Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Распределение вероятностей высоты генеалогического дерева многотипного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 1, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:27:42

УДК 519.2

Распределение вероятностей высоты генеалогического дерева многотипного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона

© 1999 г. Б. А. Севастьянов

Рассматривается генеалогическое дерево $\mathcal{T}_n$, состоящее из n поколений невырождающегося ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона $\mathcal{B}$ с r типами частиц $T_1, \dots, T_r$. Каждое ребро генеалогического дерева $\alpha \rightarrow \beta$, соединяющее вершину $(t-1)$ -го поколения α типа T_i с вершиной t -го поколения β типа T_j , помечено случайной величиной $\xi_{ij}(\beta)$. Все случайные величины $\xi_{ij}(\beta)$, $1 \leq i, j \leq r$, $\beta \in S(n)$, где $S(n)$ — множество вершин генеалогического дерева $\mathcal{T}_n$, независимы, и

$$\mathbf{P}\{\xi_{ij}(\beta) = k\} = q_{ij}(k), \quad k = 0, 1, \dots, d, \quad \sum_{k=0}^d q_{ij}(k) = 1.$$

Вес пути от корня до вершины n -го поколения определяется как сумма меток всех ребер этого пути. Высота дерева η_n — это максимум весов всех таких путей. Пусть вспомогательный ветвящийся процесс $\mathcal{B}^*$ составлен только из тех частиц типа T_j , являющихся потомками частицы типа T_i процесса $\mathcal{B}$, которые выживают с вероятностью $q_{ij}(d)$. Показано, что если вероятности $q_{ij}(d)$ таковы, что ветвящийся процесс $\mathcal{B}^*$ будет надкритическим, то существует предельное распределение $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = nq - k\}$, $k = 0, 1, \dots$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-00338, 96-15-96092, и INTAS-RFBR, проект 95-0099.

Рассмотрим многотипный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\mathcal{B}$ с r типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_r$ и с производящей функцией $h(s) = (h_1(s), h_2(s), \dots, h_r(s))$, где $s = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ и $h_i(s) = h_i(s_1, s_2, \dots, s_r)$. Предположим, что ветвящийся процесс $\mathcal{B}$ надкритический и не вырождается, т.е. $h(0) = 0$. Частицы в реализации этого процесса будем обозначать какими-либо метками. Далее тип частицы α будем обозначать $T(\alpha)$. Обозначим S_t множество частиц t -го поколения, а через $S_t(i)$ — множество частиц t -го поколения типа T_i . Ясно, что $S_t = S_t(1) + \dots + S_t(r)$. Пусть первоначальное нулевое поколение S_0 состоит из одной частицы α_0 и ее тип $T(\alpha_0) = T_i$. Реализации n поколений ветвящегося процесса сопоставим случайное дерево $\mathcal{T}_n$ с множеством вершин $S(n) = S_0 \cup \dots \cup S_n$, где каждая частица α из t -го поколения S_t соответствует вершине $\alpha \in S_t$ из t -го слоя дерева $\mathcal{T}_n$. Если $\alpha \in S_{t-1}$

и $\beta \in S_t$ и предком частицы β является частица α , то мы будем писать $\alpha \rightarrow \beta$, и в дереве $\mathcal{T}_n$ этому будет соответствовать ребро, соединяющее α с β .

Пусть $\xi_{ij}(\beta)$, $1 \leq i, j \leq r$, $\beta \in S(n)$, — независимые случайные величины, и

$$\mathbf{P}\{\xi_{ij}(\beta) = k\} = q_{ij}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, d, \quad \sum_{k=0}^d q_{ij}(k) = 1$$

при любых $1 \leq i, j \leq r$. Каждое ребро $\alpha \rightarrow \beta$ пометим случайной величиной $\xi_{ij}(\beta)$, если $T(\alpha) = T_i$, $T(\beta) = T_j$. В случайном дереве $\mathcal{T}_n$ каждой вершине $\alpha_n \in S_n$ поставим в соответствие случайную величину

$$\eta_{in}(\alpha_n) = \sum_{t=1}^n \xi_{i_{t-1}, i_t}(\alpha_t),$$

где $\alpha_t \in S_t(i_t)$, $t = 0, 1, 2, \dots, n$, $i_0 = i$, и $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n$ — путь, соединяющий корень α_0 дерева $\mathcal{T}_n$ с вершиной $\alpha_n \in S_n$. Случайную величину

$$\eta_n = \max_{\alpha_n \in S_n} \eta_{in}(\alpha_n) \quad (1)$$

назовем высотой дерева $\mathcal{T}_n$. Введем обозначения

$$F_{in}(x) = \mathbf{P}\{\eta_n \leq x \mid T(\alpha_0) = T_i\},$$

где α_0 — корень дерева $\mathcal{T}_n$, и

$$G_{ij}(x) = \mathbf{P}\{\xi_{ij}(\alpha) \leq x\}.$$

Теорема 1. *Имеет место рекуррентная формула*

$$F_{i,n+1}(x) = h_i(G_{i1} * F_{1n}(x), G_{i2} * F_{2n}(x), \dots, G_{ir} * F_{rn}(x)) \quad (2)$$

с начальным условием

$$F_{i1}(x) = h_i(G_{i1}(x), G_{i2}, \dots, G_{ir}(x)). \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим ν_j число потомков типа T_j первоначальной частицы α_0 , $T(\alpha_0) = T_i$. Веса $\eta_{i1}(\beta)$ вершин $\beta \in S_1(j)$ определяются равенствами $\eta_{i1}(\beta) = \xi_{ij}(\beta)$. Условное распределение η_1 при заданных $\nu_1, \dots, \nu_r$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \leq x \mid \nu_1, \dots, \nu_r\} = \prod_{j=1}^r G_{ij}^{\nu_j}(x);$$

осредняя это равенство по $\nu_1, \dots, \nu_r$, получаем (3). Для доказательства равенства (2) воспользуемся условной вероятностью

$$\mathbf{P}\{\eta_n \leq x \mid \nu_1, \dots, \nu_r, \xi_{ij}(\beta) \in S_1(j)\} = \prod_{j=1}^r (F_{j,n-1}(x - \xi_{ij}(\beta)))^{\nu_j}. \quad (4)$$

Осредняя (4) по всем $\xi_{ij}(\beta)$, получаем

$$\mathbf{P}\{\eta_n \leq x \mid \nu_1, \dots, \nu_r\} = \prod_{j=1}^r (F_{j,n-1} * G_{ij}(x))^{\nu_j},$$

откуда после осреднения по всем ν_j следует (2).

Введем обозначение $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_r(t))$, где $\mu_i(t)$ — число частиц типа T_i в t -ом поколении ветвящегося процесса $\mathcal{B}$. Матрицу математических ожиданий $A = \|\|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = \mathbf{M}\{\mu_j(1) \mid T(\alpha_0) = T_i\}$, а α_0 — частица нулевого поколения, будем предполагать неразложимой. Поскольку мы полагаем $h(0) = 0$, то ее перронов корень $R > 1$, и вероятность вырождения ветвящегося процесса $\mathcal{B}$ равна нулю.

Для доказательства приведенного ниже основного результата (Теоремы 2) введем вспомогательные ветвящиеся процессы $\tilde{\mathcal{B}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_1 \subseteq \dots \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_N$. Процесс $\tilde{\mathcal{B}}_N$ состоит из подмножества частиц процесса $\mathcal{B}$; при этом множество $S_t(i)$ частиц t -го поколения процесса $\mathcal{B}$ типа T_i следующим образом разбивается на $N + 1$ подмножеств несколько более мелких типов $\tilde{T}_{ik}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Обозначим $\zeta_t(\alpha) = td - \eta_t(\alpha)$, где $\alpha \in S_t$, а $\eta_t(\alpha)$ — более простая запись $\eta_{it}(\alpha)$ без указания типа T_i первоначальной частицы α_0 . Частицы процесса $\tilde{\mathcal{B}}_N$ имеют типы $\tilde{T}_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $k = 0, 1, \dots, N$. Пусть частица $\alpha \in S_t$ в процессе $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям $T(\alpha) = T_i$ и $\zeta_t(\alpha) = k$. В этом случае мы будем полагать, что в процессе $\tilde{\mathcal{B}}_N$ ее тип $\tilde{T}(\alpha) = \tilde{T}_{i, N-k}$, если $k \leq N$. Если же $k > N$, то частицу α из ветвящегося процесса $\tilde{\mathcal{B}}_N$ мы исключаем. Соответствующее генеалогическое дерево $\tilde{\mathcal{T}}_n^{(N)}$ процесса $\tilde{\mathcal{B}}_N$ получается из дерева $\mathcal{T}_n$ процесса $\mathcal{B}$ вычеркиванием всех вершин $\alpha \in S_t$ с $\zeta_t(\alpha) > N$ и инцидентных с ним ребер. Таким образом, в случайном дереве $\tilde{\mathcal{T}}_n^{(N)}$ вершины α типа $\tilde{T}_{ik}$ и β типа $\tilde{T}_{jm}$ соединены ребром $\alpha \rightarrow \beta$, если в дереве $\mathcal{T}_n$ было ребро $\alpha \rightarrow \beta$ и $\mathbf{P}\{\xi_{ij}(\beta) = d - k + m\} = q_{ij}(d - k + m)$. Производящая функция $\tilde{h}_{ik}(\bar{s})$, $\bar{s} = (\bar{s}_{10}, \bar{s}_{20}, \dots, \bar{s}_{r0}, \bar{s}_{11}, \dots, \bar{s}_{r1}, \dots, \bar{s}_{1N}, \dots, \bar{s}_{rN})$ ветвящегося процесса $\tilde{\mathcal{B}}_N$ получаются из производящих функций $h_i(s)$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ следующим образом. Обозначим

$$l_{ijk}(\bar{s}) = \sum_{m=0}^d q_{ij}(d-m)\bar{s}_{k-m}; \quad (5)$$

в правой части (5) при любых $1 \leq j \leq r$ мы полагаем $\bar{s}_{j,-1} = \bar{s}_{j,-2} = \dots = \bar{s}_{j,-d} = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} l_{ijk}(\bar{s}) &= q_{ij}(0)\bar{s}_{j,k-d} + q_{ij}(1)\bar{s}_{j,k-d+1} + \dots + q_{ij}(d)\bar{s}_{jk}, & k \geq d, \\ l_{ijk}(\bar{s}) &= Q_{ij}(k) + q_{ij}(d-k)\bar{s}_{j0} + q_{ij}(d-k+1)\bar{s}_{j1} + \dots + q_{ij}(d)\bar{s}_{jk}, & k < d, \end{aligned}$$

где

$$Q_{ij}(k) = \sum_{m=0}^{d-k-1} q_{ij}(m).$$

В этих обозначениях

$$\tilde{h}_{ik}(\bar{s}) = h_i(l_{i1k}(\bar{s}), l_{i2k}(\bar{s}), \dots, l_{irk}(\bar{s})), \quad 1 \leq i \leq r, \quad 0 \leq k \leq N.$$

В частности, для всех $1 \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{i0}(\bar{s}) &= h_i(Q_{i1}(0) + q_{i1}(d)\bar{s}_{10}, \dots, Q_{ir}(0) + q_{ir}(d)\bar{s}_{r0}), \\ \tilde{h}_{i1}(\bar{s}) &= h_i(Q_{i1}(1) + q_{i1}(d-1)\bar{s}_{10} + q_{i1}(d)\bar{s}_{11}, \dots, Q_{ir}(1) + q_{ir}(d-1)\bar{s}_{r0} + q_{ir}(d)\bar{s}_{r1}). \end{aligned}$$

Матрицу математических ожиданий процесса $\tilde{\mathcal{B}}_N$ можно записать в виде блочной матрицы

$$\tilde{A} = \|\|\tilde{A}_{km}\|_{0 \leq k, m \leq N},$$

где подматрицы

$$\tilde{A}_{km} = \|\tilde{a}_{ik,jm}\|_{1 \leq i, j \leq r}$$

имеют порядок $r \times r$, а их элементы равны

$$\tilde{a}_{ik,jn} = \left. \frac{\partial \tilde{h}_{ik}(\tilde{s})}{\partial \tilde{s}_{jl}} \right|_{\tilde{s}=1} = a_{ij} q_{ij}(d - k + m), \quad m \leq k \leq m + d.$$

Подматрицы $\tilde{A}_{km}$ при $k < m < k - d$ нулевые. Далее мы предполагаем, что все $q_{ij}(d) > 0$ и неразложимые матрицы $\tilde{A}_{kk} = \|a_{ij} q_{ij}(d)\|$ имеют перронов корень $\tilde{R} > 1$. Из вида матрицы $\tilde{A}$ ясно, что ветвящийся процесс $\tilde{\mathcal{B}}_N$ разложим. Неразложимые классы типов $K_m = \{\tilde{T}_{1m}, \tilde{T}_{2m}, \dots, \tilde{T}_{rm}\}$, $m = 0, 1, \dots, N$, упорядочены так, что частицы из класса K_0 могут порождать частицы только того же класса K_0 , частицы класса K_m , $m = 1, \dots, d$, могут порождать только частицы классов $K_0, K_1, \dots, K_m$, а частицы класса K_m , $d < m \leq N$, порождают частицы классов $K_{n-d}, K_{m-d+1}, \dots, K_m$. Таким образом, при любом $N > 0$ вспомогательные ветвящиеся процессы $\tilde{\mathcal{B}}_N$ будут разложимыми и надкритическими. Как известно (см. [1], гл. 5), вероятности вырождения λ_{ik} , $1 \leq i \leq r$, $0 \leq k \leq N$, являются решениями $\tilde{s}_{ik} = \lambda_{ik}$ уравнений

$$\tilde{s}_{ik} = \tilde{h}_{ik}(\tilde{s}), \quad i = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, N.$$

При этом $\lambda_{ik} \leq \lambda_{i,k-1}$, $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, N$. Так как события $\{nd - \eta_n > k\}$ и $\{\text{ветвящийся процесс } \tilde{\mathcal{B}}_k \text{ вырождается к моменту времени } n\}$ равносильны, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{nd - \eta_n > k \mid T(\alpha_0) = T_i\} = \lambda_{ik}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = nd - k \mid T(\alpha_0) = T_i\} = \lambda_{i,k-1} - \lambda_{ik}, \quad i = 1, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = nd \mid T(\alpha_0) = T_i\} = 1 - \lambda_{i0}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть ветвящийся процесс $\mathcal{B}$ с типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_r$ надкритичен, неразложим и не вырождается с вероятностью 1; ребра $\alpha \rightarrow \beta$, $T(\alpha) = T_i$, $T(\beta) = T_j$, генеалогического дерева $\mathcal{T}_n$ этого процесса снабжены независимыми метками $\xi_{ij}(\beta)$, имеющими распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_{ij}(\beta) = k\} = q_{ij}(k), \quad k = 0, 1, \dots, d;$$

пусть вероятности $q_{ij}(d)$ таковы, что матрица $\|a_{ij} q_{ij}(d)\|$, где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица математических ожиданий $a_{ij} = \mathbf{M}\{\mu_j(1) \mid T(\alpha_0) = T_i\}$ ветвящегося процесса $\mathcal{B}$, имеет перронов корень $\tilde{R} > 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ вероятности $\mathbf{P}\{\eta_n = nd - k\}$, определенные (1), имеют пределы (6) и (7).

В [2] рассмотрен частный случай этой теоремы при $r = 1$.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А. *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Севастьянов Б. А. Распределение высоты случайного дерева с помеченными ребрами. *Теория вероятностей и ее применения* (1993) **38**, 453–457.

Статья поступила 16.11.1998.