{(\theta_1, \theta_2) : \delta \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}/t < |\theta_1| \leq \sqrt{N \mathbf{D} \mu_1(t)}, |\theta_2| \leq T\}.$$

В области $M_3^{(1)}$ интеграл I_3 оценивается с помощью леммы 5 аналогично предыдущему, а в $M_3^{(2)}$, как и в случае $I_2^{(2)}$, применяется лемма 9.

Рассмотрим I_4 . Ясно, что для оценки этого интеграла можно использовать лемму 9. Тогда при выполнении условий теоремы 1 из (4) следует, что

$$|I_4| \leq \iint_{M_4} \exp\{-C_{15}m^t N^2/n\} d\theta_1 d\theta_2 \leq C_{16}\sqrt{m}Nm^{t-1} \exp\{-C_{17}Nm^{t-1}\} \rightarrow 0.$$

Для теоремы 2 аналогично получаем, что

$$|I_4| \leq C_{18}nm^t \exp\{-C_{19}m^t N^2/n\}.$$

Учитывая, что $nm^t < (N\sqrt{m^t/n})^{2L+2}$, находим, что $I_4 \rightarrow 0$. В случае теоремы 4 приходим к оценке

$$|I_4| \leq C_{20}\sqrt{Nn} \exp\{-C_{21}N^2/n\}$$

и, учитывая неравенство $\sqrt{n} < (N/\sqrt{n})^{L+1}$, получаем, что $I_4 \rightarrow 0$ и в этом случае.

Оценим интеграл I_5 . Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда в области M_5 действует лемма 7. Отсюда

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq \iint_{M_5} \exp\{-C_{22}\theta_2^2\} d\theta_1 d\theta_2 \leq C_{23}\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} \int_{|\theta_2| > 4\sqrt{Nm^t}} \exp\{-C_{22}\theta_2^2\} d\theta_2 \\ &\leq C_{24} \int_{\sqrt{Nm^t}}^{\infty} \theta \exp\{-C_{22}\theta^2\} d\theta. \end{aligned}$$

Поскольку $\sqrt{Nm^t} \rightarrow \infty$, получаем, что $I_5 \rightarrow 0$. В условиях теоремы 2 разобьем M_5 на две части:

$$\begin{aligned} M_5^{(1)} &= \{(\theta_1, \theta_2): \delta\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \pi\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, \sqrt{Nm^t} \leq |\theta_2| \leq \delta(N/n)^2\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\}, \\ M_5^{(2)} &= \{(\theta_1, \theta_2): \delta\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} < |\theta_1| \leq \pi\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}/d, \delta(N/n)^2\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)} \leq \delta\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)}\} \end{aligned}$$

и обозначим соответствующие интегралы $I_5^{(1)}, I_5^{(2)}$. Используя для оценки $I_5^{(1)}$ лемму 7 и (4), получаем, что

$$|I_5^{(1)}| \leq C_{25}\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} \int_{\sqrt{Nm^t}}^{\infty} \exp\{-C_{22}\theta_2^2\} d\theta_2 \leq C_{26}\sqrt{n/N} \exp\{-C_{22}Nm^t\}.$$

Заметим, что $\sqrt{n/N} < (N\sqrt{m^t/n})^{L/2}$, $Nm^t > N^2m^t/n$, поэтому $I_5^{(1)} \rightarrow 0$. Легко видеть, что оценка $I_5^{(2)}$ аналогична оценке $I_2^{(3)}$, следовательно, $I_5 \rightarrow 0$.

Пусть выполнены условия теоремы 4. Применяя лемму 9 и (4), находим, что

$$|I_5| \leq C_{27}t^{3/2}\sqrt{nN} \exp\{-C_{28}N/t\} \leq C_{27}(n^2/N) \exp\{-C_{28}N^2/n\}$$

и, поскольку $\sqrt{n} < (N/\sqrt{n})^{L+1}$, получаем соотношение $I_5 \rightarrow 0$.

Нам осталось оценить I_6 . Используя лемму 8 получаем, что

$$|I_6| \leq C_{29}N\sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)\mathbf{D}\nu_1(t)}q_0^N.$$

Оценивая дисперсии с помощью (4), находим отсюда, что $I_6 \rightarrow 0$. Лемма 11 доказана.

Таким же способом можно получить следующее утверждение.

Лемма 12. При выполнении условий теоремы 3

$$\begin{aligned} \sup_{k,s} |Nd^{-2}\sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)\mathbf{D}\nu_1(t)(1-\rho^2)}\mathbf{P}\{\mu_N(t)=k, \nu_N(t)=s\} \\ - (2\pi)^{-1} \exp\{-(2(1-\rho^2))^{-1}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\}| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где

$$u = (k - N\mathbf{M}\mu_1(t))/\sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)}, \quad v = (s - N\mathbf{M}\nu_1(t))/\sqrt{N\mathbf{D}\nu_1(t)},$$

а величина ρ определена в теореме 3.

Введем величину $z(N, n)$ следующим образом:

$$z(N, n) = \begin{cases} \sqrt{(N+n)B_\lambda m^{t-1}} & \text{в условиях теорем 1, 2;} \\ \sqrt{HnB_\lambda} & \text{в условиях теоремы 3;} \\ \sqrt{N\mathbf{D}\mu_1(t)} & \text{в условиях теоремы 4.} \end{cases}$$

Лемма 13. Пусть выполнены условия одной из теорем 1–4. Тогда равномерно относительно k , для которых $y = (k - Nm^t)/z(N, n)$ лежит в любом конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) = k \mid \nu = N + n\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi}z(N, n)} e^{-y^2/2}.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k \mid \nu_N = N + n\} \\ &= \sum_{s=N}^{N+n-k} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} / \mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть выполнены условия теоремы 1 или теоремы 2. Разобьем область суммирования на две части:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{s: (N+n)(1-m^t) - t\sqrt{(N+n)m^t} \leq s \leq (N+n)(1-m^t) + t\sqrt{(N+n)m^t}\}, \\ M_2 &= \{s: N \leq s \leq N+n-k, s \notin M_1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при $s \in M_1$ к вероятности $\mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\}$ можно применить лемму 11, при этом $v = o(1)$, $u = y(1 + o(1))$, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} = \frac{d^2(1 + o(1))}{2\pi N \sqrt{\mathbf{D}\mu_1(t)} \mathbf{D}\nu_1(t)} e^{-y^2/2}. \quad (14)$$

Понятно, что случайная величина ν_k является суммой k независимых случайных величин с распределением ν_1 . Заметим также, что

$$\begin{aligned} ((N+n)m^t - t\sqrt{(N+n)m^t} - k(N+n)N^{-1})/\sqrt{k\mathbf{D}\nu_1(t)} &\rightarrow -\infty, \\ ((N+n)m^t - t\sqrt{(N+n)m^t} + k(N+n)N^{-1})/\sqrt{k\mathbf{D}\nu_1(t)} &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Повторяя дословно доказательство леммы 2.3.1 из [3], нетрудно показать, что для суммы ν_k выполняется центральная предельная теорема, поэтому, учитывая (15), получаем, что

$$\sum_{s \in M_2} \mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} = 1 + o(1). \quad (16)$$

Согласно лемме 2.3.2 [3]

$$\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\} = \frac{dN(1 + o(1))}{(N+n)^{3/2} \sqrt{2\pi B_\lambda}}, \quad (17)$$

поэтому из (13), (14) и (16) получаем, что

$$\sum_{s \in M_1} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \frac{\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi(N + n)B_\lambda m^{t-1}}} e^{-y^2/2}.$$

Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что соответствующая сумма в области M_2 стремится к нулю.

Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда область суммирования в (13) разобьем на такие две части:

$$M_1 = \{s: (N + n)(1 - m^t) - At\sqrt{nm^t} \leq s \leq (N + n)(1 - m^t) + At\sqrt{nm^t}\},$$

$$M_2 = \{s: N \leq s \leq N + n - k, s \notin M_1\},$$

выбор постоянной A осуществляется ниже. Применяя к $\mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\}$ лемму 12 и проведя необходимые преобразования, получаем, аналогично предыдущему, что при достаточно больших A сумма

$$\sum_{s \in M_1} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \mathbf{P}\{\nu_k(t) = N + n - s\} / \mathbf{P}\{\nu_k = N + n\}$$

сколь угодно мало отличается от

$$\frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi H n B_\lambda}} e^{-y^2/2},$$

а вторая часть суммы стремится к нулю. Таким же образом устанавливается справедливость леммы 13 и в условиях теоремы 4.

Лемма 14. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для любого фиксированного x

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_N(t) - Nm^t}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_N(t)}} < x \mid \nu_N = N + n\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Доказательство. Для произвольных $x_1 < x_2$ положим

$$k_1 = Nm^t + x_1 \sqrt{\mathbf{D}\mu_N(t)}, \quad k_2 = Nm^t + x_2 \sqrt{\mathbf{D}\mu_N(t)}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{x_1 \leq (\mu_N(t) - Nm^t) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_N(t)} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n\} \\ &= \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k \mid \nu_N = N + n\} \\ &= \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \sum_{s=N}^{N+n-k} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} / \mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Положим $\gamma = \varepsilon \sqrt{n}/N$, где положительная постоянная ε будет выбрана позднее. Разобьем область изменения индекса s в сумме (18) на две части:

$$M_1 = \{s: N < s \leq n\gamma\},$$

$$M_2 = \{s: n\gamma < s \leq Ntn - k\},$$

и обозначим S_1 и S_2 соответствующие суммы. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{\mu_N(t) - Nm^t}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_N(t)}} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n \right\} = S_1 + S_2. \quad (19)$$

Применяя лемму 2.3.2 [3] и (17), нетрудно получить, что при $s \in M_1$

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} / \mathbf{P}\{\nu_N = N + n\} = 1 + o(1),$$

поэтому

$$\begin{aligned} S_1 &= (1 + o(1)) \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \sum_{s \in M_1} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \\ &= (\mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2\} - \mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2, \nu_N(t) > n\gamma\})(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя явные выражения первых трех моментов случайной величины $\mu_1(t)$, нетрудно проверить, что для суммы $\mu_N(t)$, образованной N независимыми слагаемыми с распределением $\mu_1(t)$, выполнены условия Ляпунова, поэтому при достаточно больших N, n и достаточно малом ε вероятность $\mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2\}$ сколь угодно мало отличается от

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-y^2/2} dy.$$

С помощью неравенства Чебышева и (4) нетрудно показать, что

$$\mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2, \nu_N(t) > n\gamma\} \leq \mathbf{P}\{\mu_N(t) > n\gamma\} \rightarrow 0,$$

поэтому из (20) следует, что

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-y^2/2} dy + o(1). \quad (21)$$

Для оценки S_2 рассмотрим сначала $\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}$. По лемме 2.1.3 из [4]

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} = \frac{k}{N + n - s} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N+n-s} = N_n - s - k\},$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{N+n-s}$ — независимые случайные величины с распределением (1). Используя теорему 7.13.16 книги [11], нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} \leq C/N^2,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Отсюда и из (17) получаем, что

$$S_2 \leq CN^{-5/2} \mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2, n\gamma < \nu_N(t) \leq N + n - s\}$$

и, опять применяя неравенство Чебышева, находим, что

$$S_2 \leq CN^{-5/2} \mathbf{P}\{\nu_N(t) > \gamma n\} \leq Ct/N^{5/2} \varepsilon^2 n \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (19), (21) получаем утверждение леммы 14.

Теперь, используя лемму 2, легко установить справедливость теорем 1–6. Теоремы 1–4 следуют из леммы 13, а теорема 5 вытекает из леммы 14. Доказательство теоремы 6 почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.2 работы [1].

Список литературы

1. Калугин И. Б. Один класс случайных отображений. *Труды МИАН СССР* (1986) **177**, 75–104.
2. Pavlov Yu. L. On the distributions of the number of vertices in strata of a random forest. In: *Proc. 1st World Congress Bernoulli Soc., V.1: Probability and Applications*. VNU Science Press. Utrecht, 1987, pp. 239–241.
3. Павлов Ю. Л. *Случайные леса*. Карельский НЦ РАН, Петрозаводск, 1996.
4. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
5. Egorova I. A. The distribution of vertices in strata of plane planted forest. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics: Proc. 4th Intern. Petrozavodsk Conf. VSP*, Utrecht, 1997, pp. 179–188.
6. Чеплюкова И. А. Предельные распределения числа вершин в слоях случайного леса. *Дискретная математика* (1997) **9**, №4, 150–157.
7. Чеплюкова И. А. Возникновение гигантского дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 111–126.
8. Meir A., Moon J. W. On the altitude of nodes in random trees. *Canad. J. Math.* (1978) **30**, 997–1015.
9. Дрмота М. Распределения высоты листьев корневых деревьев. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 67–82.
10. Севастьянов Б. А. *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
11. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. *Независимые и стационарно связанные величины*. Наука, Москва, 1965.

Статья поступила 06.12.1998.