Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Глухов, Инъективные отображения слов, не размножающие искажений типа пропусков букв, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 2, 20–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:20:03

УДК 519.7

Инъективные отображения слов, не размножающие искажений типа пропусков букв

© 1999 г. М. М. Глухов

Пусть A^* — множество всех слов конечных длин в алфавите A . Дается полное описание всех таких инъективных отображений множества Ω^* в множество Ω_1^* , которые не размножают ошибки типа пропуска букв. Предполагается, что алфавиты Ω и Ω_1 конечны.

Данная работа является продолжением статьи [1]. В связи с этим мы будем пользоваться обозначениями из [1]. Если Ω — некоторый конечный алфавит, то Ω^t — множество слов длины t , Ω^* — множество всех слов в алфавите Ω , Λ — пустое слово, $d(P)$ — длина слова P , $P = G$ — графическое равенство слов, $P^{(i)}$ — i -я буква слова P , $\mu(P)$ — слово $a_n a_{n-1} \dots a_1$ для слова $P = a_1 \dots a_{n-1} a_n$, ε — бинарное отношение, для которого $P \varepsilon Q$ означает, что слово Q получено из P удалением одного вхождения какой-либо одной буквы, $G(\Omega, \varepsilon)$ — множество всех инъективных отображений $\varphi: \Omega^* \rightarrow \Omega^*$, не размножающих искажений типа пропуска букв в словах, т. е. удовлетворяющих условию

$$\forall P, Q \in \Omega^*, \forall i \in \{1, \dots, d(P)\}, \exists j \in \{1, \dots, i\} (P \varepsilon^i Q \Rightarrow \varphi(P) \varepsilon^j \varphi(Q)), \quad (1)$$

$G_1(\Omega, \varepsilon)$ — множество всех биективных отображений из $G(\Omega, \varepsilon)$. Будут использоваться также общепринятые обозначения: $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ и другие.

Один из основных результатов работы [1] заключался в описании всех отображений из $G_1(\Omega, \varepsilon)$. Оказалось, что $G_1(\Omega, \varepsilon)$ состоит из отображений φ видов

$$\forall P \in \Omega^*: \varphi(P) = P^\sigma$$

и

$$\forall P \in \Omega^*: \varphi(P) = \mu(P)^\sigma,$$

где σ — любая фиксированная для данного φ подстановка множества Ω . Однако вопрос описания отображений из $G(\Omega, \varepsilon)$, также представляющий практический интерес, остался открытым. И тем более не рассматривался в [1] вопрос описания множества $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ всех отображений $\varphi: \Omega^* \rightarrow \Omega_1^*$, удовлетворяющих условию (1), при различных алфавитах Ω, Ω_1 . Решению этого общего вопроса и посвящена

данная работа. В рассматриваемом случае, как и в [1], доказывается, что условие (1) равносильно условию

$$\forall P, Q \in \Omega^* (P \varepsilon Q \Rightarrow \varphi(P) \varepsilon \varphi(Q)),$$

и что любое отображение φ из $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ переводит Ω^t в $\Omega_1^{t+\Delta}$ при любом $t \in \mathbf{N}_0$ и подходящем, фиксированном для заданного φ , значении $\Delta \in \mathbf{N}_0$. В отличие от рассмотренного в [1] случая здесь особо выделяется подслучай, в котором $|\Omega| = 2$.

Для формулировки результатов введем еще обозначение $I(\Omega, \Omega_1)$ для множества всех инъективных отображений $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega_1$. По аналогии с [1] через P^σ для $\sigma \in I(\Omega, \Omega_1)$ будет обозначаться слово, полученное из P заменой всех букв их образами при отображении σ .

Основные результаты данной работы можно сформулировать в виде двух теорем.

Теорема 1. Если $|\Omega| \geq 3$ и $|\Omega_1| \geq |\Omega|$, то множество $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ состоит из всех отображений, задаваемых формулами

$$\forall P \in \Omega^*: \varphi(P) = AP^\sigma B$$

и

$$\forall P \in \Omega^*: \varphi(P) = A\mu(P)^\sigma B$$

при произвольных, фиксированных для каждого φ , словах $A, B \in \Omega_1^*$ и отображениях $\sigma \in I(\Omega, \Omega_1)$.

Теорема 2. Если $\Omega = \{a, b\}$ и $|\Omega_1| \geq |\Omega|$, то множество $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ состоит из всех отображений ψ , задаваемых формулами

$$\forall P \in \Omega^*: \psi(P) = A\varphi_{s,t,u,v,\sigma,\tau}(P)B$$

и

$$\forall P \in \Omega^*: \psi(P) = A\varphi_{s,t,u,v,\sigma,\tau}(\mu(P))B$$

при фиксированных для каждого ψ параметрах

$$A, B \in \Omega_1^*, \quad s, t \in \mathbf{N}_0, \quad u, v \in \{0, 1\}, \quad \sigma, \tau \in I(\Omega, \Omega_1),$$

по которым отображение $\varphi_{s,t,u,v,\sigma,\tau}: \Omega^* \rightarrow \Omega_1^*$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}, \forall P \in \Omega^n: \varphi_{s,t,u,v,\sigma,\tau}(P) &= ((\bar{P}^{(1)})^u (P^{(1)} \bar{P}^{(1)})^s P (\bar{P}^{(n)} P^{(n)})^t (\bar{P}^{(n)})^v)^\sigma \\ \varphi_{s,t,u,v,\sigma,\tau}(\Lambda) &= (a^u (ba)^{s+t} b^v)^\tau. \end{aligned}$$

Здесь и ниже для любой буквы $x \in \Omega$ под $\bar{x}, x^1, x^0$ следует понимать соответственно другую букву из Ω , саму букву x и пустое слово Λ .

Для доказательства теорем 1, 2 нам понадобится ряд лемм. Сначала сформулируем две очевидные леммы об общих свойствах слов и бинарного отношения ε .

Лемма 1. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \Omega$, $P \in \Omega^*$. Тогда

- (а) если $x_1 P = P y_1$, то $x_1 = y_1$ и $P = x_1^k$ для некоторого $k \in \mathbf{N}_0$;
- (б) если $x_1 x_2 P = P y_1 y_2$, то или $P = (x_1 x_2)^k$ для некоторого $k \in \mathbf{N}_0$ и $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, или $P = (x_1 x_2)^k x_1$ для некоторого $k \in \mathbf{N}_0$ и $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$.

Лемма 2. Пусть $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $t \in \mathbf{N}_0$, $n \in \{0, 1\}$, $A, B \in \Omega^*$ и X — неизвестное слово из Ω^* . Тогда

(а) система уравнений

$$\begin{aligned} A(xy)^t x^n B &\in X, \\ A(yx)^t y^n B &\in X \end{aligned}$$

имеет ровно два решения

$$\begin{aligned} X_1 &= Ay(xy)^{t-1} x^n B, \\ X_2 &= Ax(yx)^{t-1} y^n B \end{aligned}$$

при $t > 0$ и ровно одно решение $X = AB$ при $t = 0$, $n = 1$;

(б) система уравнений

$$\begin{aligned} X &\in A(xy)^t x^n B, \\ X &\in A(yx)^t y^n B \end{aligned}$$

имеет ровно два решения

$$\begin{aligned} X_1 &= Ay(xy)^t x^n B, \\ X_2 &= Ax(yx)^t y^n B \end{aligned}$$

при $t + n > 0$.

Утверждения леммы 1 доказываются путем побуквенного сравнения слов из заданных равенств. Утверждения леммы 2 доказываются путем рассмотрения возможных вариантов удаления (вставки) букв в исходные слова при переходе от них к слову X . По существу, с учетом симметрии дело сводится к одному случаю, когда в первом слове производится удаление (вставка) в подслове A , а во втором в подслове B .

Лемма 3. Если $\varphi \in G(\Omega, \varepsilon)$, $a, b \in \Omega$ и $a \neq b$, то выполняется одно из следующих шести условий:

$$(1^\circ) \quad \varphi(a) = Ab_1B, \quad \varphi(b) = Ab_2B,$$

$$\varphi(ab) = Ab_1b_2B, \quad \varphi(ba) = Ab_2b_1B;$$

$$(2^\circ) \quad \varphi(a) = Ab_1B, \quad \varphi(b) = Ab_2B,$$

$$\varphi(ab) = Ab_2b_1B, \quad \varphi(ba) = Ab_1b_2B;$$

$$(3^\circ) \quad \varphi(a) = Ab_1(b_2b_1)^rB, \quad \varphi(b) = Ab_2(b_1b_2)^rB, \quad r \in \mathbf{N},$$

$$\varphi(ab) = A(b_1b_2)^{r+1}B, \quad \varphi(ba) = A(b_2b_1)^{r+1}B;$$

$$(4^\circ) \quad \varphi(a) = Ab_1(b_2b_1)^rB, \quad \varphi(b) = Ab_2(b_1b_2)^rB, \quad r \in \mathbf{N},$$

$$\varphi(ab) = A(b_2b_1)^{r+1}B, \quad \varphi(ba) = A(b_1b_2)^{r+1}B;$$

$$(5^\circ) \varphi(a) = A(b_1 b_2)^r B, \varphi(b) = A(b_2 b_1)^r B, r \in \mathbf{N},$$

$$\varphi(ab) = Ab_2(b_1 b_2)^r B, \varphi(ba) = Ab_1(b_2 b_1)^r B;$$

$$(6^\circ) \varphi(a) = A(b_1 b_2)^r B, \varphi(b) = A(b_2 b_1)^r B, r \in \mathbf{N},$$

$$\varphi(ab) = Ab_1(b_2 b_1)^r B, \varphi(ba) = Ab_2(b_1 b_2)^r B,$$

где A, B — некоторые слова из Ω_1^* , $b_1, b_2 \in \Omega_1$ и $b_1 \neq b_2$.

Доказательство. Пусть $\varphi(\Lambda) = C$. Так как $a \in \Lambda, b \in \Lambda$, то $\varphi(a) \in C, \varphi(b) \in C$, и потому

$$\varphi(a) = P_1 c P_2, \quad \varphi(b) = P'_1 d P'_2,$$

где $P_1 P_2 = P'_1 P'_2 = C$.

Рассмотрим слова $Q_1 = \varphi(ab), Q_2 = \varphi(ba)$. Так как $ab \in \Lambda, ba \in \Lambda, ab \in b, ba \in b$, должны выполняться соотношения

$$Q_i \in P_1 c P_2, \quad Q_i \in P'_1 d P'_2, \quad i = 1, 2.$$

Тогда слова Q_1, Q_2 должны иметь вид

$$Q_1 = A_1 b_1 A_2 c_1 A_3,$$

$$Q_2 = B_1 b_2 B_2 c_2 B_3$$

и априори для слов $P_1 c P_2, P'_1 d P'_2$ возможны лишь следующие четыре варианта.

Вариант I:

$$P_1 c P_2 = A_1 A_2 c_1 A_3 = B_1 B_2 c_2 B_3, \quad (2)$$

$$P'_1 d P'_2 = A_1 b_1 A_2 A_3 = B_1 b_2 B_2 B_3. \quad (3)$$

Вариант II:

$$P_1 c P_2 = A_1 A_2 c_1 A_3 = B_1 b_2 B_2 B_3, \quad (4)$$

$$P'_1 d P'_2 = A_1 b_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 c_2 B_3. \quad (5)$$

Варианты III, IV получаются из I, II заменой $P_1 c P_2$ на $P'_1 d P'_2$ и $P'_1 d P'_2$ на $P_1 c P_2$ в левых частях соотношений (2)–(5).

Рассмотрим эти варианты.

Вариант I. Заметим сначала, что если $A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3$, то из равенств (2), (3) с использованием леммы 1 получаем, что

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_3 = B_3, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

Отсюда следует равенство $Q_1 = Q_2$, противоречащее инъективности отображения φ . Теперь из равенств (2), (3) замечаем, что слова $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3$ имеют общее начало длины

$$l \geq \min\{d(A_1 A_2), d(B_1 B_2)\}$$

и общий конец длины

$$k \geq \min\{d(A_2 A_3), d(B_2 B_3)\}.$$

Значит, неравенство $A_1 A_2 A_3 \neq B_1 B_2 B_3$ возможно лишь в тех случаях, когда

$$d(A_1 A_2) < d(B_1) \text{ или } d(B_1 B_2) < d(A_1), \quad (6)$$

ибо в противном случае $l + k \geq d(A_1 A_2 A_3)$ и потому $A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3$. В силу симметрии достаточно рассмотреть одно из неравенств условия (6).

Пусть $d(A_1 A_2) < d(B_1)$, и тогда $d(A_3) > d(B_2 B_3)$.

Учитывая эти соотношения, мы из равенств (2), (3) получим соотношения

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 A_2 B'_1, & A_3 &= A'_3 B_2 B_3, \\ B'_1 &\neq \Lambda, & A'_3 &\neq \Lambda, \\ c_1 A'_3 B_2 &= B'_1 B_2 c_2, & b_1 A_2 A'_3 &= A_2 B'_1 b_2. \end{aligned}$$

Приравнивая в последних равенствах соответствующие буквы и учитывая утверждение (а) леммы 1, получим, что

$$\begin{aligned} B_2 &= c_2^s, & A'_3 &= A''_3 c_2, & c_1 A''_3 &= B'_1, & s &\geq 0; \\ A_2 &= b_1^t, & B'_1 &= b_1 B''_1, & A'_3 &= B''_1 b_2, & t &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, $A''_3 = B''_1$. Подставляя полученные данные в равенства (2), (3), получим равенство $P_1 c P_2 = P'_1 d P'_2$, противоречащее инъективности φ . Таким образом, вариант I невозможен.

Рассмотрим вариант II. Здесь в зависимости от соотношений между числами $k_i = d(A_i)$, $l_i = d(B_i)$, $i = 1, 2, 3$, логически возможны 6 подслучаев:

- (1) $k_1 + k_2 \leq l_1$,
- (2) $k_1 \leq l_1$, $l_1 < k_1 + k_2 < l_1 + l_2$,
- (3) $k_1 \leq l_1$, $k_1 + k_2 \geq l_1 + l_2$.

Остальные 3 случая симметричны указанным, они получаются из 1–3 заменой k_i на l_i и l_i на k_i , $i = 1, 2$. В связи с этим достаточно рассмотреть указанные 3 случая.

В первом случае $d(A_1 A_2) \leq d(B_1)$, и значит, $d(A_3) \geq d(B_2 B_3)$.

Отсюда и из (4), (5) получаем, что

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 A_2 B'_1, & A_3 &= A'_3 B_2 B_3, \\ c_1 A'_3 &= B'_1 b_2, & b_1 A_2 A'_3 B_2 &= A_2 B'_1 B_2 c_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $A'_3 = \Lambda$, то $B'_1 = \Lambda$, $c_1 = b_2$, $b_1 = c_2$, $A_2 = b_1^s$, $B_2 = b_1^t$, $s, t \in \mathbf{N}_0$. Используя полученные данные, найдем, что

$$\begin{aligned} P_1 c P_2 &= A_1 b_1^s b_2 b_1^t B_3, & Q_1 &= A_1 b_1^s b_1 b_2 b_1^t B_3, \\ P'_1 d P'_2 &= A_1 b_1^s b_1 b_1^t B_3, & Q_2 &= A_1 b_1^s b_2 b_1 b_1^t B_3. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $P_1 = P'_1$, $P_2 = P'_2$, $c = b_2$, $d = b_1$, $b_2 \neq b_1$, и, следовательно, выполняется условие 2°.

Если же $A'_3 \neq \Lambda$, то из (7) находим, что

$$A'_3 = A''_3 b_2, \quad B'_1 = c_1 B''_1, \quad A''_3 = B''_1, \quad b_1 = c_1, \quad b_2 = c_2, \quad A_2 = b_1^s, \quad B_2 = b_1^t,$$

где $s \geq 0, t \geq 0$. Используя полученные соотношения, мы из (4), (5) получим, что

$$P_1 c P_2 = P'_1 d P'_2 = A_1 b_1^{s+1} A_3'' b_2^{t+1} B_3.$$

Это противоречит инъективности φ .

Во втором случае

$$d(A_1) \leq d(B_1), \quad d(B_1) < d(A_1 A_2) < d(B_1 B_2).$$

Из этих неравенств и соотношений (4), (5) получаем, что

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 B'_1, & A_2 &= B'_1 A'_2, & A_3 &= A'_3 B_3, & A_1 A_2 &= A_1 B'_1 A'_2, \\ B_2 &= B'_2 A'_3, & A'_2 c_1 &= b_2 B'_2, & b_1 B'_1 A'_2 A'_3 &= B'_1 B'_2 A'_3 c_2, \end{aligned}$$

где $A'_2 \neq \Lambda$. Из двух последних равенств находим, что

$$\begin{aligned} A'_2 &= b_2 A_2'', & B'_2 &= B_2'' c_1, & A_2'' &= B_2'', & B'_1 &= b_1^s, & A'_3 &= c_2^t, & s, t &\geq 0, \\ & & & & b_1 b_2 A_2'' &= A_2'' c_1 c_2. \end{aligned}$$

Последнее равенство по лемме 2 возможно в двух случаях:

- (a) $A_2'' = (b_1 b_2)^r, c_1 = b_1, c_2 = b_2;$
- (b) $A_2'' = (b_1 b_2)^r b_1, c_1 = b_2, c_2 = b_1, r \geq 0.$

В случае (a)

$$\begin{aligned} A_2 &= b_1^s b_2 (b_1 b_2)^r, & A_3 &= b_2^t B_3, & B_1 &= A_1 b_1^s, & B_2 &= (b_1 b_2)^r b_1 b_2^t, \\ P_1 c P_2 &= (A_1 b_1^s) (b_2 b_1)^{r+1} (b_2^t B_3), & P'_1 d P'_2 &= (A'_1 b_1^s) (b_1 b_2)^{r+1} (b_2^t B_3), \\ Q_1 &= (A_1 b_1^s) (b_1 b_2)^{r+1} b_1 (b_2^{t+1} B_3), & Q_2 &= (A_1 b_1^s) (b_2 b_1)^{r+1} b_2 (b_2^{t+1} B_3), & b_1 &\neq b_2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выполняется условие 5°.

В случае (b) получим условие 4°:

$$\begin{aligned} P_1 c P_2 &= A_1 b_1^s b_2 (b_1 b_2)^{r+1} b_1^t B_3, & P'_1 d P'_2 &= A_1 b_1^s b_1 (b_2 b_1)^{r+1} b_1^t B_3, \\ Q_1 &= A_1 b_1^s (b_1 b_2)^{r+2} b_1^t B_3, & Q_2 &= A_1 b_1^s (b_2 b_1)^{r+2} b_1^t B_3, & s, t, r &\geq 0. \end{aligned}$$

В третьем случае

$$d(A_1) \leq d(B_1), \quad d(A_1 A_2) > d(B_1 B_2),$$

и тогда $d(B_3) \geq d(A_3)$. Отсюда и из (4), (5) находим, что

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 B'_1, & A_2 &= B'_1 A'_2, & B_3 &= B'_3 A_3, & A_2 &= A'_2 B'_3, \\ A_2 c_1 &= b_2 B_2 B'_3, & b_1 B'_1 A'_2 &= B'_1 B_2 c_2 B'_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Если $A'_2 = \Lambda$, то $B_2 B'_3 = \Lambda, c_1 = b_2, c_2 = b_1, B'_1 = b_1^s, s \geq 0$, и потому

$$\begin{aligned} P_1 c P_2 &= A_1 b_1^s b_2 A_3, & P'_1 d P'_2 &= A_1 b_1^{s+1} A_3, \\ Q_1 &= A_1 b_1^k b_1 b_2 A_3, & Q_2 &= A_1 b_1^k b_2 b_1 A_3. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется условие 2°.

Пусть $A'_2 \neq \Lambda$. Тогда $B_2 B'_3 \neq \Lambda$, $A'_2 = b_2 A''_2$, $B_2 B'_3 = B_2 B''_3 c_1$ при $B'_3 \neq \Lambda$ и $B_2 = B'_2 c_1$ при $B'_3 = \Lambda$.

Если $B'_3 \neq \Lambda$, то $B'_3 = B''_3 c_1$ и из (8) следует, что

$$b_2 A''_2 c_1 = b_2 B_2 B''_3 c_1, \quad A''_2 = B_2 B''_3, \\ b_1 B'_1 b_2 B_2 B''_3 = B'_1 B_2 c_2 B''_3 c_1.$$

Из последнего равенства видно, что

$$B'_1 = b_1^s, \quad B''_3 = c_1^t, \quad b_1 b_2 B_2 = B_2 c_2 c_1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Здесь в силу утверждения (b) леммы 2 снова возможны два подслучая:

(a) $B_2 = (b_1 b_2)^r$, $c_2 = b_1$, $c_1 = b_2$,

(b) $B_2 = (b_1 b_2)^r b_1$, $c_2 = b_2$, $c_1 = b_1$, $r \geq 0$.

В случае (a) находим, что

$$P_1 c P_2 = (A_1 b_1^s)(b_2 b_1)^r b_2 (b_2^{t+1} A_3), \quad P'_1 d P'_2 = (A_1 b_1^s) b_1 (b_2 b_1)^r (b_2^{t+1} A_3), \\ Q_1 = (A_1 b_1^s)(b_1 b_2)^{r+1} (b_2^{t+1} A_3), \quad Q_2 = (A_1 b_1^s)(b_2 b_1)^{r+1} (b_2^{t+1} A_3).$$

Отсюда видно, что выполняется условие 2° при $r = 0$ и условие 4° при $r > 0$.
В случае (b) получим условие 5°, поскольку здесь

$$P_1 c P_2 = (A_1 b_1^s)(b_2 b_1)^{r+1} (b_1^{t+1} A_3), \quad P'_1 d P'_2 = (A_1 b_1^s)(b_1 b_2)^{r+1} (b_1^{t+1} A_3), \\ Q_1 = (A_1 b_1^s)(b_1 b_2)^{r+1} b_1 (b_1^{t+1} A_3), \quad Q_2 = A_1 b_1^s b_2 (b_1 b_2)^{r+1} (b_1^{t+1} A_3).$$

Если, наконец, $B'_3 = \Lambda$, то $B_2 = B'_2 c_1$, и тогда

$$b_2 A''_2 c_1 = b_2 B'_2 c_1, \quad A''_2 = B'_2, \\ b_1 B'_1 b_2 A''_2 = B'_1 A''_2 c_1 c_2.$$

Отсюда находим, что

$$B'_1 = b_1^s, \quad b_1 b_2 A''_2 = A''_2 c_1 c_2.$$

И снова возможны два подслучая:

(a) $A''_2 = (b_1 b_2)^t$, $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$,

(b) $A''_2 = (b_1 b_2)^t b_1$, $c_2 = b_1$, $c_1 = b_2$.

Находя, как и выше, слова $P_1 c P_1$, $P'_1 d P'_1$, Q_1 , Q_2 , мы получим, что в случае (a) выполняется условие 5°, в случае (b) условие 3°.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если $|\Omega| \geq 3$, и $\varphi \in G(\Omega, \varepsilon)$, то для всех пар различных элементов из Ω выполняется лишь одно из условий 1°, 2°.

Доказательство. Допустим, что $a, b \in \Omega$, $a \neq b$ и для элементов a, b выполняется условие 3°. Тогда

$$\varphi(a) = Ab_1(b_2b_1)^r B, \quad \varphi(b) = Ab_2(b_1b_2)^r B, \quad r > 0. \quad (9)$$

Выберем в Ω элемент $c \neq a, b$ и допустим, что для элементов a, c выполняется одно из условий 1°–4°. Тогда имеют место равенства

$$\varphi(a) = A_1c_1(c_2c_1)^l B_1, \quad \varphi(c) = A_1c_2(c_1c_2)^l B_1, \quad c_1 \neq c_2, \quad l \geq 0. \quad (10)$$

Заметим, что при $l = 0$ выполняется условие 1° или 2°, при $l > 0$ условие 3° или 4°.

Так как $\varphi \in G(\Omega, \varepsilon)$ и $a \in \Lambda$, $b \in \Lambda$, $c \in \Lambda$, то

$$\varphi(a) \varepsilon \varphi(\Lambda), \quad \varphi(b) \varepsilon \varphi(\Lambda), \quad \varphi(c) \varepsilon \varphi(\Lambda).$$

Отсюда, по лемме 2 имеются, с точностью до симметрии, две возможности для $\varphi(\Lambda)$:

$$\varphi(\Lambda) = A(b_1b_2)^r B = A_1(c_1c_2)^l B_1, \quad (11)$$

$$\varphi(\Lambda) = A(b_2b_1)^r B = A_1(c_1c_2)^l B_1. \quad (12)$$

При этом в обоих случаях выполняются равенства

$$\varphi(a) = Ab_1(b_2b_1)^r B = A_1c_1(c_2c_1)^l B_1. \quad (13)$$

Рассмотрим (11) и (12) отдельно.

В первом случае, сравнивая слова из равенств (11), (13), получаем, что если $l > 0$, то

$$b_2 = c_2, \quad b_1 = c_1, \quad B_1 = B, \quad A(b_1b_2)^r = A_1(b_1b_2)^l.$$

Из этих равенств и условий 3°, 4° приходим соответственно к равенствам $\varphi(ba) = \varphi(ca)$ или $\varphi(ba) = \varphi(ca)$, противоречащим инъективности φ . Если же $l = 0$, то A_1 имеет вид $A_1 = A'_1gc_1^k$, где $k \geq 0$, $g \neq c_1$. Теперь равенства (11), (13) примут вид

$$A(b_1b_2)^r B = A'_1gc_1^k B_1,$$

$$A(b_1b_2)^r b_1 B = A'_1gc_1^k B_1.$$

Из них видно, что

$$b_2 = g, \quad b_1 = c_1, \quad B = c_1^k B_1, \quad A(b_1b_2)^r = A'_1g,$$

и поэтому

$$\varphi(b) = Ab_2(b_1b_2)^r b_1^k B_1,$$

$$\varphi(c) = A(b_1b_2)^r b_1^k c_2 B_1.$$

По лемме 3 элементы b, c обязаны удовлетворять одному из условий 1°–6°. Так как $r > 0$, условия 1°, 2° невозможны. Тогда необходимо, чтобы

$$k = 1, \quad c_2 = b_2, \quad \varphi(b) = A(b_2b_1)^{r+1} B_1, \quad \varphi(c) = A(b_1b_2)^{r+1} B_1,$$

и, значит, элементы b, c удовлетворяют условию 5° или 6° . Следовательно,

$$\{\varphi(bc), \varphi(cb)\} = \{Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B_1, A(b_1b_2)^{r+1}b_1B_1\}.$$

С другой стороны, при найденных условиях имеют место равенства

$$\varphi(ba) = A(b_1b_2)^{r+1}B = A(b_1b_2)^{r+1}b_1B_1,$$

и мы снова пришли к противоречию с инъективностью φ .

Во втором случае, сравнивая слова из равенств (12), (13), находим, что

$$B_1 = c_1^k g B'_1, \quad g \neq c_1, \quad k \geq 0, \quad A = A_1(c_1c_2)^l c_1^k, \quad (b_1b_2)^r B = g B'_1.$$

В этих условиях равенство (12) принимает вид

$$A_1(c_1c_2)^l c_1^k (b_2b_1)^r B = A_1(c_1c_2)^l c_1^k (b_1b_2)^r B.$$

Из него следует противоречащее условию равенство $b_1 = b_2$.

Таким образом, для элементов a, c не может выполняться ни одно из условий 1° – 4° . Остается исключить условия 5° , 6° . Допустим, что выполняется одно из них. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= A_1(c_2c_1)^{l+1}B_1, \\ \varphi(c) &= A_1(c_1c_2)^{l+1}B_1, \quad l \geq 0. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим случаем здесь также достаточно рассмотреть под-случаи

$$\varphi(\Lambda) = A(b_1b_2)^r B = A_1(c_1c_2)^l c_1 B_1, \quad (14)$$

$$\varphi(\Lambda) = A(b_2b_1)^r B = A_1(c_1c_2)^l c_1 B_1. \quad (15)$$

При этом в обоих случаях выполняются равенства

$$\varphi(a) = A(b_1b_2)^r b_1 B = A_1(c_2c_1)^{l+1}B_1. \quad (16)$$

В первом случае, сравнивая слова из (14), (16), замечаем, что $A_1 = A'_1 g c_2^k$, где $g \neq c_2$, $k \geq 0$, причем

$$B = c_2^k c_1 (c_2c_1)^l B_1, \quad A(b_1b_2)^r = A'_1 g, \quad g = b_2, \quad c_2 = b_1.$$

В этих условиях

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= Ab_2(b_1b_2)^r b_1^k c_1 (b_1c_1)^l B_1, \\ \varphi(c) &= A(b_1b_2)^r b_1^k c_1 b_1 (c_1b_1)^l B_1. \end{aligned}$$

Так как в силу леммы 3 слова b, c должны удовлетворять одному из условий 1° – 6° , имеем две возможности: $k = 0$, $b_2 = b_1$ или $k = 1$, $b_2 = c_1$. Первая из них противоречит условию $b_1 \neq b_2$, вторая приводит к равенству $\varphi(cb) = \varphi(ba)$ или к равенству $\varphi(bc) = \varphi(ba)$, противоречащим инъективности φ .

Во втором случае из сравнения слов в равенствах (15), (16) получаем, что

$$A = A_1, \quad b_2 = c_1, \quad b_1 = c_2, \quad (b_2b_1)^r B = (b_2b_1)^l b_2 B_1.$$

Если $r > l$ и $r = l + s$, то $B = b_1(b_2b_1)^{s-1}B$,

$$\varphi(b) = A(b_2b_1)^{l+1}(b_2b_1)^{s-1}b_2B,$$

$$\varphi(c) = A(b_2b_1)^{l+1}b_1(b_2b_1)^{s-1}B.$$

Отсюда видно, что для элементов b, c выполняется условие 1° или 2° при $s = 1$ и условие 3° или 4° при $s > 1$. Во всех этих случаях среди элементов $\varphi(bc), \varphi(cb)$ есть элемент $A(b_2b_1)^{r+1}B$, совпадающий с $\varphi(ba)$, и мы пришли к противоречию с условием инъективности φ . К такому же результату ведет и случай $r \leq l$.

Таким образом, доказано, что для элементов a, b не может выполняться условие 3°. Из симметричных соображений не может для них выполняться и условие 4°.

Допустим теперь, что для a, b выполняется условие 5°. Тогда, по доказанному, для a, c не могут выполняться условия 3°, 4°. Допустим, что для них выполняется условие 1° или 2°. Тогда

$$\varphi(a) = A_1c_1B_1, \quad \varphi(c) = A_1c_2B_1, \quad c_1 \neq c_2.$$

Отсюда и из условия 5° для a, b из леммы 2 следует, что $\varphi(\Lambda) = A_1B_1$ и $\varphi(\Lambda) = A(b_1b_2)^rb_1B$ или $\varphi(\Lambda) = Ab_2(b_1b_2)^rB$. Значит, с точностью до симметрии достаточно рассмотреть два случая

$$\varphi(\Lambda) = A(b_1b_2)^rb_1B = A_1B_1, \quad (17)$$

$$\varphi(\Lambda) = Ab_2(b_1b_2)^rB = A_1B_1. \quad (18)$$

Причем в обоих случаях

$$\varphi(a) = A(b_2b_1)^{r+1}B = A_1c_1B_1. \quad (19)$$

В первом случае из сравнений слов в равенствах (17), (19) получаем, что

$$B_1 = c_1^k g B'_1, \quad k \geq 0, \quad g \neq c_1, \quad b_1 = g, \quad b_2 = c_1,$$

$$A = A_1b_2^k, \quad (b_1b_2)^rb_1B = b_1B'_1.$$

Тогда

$$\varphi(b) = A_1b_2^k(b_1b_2)^{r+1}B,$$

$$\varphi(c) = A_1c_2b_2^k(b_1b_2)^rb_1B.$$

Так как для элементов b, c должно выполняться одно из условий 1°–6°, возможны подслучаи $k = 0, c_2 = b_1$ и $k = 1, b_1 = c_2$. При этом, соответственно,

$$\varphi(b) = (A_1b_1)b_2(b_1b_2)^rB,$$

$$\varphi(c) = (A_1b_1)(b_1b_2)^rb_1B$$

и

$$\varphi(b) = A_1b_2(b_1b_2)^{r+1}B,$$

$$\varphi(c) = A_1(b_1b_2)^{r+1}b_1B.$$

В обоих подслучаях для элементов b, c выполняется условие 3° или 4° . Однако по доказанному выше это невозможно.

Во втором случае из сравнения слов в (18), (19) получаем, что

$$A_1 = A'_1 g c_1^k, \quad g \neq c, \quad k \geq 0, \quad g = b_2, \quad c_1 = b_1, \\ A(b_2 b_1)^r = A'_1, \quad B = b_1^k B_1.$$

Далее приходим к двум возможностям: $k = 0, c_2 = b_1$ или $k = 1, b_1 = c_2$.

Для каждой из них элементы b, c удовлетворяют условию 3° или 4° , и мы снова пришли к противоречию с доказанным выше.

Теперь докажем, что для всех пар различных элементов из Ω выполняется одно и то же условие из $1^\circ, 2^\circ$. Если же это не так, то найдутся такие три элемента $a, b, c \in \Omega$, что для a, b выполняется условие 1° , а для a, c условие 2° . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= Ab_1 B, & \varphi(b) &= Ab_2 B, & \varphi(\Lambda) &= AB, & b_1 &\neq b_2, \\ \varphi(ab) &= Ab_1 b_2 B, & \varphi(ba) &= Ab_2 b_1 B; \\ \varphi(a) &= A_1 c_1 B_1, & \varphi(c) &= A_1 c_2 B_1, & \varphi(\Lambda) &= A_1 B_1, & c_1 &\neq c_2, \\ \varphi(ac) &= A_1 c_2 c_1 B_1, & \varphi(ca) &= A_1 c_1 c_2 B_1. \end{aligned}$$

Отыскивая в словах

$$\varphi(\Lambda) = AB = A_1 B_1, \tag{20}$$

$$\varphi(a) = Ab_1 B = A_1 c_1 B_1, \tag{21}$$

первые слева различные буквы, получим, что

$$B = b_1^k g B', \quad k \geq 0, \quad g \neq b_1$$

(при этом не исключается случай $B = b_1^k, g = \Lambda, B' = \Lambda$), и

$$B_1 = c_1^l h B'_1, \quad l \geq 0, \quad h \neq c_1.$$

Теперь из равенств (20), (21) следует, что

$$Ab_1^k = A_1 c_1^l, \quad B'_1 = B', \quad g = h, \quad b_1 = c_1.$$

Пусть $k \geq l$, т. е. $k = l + s, s \geq 0$. Тогда

$$A_1 = Ab_1^s, \quad B = b_1^s B_1, \quad \varphi(b) = Ab_2 b_1^s B_1, \quad \varphi(c) = Ab_1^s c_2 B_1.$$

Так как элементы b, c должны удовлетворять условию 1° или 2° , из последних двух равенств, учитывая, что $c_2 \neq b_1$, получаем равенство $s = 0$, т. е.

$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad \varphi(c) = Ac_2 B.$$

В силу симметрии к такому же выводу приводит и случай $l \geq k$.

Допустим теперь, что элементы b, c удовлетворяют условию 1° , т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(bc) &= Ab_2 c_2 B, \\ \varphi(cb) &= Ac_2 b_2 B. \end{aligned}$$

Рассмотрим слово $Q = abc \in \Omega^*$. Так как $\varepsilon(abc) = \{ab, ac, bc\}$, справедливо включение

$$\varepsilon(\varphi(Q)) \supseteq \{Ab_1b_2B, Ac_2b_1B, Ab_2c_2B\}.$$

Однако нетрудно видеть, что такого слова $\varphi(Q)$ не существует (поскольку b_1, b_2, c_2 попарно различны).

Пусть элементы b, c удовлетворяют условию 2°. Здесь, выбрав $Q = acb$, мы приходим к противоречию точно так же, как и в случае выполнения условия 1°. Лемма доказана.

Теперь докажем теоремы 1, 2.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что отображения вида (3) и (4) удовлетворяют условию (2) и поэтому принадлежат множеству $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$. Доказывать будем обратное утверждение.

Пусть $|\Omega| \geq 3$ и $\varphi \in G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$.

Согласно лемме 4 любое отображение $\varphi \in G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ имеет вид (3) или (4) на всех словах длины $l \leq 1$ и словах вида a_1a_2 при $a_1 \neq a_2$.

Выясним, какие значения могут иметь слова $\varphi(aa)$, $a \in \Omega$. Выберем в Ω три различных элемента a, b, c . По лемме 4

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= Ab_1B, \quad \varphi(b) = Ab_2B, \quad \varphi(c) = Ab_3B, \\ \{\varphi(ab), \varphi(ba)\} &= \{Ab_1b_2B, Ab_2b_1B\}, \quad \{\varphi(ac), \varphi(ca)\} = \{Ab_1b_3B, Ab_3b_1B\} \end{aligned}$$

при некоторых различных b_1, b_2, b_3 .

Из двух последних равенств в силу леммы 2 следует, что $\varphi(aba)$ равно $Ab_1b_2b_1B$ или $Ab_2b_1b_2B$, $\varphi(aca)$ равно $Ab_1b_3b_1B$ или $Ab_3b_1b_3B$. Отсюда и из условий

$$\varphi(aba)\varepsilon\varphi(aa), \quad \varphi(aca)\varepsilon\varphi(aa)$$

находим единственную возможность:

$$\varphi(aba) = Ab_1b_2b_1B, \quad \varphi(aca) = Ab_1b_3b_1B, \quad \varphi(aa) = Ab_1b_1B.$$

В итоге доказано, что утверждение теоремы 1 справедливо для всех слов P длины $l \leq 2$, а также для слов вида aba , $a \neq b$.

Теперь применим индукцию по длине слов. Допустим, что

$$\varphi(P) = AP^\sigma B \tag{22}$$

для всех слов длины $k \geq 2$ и рассмотрим слова длины $k+1$.

Сначала будем искать слова $\varphi(P)$ для слов P из Ω^{k+1} , отличных от слов вида a^{k+1} и a^sb^t , $s+t = k+1$. Любое такое слово можно представить в виде

$$P = a^rb^lc^sP_1, \quad r, l, s > 0, \quad a \neq b, \quad c \neq b. \tag{23}$$

Для слов

$$Q_1 = a^{r-1}b^lc^sP_1, \quad Q_2 = a^rb^{l-1}c^sP_1, \quad Q_3 = a^rb^lc^{s-1}P_1$$

из $\varepsilon(P)$ по предположению индукции

$$\varphi(Q_i) = AQ_i^\sigma B, \quad i = 1, 2, 3.$$

Обозначив $a^\sigma = b_1$, $b^\sigma = b_2$, $c^\sigma = b_3$, получим, что

$$\varphi(Q_1) = Ab_1^{r-1}b_2^l b_3^s P_1^\sigma B,$$

$$\varphi(Q_2) = Ab_1^r b_2^{l-1} b_3^s P_1^\sigma B,$$

$$\varphi(Q_3) = Ab_1^r b_2^l b_3^{s-1} P_1^\sigma B.$$

Так как $\varphi(P) \varepsilon \varphi(Q_1)$ и $\varphi(P) \varepsilon \varphi(Q_2)$, по лемме 3 для $\varphi(P)$ имеются лишь две возможности:

$$\varphi(P) = Ab_1^r b_2^l b_3^s P_1^\sigma B$$

или

$$\varphi(P) = Ab_1^{r-1} b_2 b_1 b_2^{l-1} b_3^s P_1^\sigma B.$$

В первой из них мы получаем равенство (22), во второй противоречие с условием $\varphi(P) \varepsilon \varphi(Q_3)$. Итак, равенство (22) справедливо для всех слов вида (23).

Пусть теперь $P = a^r b^l$, $r \geq 1$, $l \geq 1$, $d(P) \geq 3$.

Из тех же соображений и в тех же обозначениях, что и выше, при $Q_1 = a^{r-1} b^l$, $Q_2 = a^r b^{l-1}$, получим, что

$$\varphi(P) = AP^\sigma B$$

или

$$\varphi(P) = Ab_1^{r-1} b_2 b_1 b_2^{l-1} B.$$

Так как $d(P) \geq 3$, то $r-1 > 0$ или $l-1 > 0$. Тогда по доказанному в предыдущем случае

$$Ab_1^{r-1} b_2 b_1 b_2^{l-1} B = \varphi(a^{r-1} b a b^{l-1}).$$

А так как φ инъективно, остается лишь первая возможность, т.е. выполнено равенство (22).

Пусть теперь $P = a^{k+1}$, $k+1 \geq 3$. В этом случае воспользуемся двумя вспомогательными словами длины $k+2$:

$$P_1 = a^k b a, \quad P_2 = a b a^k.$$

Так как $\varepsilon(P_1) \supseteq \{a^k b, a^{k-1} b a\}$, справедливы включения

$$\varepsilon(\varphi(P_1)) \supseteq \{\varphi(a^k b), \varphi(a^{k-1} b a)\} \supseteq \{Ab_1^k b_2 B, Ab_1^{k-1} b_2 b_1 B\}.$$

Отсюда по лемме 3 получаем, что

$$\varphi(P_1) = Ab_1^{k-1} b_2 b_1 b_2 B$$

или

$$\varphi(P_1) = Ab_1^{k-1} b_1 b_2 b_1 B.$$

Аналогично находим, что

$$\varphi(P_2) = Ab_1 b_2 b_1 b_1^{k-1} B$$

или

$$\varphi(P_2) = Ab_2 b_1 b_2 b_1^{k-1} B.$$

Рассматривая полученные четыре возможности и учитывая, что $a^{k+1} \varepsilon P_1$, $a^{k+1} \varepsilon P_2$, мы для $\varphi(a^{k+1})$ формально найдем три варианта: $\varphi(a^{k+1}) = Ab_1^{k+1}B$ при любом $k \geq 2$ и $\varphi(a^{k+1}) = Ab_1b_2b_1B$ или $Ab_2b_1b_2B$ при $k = 2$.

Два последних варианта отпадают в силу инъективности φ , поскольку уже доказано, что

$$Ab_1b_2b_1B = \varphi(aba), \quad Ab_2b_1b_2B = \varphi(bab).$$

Итак, равенство (22) верно и в этом случае.

Нетрудно видеть, что та же схема доказательства проходит и при замене формулы (22) на формулу

$$\varphi(P) = A\mu(P^\sigma)B.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно проверить, что указанные в ней отображения удовлетворяют условию (2) и поэтому содержатся в $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$.

Докажем, что в $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ других отображений нет.

Напомним, что здесь $|\Omega| = 2$. Пусть $\Omega = \{0, 1\}$.

Рассмотрим ряд случаев.

I. Элементы 0, 1 удовлетворяют условию 1° или 2°. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(\Lambda) &= AB, \\ \varphi(0) &= Ab_1B, \\ \varphi(1) &= Ab_2B. \end{aligned}$$

В этом случае доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. В нем условие $|\Omega| > 2$ существенно использовалось лишь при нахождении $\varphi(aa)$ и $\varphi(bb)$, т. е. в нашем случае $\varphi(00)$, $\varphi(11)$. Здесь эти слова находятся сложнее. Докажем, что

$$\varphi(11) = Ab_2b_2B, \quad \varphi(00) = Ab_1b_1B.$$

Из условий 1°, 2° и леммы 3 получаем, что

$$\{\varphi(010), \varphi(101)\} = \{Ab_1b_2b_1B, Ab_2b_1b_2B\}.$$

Рассмотрим две из этих возможностей отдельно.

(а) $\varphi(010) = Ab_1b_2b_1B$, $\varphi(101) = Ab_2b_1b_2B$.

Будем находить $\varphi(11)$ из условия

$$\varphi(101)\varepsilon\varphi(11)\varepsilon\varphi(1),$$

то есть

$$Ab_2b_1b_2B\varepsilon\varphi(11)\varepsilon Ab_2B.$$

Здесь и далее мы подчеркиваем некоторые вхождения букв b_1 и b_2 .

При переходе от слова $Ab_2b_1b_2B$ к $\varphi(11)$ не могло удалиться ни одно из подчеркнутых вхождений буквы b_2 в силу инъективности отображения φ . Если удалилось подчеркнутое вхождение b_1 , то $\varphi(11) = Ab_2b_2B$. Теперь допустим, что удалялась буква из подслова A , то есть $A = A_1cA_2$ и $\varphi(11) = A_1A_2b_2b_1b_2B$.

Из условия $\varphi(11)\varepsilon Ab_2B$ видно, что при переходе от $\varphi(11)$ к Ab_2B может удаляться лишь буква из подслова $A_1A_2b_2b_1$. Если удалить b_1 , то получаем, что

$$A_1A_2b_2b_2B = A_1cA_2b_2B.$$

Отсюда по лемме 2

$$c = b_2, \quad A_2 = b_2^k, \quad k \geq 0, \quad A = b_2^{k+1}$$

и $\varphi(11) = Ab_1b_2B$, что противоречит инъективности φ .

Пусть удалено b_2 . Тогда

$$A_1A_2b_1b_2B = A_1cA_2b_2B$$

и

$$c = b_1, \quad A_2 = b_1^k, \quad k \geq 0, \quad A = A_1b_1^{k+1}, \quad \varphi(11) = A_1b_1^kb_2b_1b_2B.$$

Пусть удалена еще одна буква из A . Тогда $A = A'_1dA''_1cA_2$ или $A = A_1cA'_2dA''_2$, где d — вторая удаляемая из A буква. В этих случаях соответственно получаем, что

$$(1) \quad \varphi(11) = A'_1dA''_1A_2b_2b_1b_2B \text{ и } A'_1A''_1A_2b_2b_1 = A'_1dA''_1cA_2,$$

$$(2) \quad \varphi(11) = A_1A'_2dA''_2b_2b_1b_2B \text{ и } A_1A'_2A''_2b_2b_1 = A_1cA'_2dA''_2.$$

В случае 1 находим, что $A'_1 = d^k$, $k \geq 0$, и $A_2b_2b_1 = dcA_2$. Отсюда, по лемме 2,

$$A_2 = (b_2b_1)^l, \quad l \geq 0, \quad b_2 = d, \quad b_1 = c$$

или

$$A_2 = b_1(b_2b_1)^l, \quad l \geq 0, \quad b_1 = d, \quad b_2 = c.$$

Аналогично в случае 2

$$A'_2 = c^k, \quad k \geq 0, \quad A''_2 = (b_2b_1)^l, \quad c = b_2, \quad d = b_1$$

или

$$A''_2 = b_1(b_2b_1)^l, \quad c = b_1, \quad d = b_2.$$

В итоге для $\varphi(11)$, кроме требуемого значения Ab_2b_2B , имеются пока еще пять возможностей. Запишем их в более простом виде и в несколько ином порядке:

$$(1) \quad A = A'b_1, \quad \varphi(11) = A'b_2b_1b_2B,$$

$$(2) \quad A = A'(b_2b_1)^{l+1}, \quad \varphi(11) = A'b_2(b_2b_1)^{l+1}b_2B, \quad l \geq 0,$$

$$(3) \quad A = A'(b_2b_1)^{l+1}, \quad \varphi(11) = A'b_1(b_2b_1)^{l+1}b_2B, \quad l \geq 0,$$

$$(4) \quad A = A'(b_1b_2)^{l+1}b_1, \quad \varphi(11) = A'b_2(b_1b_2)^{l+2}B, \quad l \geq 0,$$

$$(5) \quad A = A'(b_1b_2)^{l+1}b_1, \quad \varphi(11) = A'b_1(b_1b_2)^{l+2}B, \quad l \geq 0.$$

Кроме того, в силу симметрии имеются еще 5 возможностей для $\varphi(11)$, связанных с удалением букв из первой части слова $Ab_2b_1b_2B$.

Докажем, что выписанные варианты 1–5 ведут к противоречию. Предварительно заметим, что варианты 4, 5 являются частными видами соответственно вариантов 1, 3. Поэтому далее достаточно рассмотреть варианты 1–3. Для приведения к противоречию мы в каждом случае будем находить последовательно слова $\varphi(110)$, $\varphi(011)$, $\varphi(1101)$, $\varphi(1011)$, $\varphi(111)$.

Проведем это подробно, например, для варианта 2. При этом будем пока считать, что для элементов 0, 1 выполняется условие 1° , т. е.

$$\varphi(01) = Ab_1b_2B, \quad \varphi(10) = Ab_2b_1B.$$

Так как $110\varepsilon 10$ и $110\varepsilon 11$, по свойству (2) для φ

$$\varphi(110)\varepsilon A'b_2(b_2b_1)^{l+1}b_2B_1, A'(b_2b_1)^{l+1}b_2b_1B.$$

Отсюда, по лемме 2,

$$\varphi(110) = A'b_2(b_2b_1)^{l+2}B$$

или

$$\varphi(110) = A'b_2(b_1b_2)^{l+2}B = Ab_2b_1b_2B.$$

Последнее равенство противоречит инъективности φ , поскольку $Ab_2b_1b_2B = \varphi(101)$, остается первое.

Аналогично из $011\varepsilon 01, 11$ находим, что

$$\varphi(011) = A'b_2(b_2b_1)^{l+1}b_1b_2B.$$

Так как $1101\varepsilon 110$ и $1101\varepsilon 111$, то

$$\varphi(1101)\varepsilon A'b_2(b_2b_1)^{l+2}B, A'(b_2b_1)^{l+1}b_2b_1b_2B.$$

Отсюда, по лемме 2,

$$\varphi(1101) = A'(b_2b_1)^{l+3}b = Ab_2b_1b_2b_1B \text{ или } A'b_2(b_2b_1)^{l+2}b_2B. \quad (24)$$

Аналогично из соотношений $1011\varepsilon 101$ и $1011\varepsilon 011$ получим, что

$$\varphi(1011) = Ab_2b_1b_1b_2B \text{ или } A'b_2(b_2b_1)^{l+2}b_2B. \quad (25)$$

Заметим, что в силу леммы 2

$$\{\varphi(1010), \varphi(0101)\} \subset \{Ab_2b_1b_2b_1B, Ab_1b_2b_1b_2B\},$$

поскольку $1010\varepsilon 010$, $1010\varepsilon 101$, $0101\varepsilon 101$ и $0101\varepsilon 101$.

С учетом этого факта из (24), (25) получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(1101) &= A'b_2(b_2b_1)^{l+2}b_2B, \\ \varphi(1011) &= Ab_2b_1b_1b_2B. \end{aligned}$$

Из последних равенств, учитывая, что $1101\varepsilon 111$ и $1011\varepsilon 111$, с использованием леммы 2 находим, что

$$\varphi(111) = Ab_2b_1b_2B$$

или

$$\varphi(111) = A'b_2(b_2b_1)^{l+1}b_1b_2B.$$

В первом случае $\varphi(111) = \varphi(101)$, во втором $\varphi(111) = \varphi(011)$. Получили противоречие с инъективностью φ .

Из проведенных рассуждений видно, что смена условия 1° для элементов 0, 1 на условие 2° приведет к перестановкам слов $\varphi(011), \varphi(110), \varphi(1011), \varphi(1101)$. Противоречие же сохранится.

Таким образом, доказано, что $\varphi(11) = Ab_2b_2B$.

Из соображений симметрии можно заключить, что $\varphi(00) = Ab_1b_1B$.

Заметим, что в силу симметрии к противоречию приведут и не выписанные нами значения $\varphi(11)$, полученные из слова $Ab_2b_1b_2B$ удалением букв подслова B .

(b) $\varphi(101) = Ab_1b_2b_1B$, $\varphi(010) = Ab_2b_1b_2B$.

Будем искать $\varphi(11)$, исходя из соотношений

$$Ab_1b_2b_1B\varepsilon\varphi(11)\varepsilon\varphi(1) = Ab_2B.$$

Если при переходе от $Ab_1b_2b_1B$ к $\varphi(11)$ удалялось одно из подчеркнутых вхождений буквы b_i , то при $i = 1$ получится противоречие с инъективностью φ , а при $i = 2$ с условием

$$\varphi(11)\varepsilon Ab_2B. \quad (26)$$

Пусть удалялась буква из подслова A . Тогда из соотношения (26) следует, что при переходе от $\varphi(11)$ к Ab_2B должна удаляться буква из подслова B . Таким образом,

$$A = A_1c_1A_2, \quad B = B_1c_2B_2, \quad \varphi(11) = A_1A_2b_1b_2b_1B, \quad \varphi(1) = A_1A_2b_1b_2b_1B_1B_2.$$

Отсюда следует, что

$$A_1A_2b_1 = A_1c_1A_2, \quad B_1c_2B_2 = b_1B_1B_2,$$

и потому

$$c_1 = b_1, \quad A_2 = b_1^k, \quad c_2 = b_1, \quad B_1 = b_1^l, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(11) = (A_1b_1^kb_1)b_2(b_1B) = Ab_2b_1B,$$

что противоречит инъективности φ .

Из симметрии следует, что к противоречию придем и в том случае, когда при переходе от $Ab_1b_2b_1B$ сначала удаляется буква из B , затем из A .

Этим рассмотрение случая I закончено, поскольку индукция от слов длины 2 ко всем словам для этого случая проведена при доказательстве теоремы 1.

II. Элементы 0, 1 удовлетворяют условию 3°. В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= Ab_1(b_2b_1)^rB, & \varphi(1) &= Ab_2(b_1b_2)^rB, & r > 0, \\ \varphi(01) &= A(b_1b_2)^{r+1}B, & \varphi(10) &= A(b_2b_1)^{r+1}B. \end{aligned}$$

Здесь из леммы 2 следует, что

$$\{\varphi(010), \varphi(101)\} = \{Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B, Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B\}.$$

В связи с этим рассмотрим два подслучая.

$$(a) \varphi(010) = Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B, \varphi(101) = Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B.$$

В этом случае, как и в случае I, сначала необходимо найти $\varphi(11), \varphi(00)$. Будем искать $\varphi(11)$ из условий

$$\varphi(101) = \underline{Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B} \varepsilon \varphi(11) \varepsilon Ab_2(b_1b_2)^r B = \varphi(1). \quad (27)$$

Если при переходе от $Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B$ к $\varphi(11)$ удалить первую или последнюю букву слова $\underline{b_2(b_1b_2)^{r+1}}$, то придем к противоречию с инъективностью φ . Значит, в подслове $b_2(b_1b_2)^{r+1}$ может быть удалена лишь какая-то внутренняя буква. При этом $\varphi(11)$ будет принимать одно из значений

$$\varphi(11) = Ab_2(b_1b_2)^s b_1(b_1b_2)^t \text{ или } Ab_2(b_1b_2)^s b_2(b_1b_2)^t B, \quad (28)$$

где $s + t + r > 0$.

Если же удаляется буква из подслова A , то, как следует из условия

$$\varphi(11) \varepsilon Ab_2(b_1b_2)^r B,$$

при переходе от $\varphi(11)$ к $Ab_2(b_1b_2)^r B$ должна будет удаляться некоторая буква из слова Ab_2b_1 . Здесь мы находимся точно в таких же условиях, что и в случае I(a) с той лишь разницей, что здесь вместо слова B из I(a) выступает слово $(b_1b_2)^r B$.

Поэтому здесь мы получим сходные возможности 1'–5'. Для их описания достаточно в 1–5 заменить B на $(b_1b_2)^r B$. Далее по той же схеме, что и в I(a), все эти варианты для $\varphi(11)$ исключаются приведением к противоречию с инъективностью φ .

Таким образом, для $\varphi(11)$ остаются лишь значения из (28). Допустим, что имеет место первое равенство из (28). Тогда из условий $110\varepsilon 10$, $110\varepsilon 11$ и $011\varepsilon 01$, $011\varepsilon 11$ находим, что

$$\varphi(110) = A(b_2b_1)^s b_2b_1b_1(b_2b_1)^t B, \quad \varphi(011) = A(b_1b_2)^s b_1b_2b_1(b_1b_2)^t B. \quad (29)$$

Так как $11011\varepsilon 011$ и $11011\varepsilon 110$, система уравнений

$$x\varepsilon\varphi(110), \quad x\varepsilon\varphi(011)$$

разрешима. Однако из (29) видно, что это возможно лишь при $t = 0$. Однако при $t = 0$ получим равенство $\varphi(011) = \varphi(010)$, противоречащее инъективности φ .

Таким образом, $\varphi(11)$ может иметь лишь следующий вид:

$$\varphi(11) = Ab_2(b_1b_2)^s b_2(b_1b_2)^t B, \quad s + t > 0.$$

Отсюда по симметрии $\varphi(00)$ имеет вид

$$\varphi(00) = Ab_1(b_2b_1)^l b_1(b_2b_1)^m B, \quad l + m > 0.$$

Докажем еще, что $s = l$. Допустим, что $s > l$, то есть $s = l + k$, $k > 0$, и тогда $m = t + k$. Составим таблицу значений слов $\varphi(P)$ для некоторых слов P длины 3 (по использованной выше методике). Получим следующую таблицу:

P	$\varphi(P)$
100	$A(b_2b_1)^l b_2b_1(b_1b_2)^k b_1(b_2b_1)^t B$
101	$A(b_2b_1)^l b_2b_1(b_2b_1)^k b_2(b_1b_2)^t B$
110	$A(b_2b_1)^l (b_2b_1)^k b_2b_2b_1(b_2b_1)^t B$
111	$A(b_2b_1)^l (b_2b_1)^k b_2b_2b_2(b_1b_2)^t B$

Теперь, пользуясь этой таблицей, находим, что

$$\begin{aligned}\varphi(1101) &= A(b_2b_1)^l(b_2b_1)^kb_2b_2b_1b_2(b_1b_2)^tB = Q_1, \\ \varphi(1100) &= A(b_2b_1)^lb_2b_1(b_1b_2)^kb_2b_1(b_2b_1)^tB = Q_2, \\ \varphi(1110) &= A(b_2b_1)^l(b_2b_1)^kb_2b_2b_2b_1(b_2b_1)^tB = Q_3.\end{aligned}$$

Так как

$$1101, 1100, 1110 \in \varepsilon(11010),$$

должны выполняться соотношения

$$\varphi(11010)\varepsilon Q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Однако нетрудно заметить, что не существует слова $x \in \Omega_1^*$, удовлетворяющего условию

$$x\varepsilon Q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Полученное противоречие доказывает, что $s \leq l$. Из симметричных соображений получим, что $l \leq s$ и, значит, $s = l$.

В итоге для слов длины 2 имеем таблицу:

P	$\varphi(P)$
00	$A(b_1b_2)^sb_1b_1(b_2b_1)^tB$
01	$A(b_1b_2)^sb_1b_2(b_1b_2)^tB$
10	$A(b_2b_1)^sb_2b_1(b_2b_1)^tB$
11	$A(b_2b_1)^sb_2b_2(b_1b_2)^tB$

Из этой таблицы видно, что для любого $P = a_1a_2 \in \Omega^2$ имеет место формула

$$\varphi(a_1a_2) = A((a_1\bar{a}_1)^sa_1a_2(\bar{a}_2a_2)^t)^\sigma B, \quad (30)$$

где $\sigma(0) = b_1$, $\sigma(1) = b_2$.

Теперь индукцией по $d(P)$ докажем, что в рассматриваемом случае для любого слова $P = a_1a_2 \dots a_n \in \Omega^*$, $n \geq 1$, справедлива формула

$$\varphi(a_1a_2 \dots a_n) = A((a_1\bar{a}_1)^sa_1a_2 \dots a_n(\bar{a}_na_n)^t)^\sigma B. \quad (31)$$

Для $d(P) = 2$ формула (31) совпадает с формулой (30) и, значит, доказана. Индуктивный переход от n к $n + 1$ осуществляется по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1, и его детализация здесь не приводится.

Для пустого слова Λ образ $\varphi(\Lambda)$ определяется из условий $0\varepsilon\Lambda$, $1\varepsilon\Lambda$ в двух вариантах (согласно лемме 2):

$$\varphi(\Lambda) = A(b_1b_2)^{s+t}B, \quad \varphi(\Lambda) = A(b_2b_1)^{s+t}B,$$

и оба они возможны, поскольку слово $\varphi(\Lambda)$ нигде в доказательстве не использовалось.

Заметим, что найденный класс отображений из $G(\Omega, \Omega_1, \varepsilon)$ охватывается множеством преобразований из теоремы 2.

Теперь рассмотрим случай (b):

$$\varphi(010) = Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B, \quad \varphi(101) = Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B.$$

Здесь слово $\varphi(11)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(101) = Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B\varepsilon\varphi(11)\varepsilon Ab_2(b_1b_2)^rB = \varphi(1).$$

Если при переходе от слова $\varphi(101)$ к $\varphi(11)$ удалить первую или последнюю букву подчеркнутого слова, то получится противоречие с инъективностью φ .

Если удалить внутреннюю букву подчеркнутого слова, то получаем противоречие с условием $\varphi(11)\varepsilon\varphi(1)$.

Если удалить букву из начального подслова A , то при переходе от $\varphi(11)$ к $\varphi(1)$ необходимо будет удалить букву из подслова B . В этом случае

$$A = A_1cA_2, \quad B = B_1dB_2, \quad A_1A_2b_1 = AcA_2, \quad b_1B_1B_2 = B_1dB_2.$$

Отсюда находим, что

$$c_1 = b_1, \quad A_2 = b_1^k, \quad d = b_1, \quad B_1 = b_1^l$$

и

$$\varphi(11) = A(b_2b_1)^{r+1}B \text{ или } \varphi(11) = A(b_1b_2)^{r+1}B.$$

Получили противоречие с инъективностью φ .

Таким образом, случай II(b) невозможен.

III. Элементы 0, 1 удовлетворяют условию 4°. Пусть

$$\varphi(0) = Ab_1(b_2b_1)^rB, \quad \varphi(1) = Ab_2(b_1b_2)^rB, \quad r > 0, \quad (32)$$

$$\varphi(01) = A(b_2b_1)^{r+1}B, \quad \varphi(10) = A(b_1b_2)^{r+1}B. \quad (33)$$

Здесь, как и в случае II, логически возможны два подслучая

$$(a) \quad \varphi(010) = Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B, \quad \varphi(101) = Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B,$$

$$(b) \quad \varphi(010) = Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B, \quad \varphi(101) = Ab_1(b_2b_1)^{r+1}B.$$

Случай III(b) в части отыскания $\varphi(11)$ получается из II(b) заменой b_1 на b_2 и b_2 на b_1 . Поэтому он также приводится к противоречию.

Рассмотрим случай III(a). Здесь $\varphi(11)$ находится из условия

$$\varphi(101) = Ab_2(b_1b_2)^{r+1}B\varepsilon\varphi(11)\varepsilon Ab_2(b_1b_2)^rB = \varphi(1),$$

полностью совпадающего с условием (27).

Поэтому, как и в случае II(a),

$$\varphi(11) = Ab_2(b_1b_2)^sb_2(b_1b_2)^tB, \quad \varphi(00) = Ab_1(b_2b_1)^sb_1(b_2b_1)^tB,$$

где $s+t > 0$. Отсюда и из (32) видно, что здесь для слов $P = a_1a_2$ длины 2 имеет место формула $\varphi(a_1a_2) = A(\mu((a_1\bar{a}_1)^sa_1a_2(\bar{a}_2a_2)^t))^{\sigma}B$. Теперь индукцией по длине слова доказывается и общая формула $\varphi(a_1a_2 \dots a_n) = A(\mu((a_1\bar{a}_1)^sa_1a_2 \dots a_n(\bar{a}_na_n)^t))^{\sigma}B$.

В итоге получили еще один класс отображений из теоремы 2. Остальные классы аналогичным образом получаются при рассмотрении случаев, когда элементы 0, 1 удовлетворяют условию 5° или 6°.

Список литературы

1. Бабаш А. В., Глухов М. М., Шанкин Г. П. О преобразованиях множества слов в конечном алфавите, не размножающих искажений. *Дискретная математика* (1997) 9, №3, 3–19.

Статья поступила 30.09.1998.