Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Мухин, Оценки локальных вероятностей сверток дискретных распределений, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 2, 103–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 04:38:14

УДК 519.21

Оценки локальных вероятностей сверток дискретных распределений

© 1999 г. А. Б. Мухин

Для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным числом возможных значений изучается асимптотическое поведение максимума вероятностей отдельных значений с ростом числа слагаемых. Рассматриваются малоизученные случаи, когда распределение слагаемых нерешетчато или зависит от числа слагаемых (схема серий).

Пусть $G(s)$ — класс распределений F вещественных случайных величин (с. в.) с s значениями;

$$P_n(F, m) = F^{*n}(m) = \mathbf{P}\{S_n = m\},$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

X_k — независимые для $k = 1, \dots, n$ с. в. с распределением F . Работа посвящена оценкам величин

$$P_n(F) = \sup_{m \in \mathbf{R}} P_n(F, m).$$

Хорошо известны общие неравенства для функций концентрации сумм независимых с. в. и $P_n(F)$ (см. [1–3] и др.). Однако, эти неравенства при $F \in G(s)$ дают порядок убывания $O(n^{-1/2})$, в том числе для F , зависящих от n . Это, конечно, далеко от экстремального порядка убывания, как будет видно из дальнейшего. Б. А. Рогозиным [4] получены точные неравенства для $P_n(F)$ с помощью сверток соответствующих равновероятных распределений. Легко заметить, что и с помощью этих неравенств для $F \in G(s)$ можно получить лишь оценки порядка $O(n^{-1/2})$. Некоторые результаты с более высоким, чем $n^{-1/2}$, порядком убывания имеются в [5, 6].

Пусть a_i — возможные значения с. в. X_k с распределением $F \in G(s)$ и

$$p_i = F(a_i) = \mathbf{P}\{X_k = a_i\}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Будем считать (это, очевидно, не ограничивает общности постановки задачи), что

$$a_1 = 0, \quad p_1 = \max_{1 \leq k \leq n} p_k, \quad |a_{i+1}| \geq |a_i|. \quad (1)$$

Очень просто решается вопрос об экстремальном порядке убывания $P_n(F)$. Положим

$$P_{ns} = \inf_{F \in G(s)} P_n(F).$$

Теорема 1. Для любого $s \in \mathbf{N}$ при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$P_{ns} = \sqrt{2\pi}(2\pi s)^{-s/2} n^{-(s-1)/2} + o(n^{-(s-1)/2}).$$

Доказательство. Выражая $P_n(F, m)$ с помощью полиномиальных вероятностей

$$P_n(m_1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s) = n! \prod_{i=1}^s \frac{1}{m_i!} p_i^{m_i}$$

и считая $0^0 = 1$, получим, что

$$\begin{aligned} P_{ns} &= \inf_{F \in G(s)} \sup_{m \in \mathbf{R}} \sum_{a_1 m_1 + \dots + a_s m_s = m} P_n(m_1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s) \\ &\geq \inf_{p_1 + \dots + p_s = 1} \sup_{m_1 + \dots + m_s = n} P_n(m_1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s). \end{aligned}$$

С другой стороны, как легко заметить, для F таких, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 > n, \dots, a_s > na_{s-1}$,

$$P_n(F) = \sup_{m_1 + \dots + m_s = n} P_n(m_1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s).$$

Следовательно, для любых $n \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$

$$P_{ns} = \inf_{p_1 + \dots + p_s = 1} \sup_{m_1 + \dots + m_s = n} P_n(m_1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s). \quad (2)$$

Пусть

$$P_n(F) = P_n(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s; p_1, \dots, p_s),$$

то есть $\bar{m}_i = \bar{m}_i(n, p_1, \dots, p_s)$ — точки, где достигается супремум.

Используя формулу

$$\frac{P_n(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s)}{P_n(m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_j + 1, \dots, m_s; p_1, \dots, p_s)} = \frac{p_i(m_j + 1)}{p_j m_i},$$

легко показать, что $\bar{m}_i$ отличаются от np_i не более чем на s . Следовательно, для любых $p_i \in (0, 1)$

$$|\bar{m}_i - np_i| = O(\sqrt{np_i(1 - p_i)})$$

и эти точки находятся в зоне действия локальной предельной теоремы для полиномиальной схемы. Поэтому

$$\begin{aligned} P_n(F) &= \sup_{m_1 + \dots + m_s} \frac{(2\pi n)^{-(s-1)/2}}{\sqrt{p_1 \dots p_s}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^s \frac{(m_i - np_i)^2}{2np_i} \right\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{(2\pi n)^{-(s-1)/2}}{\sqrt{p_1 \dots p_s}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая непрерывность $P_n(F)$ как функции от p_i , легко получаем утверждение теоремы.

Переходя к общим оценкам для $P_n(F)$, положим

$$B_n^2 = n\mathbf{D}X_1, \quad M_n^2 = n\mathbf{M}X_1^2, \\ M_n(u) = n \sum_{i: |a_i| \leq u} a_i^2 p_i.$$

Мы сохраняем эти обозначения и в случае, когда распределение F (то есть a_i и p_i , $i = 1, \dots, s$) зависит от n . Введем также обозначение

$$B_n^2(u) = n \int_{|x| \leq u} x^2 F^*(dx),$$

где F^* — распределение симметризованных слагаемых X_k^* , $k = 1, \dots, n$. При предположениях (1) относительно F

$$\mathbf{P}\{X_k^* = a_i\} \geq p_i p_1 \geq \frac{p_i}{s},$$

поэтому

$$B_n^2(u) \geq \frac{1}{s} M_n^2(u), \quad B_n^2 \geq \frac{1}{2s} M_n^2. \quad (3)$$

Отметим также, что $B_n^2 \leq M_n^2$.

Теорема 2. Пусть $u_0, u_1, \dots, u_r$ — произвольный набор положительных чисел. Тогда при $r \geq 1$

$$P_n(F) \leq \frac{(c\sqrt{s})^{r+1} u_0}{M_n(u_r)} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{u_i}{M_n(u_{i-1})}\right), \quad (4)$$

при $r = 0$

$$P_n(F) \leq \frac{cu_0\sqrt{s}}{M_n(u_0)}, \quad (5)$$

здесь и далее c — положительные абсолютные постоянные, вообще говоря, различные.

Неравенство (5) аналогично неравенствам из теоремы 3.2 в [2] или теоремы 2 из [5]. Прежде чем давать доказательство теоремы 2, приведем некоторые следствия, иллюстрирующие схему использования неравенства (4).

Следствие 1. Если при каких либо $\alpha_i \in (0, 1]$

$$|a_{i+1}| \geq \alpha_{i+1} M_n(a_i/\alpha_i)$$

для $i = 2, \dots, s-1$, то

$$P_n(F) \leq \frac{(c\sqrt{s})^{s-1}}{\prod_{i=2}^s \alpha_i \sqrt{p_i}} n^{-(s-1)/2}. \quad (6)$$

Доказательство. Положим в теореме 2

$$u_i = |a_{i+2}|/\alpha_{i+2}, \quad i = 0, \dots, s-2, \quad r = s-2,$$

тогда $u_{i+1} \geq M_n(u_i)$ и

$$P_n(F) \leq \frac{(c\sqrt{s})^{s-1} 2^{s-2} \prod_{i=0}^{s-2} u_i}{\prod_{i=1}^{s-1} M_n(u_{i-1})} \leq \frac{(c\sqrt{s})^{s-1} \prod_{i=0}^{s-2} u_i}{\prod_{i=1}^{s-1} M_n(a_{i+1})} \leq \frac{(c\sqrt{s})^{s-1} \prod_{i=0}^{s-2} a_{i+2}/\alpha_{i+2}}{\prod_{i=1}^{s-1} a_{i+1} \sqrt{np_{i+1}}},$$

откуда следует (6).

Следствие 2. Для любого $u_0 > 0$ и натурального r справедливы неравенства

$$P_n(F) \leq \frac{(c\sqrt{s})^{r+1} u_0}{M_n(M_n \dots M_n(u_0) \dots)}, \quad (7)$$

где в знаменателе стоит r -кратная итерация функции $M_n(u)$.

Неравенство (7) следует из (4), если положить $u_i = M_n(u_{i-1})$ для $i = 1, \dots, r$. Полагая $u_i = \beta_i M_n(u_{i-1})$ с $\beta_i > 0$, из (4) получаем неравенство

$$P_n(F) \leq \frac{(c\sqrt{s})^{r+1} u_0 \prod_{i=1}^r (1 + \beta_i)}{M_n(\beta_r M_n(\dots \beta_1 M_n(u_0) \dots))}, \quad (8)$$

которое может оказаться более полезным, чем (7). Если, например,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = n^\alpha, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1/3,$$

то из (8) с

$$r = u_0 = 1, \quad \beta_1 = \sqrt{3}n^{\alpha-1/2}$$

получим, что

$$P_n(F) \leq \begin{cases} cn^{-1} & \text{при } \alpha \geq 1/2, \\ cn^{-\alpha-1/2} & \text{при } 0 < \alpha \leq 1/2. \end{cases}$$

Из (5) и (7) при $\alpha \geq 1/2$ можно получить лишь оценку $P_n(F) = O(1/\sqrt{n})$.

Доказательство теоремы 2. Будем обозначать $f(X, t)$ характеристическую функцию X и $f_n(t) = f(S_n, t)$. В силу известной формулы обращения (см. например теорему 3.2.3 в [7])

$$P_n(F) \leq \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{|t| \leq T} |f_n(t)| dt.$$

Разбивая область интегрирования и считая T кратным $1/u_0$, получаем неравенство

$$P_n(F) \leq u_0 \sup_{D \in R} \int_D^{D+1/u_0} |f_n(t)| dt.$$

Вновь разбиваем область интегрирования и используем теорему о среднем:

$$\begin{aligned} P_n(F) &\leq u_0 \sup_D \sum_{r=0}^{[u_1/u]} \int_{D+r/u_1}^{D+(r+1)/u_1} |f_n(t)| dt \\ &\leq u_0 \left(\sup_D \int_D^{D+1/u_1} |f_n(t)|^{1/2} dt \right) \sup_{r=0}^{[u_1/u_0]} |f_n(t_r)|^{1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где второй супремум берется по всем $D \in \mathbf{R}$ и $t_r \in [D + r/u_1, D + (r+1)/u_1]$, причем можно считать, что все $t_r \in [D, D + 1/u_0]$.

Далее существенную роль будут играть оценки характеристических функций сумм в среднем. Положим

$$\begin{aligned} I_n(\Delta, \beta) &= \sup_D \int_D^{D+\Delta} |f_n(t)|^\beta dt, \\ \Sigma_n(\Delta, \delta, \beta) &= \sup_D \sup_{\{t_r\}} \sum_{r=0}^{[\Delta/\delta]} |f_n(t_r)|^\beta. \end{aligned}$$

где верхняя грань берется по $D \in \mathbf{R}$ и всем $t_r \in [D + r\delta, D + (r+1)\delta]$, причем $t_r \in [D, D + \Delta]$.

В [8] доказана оценка

$$I_n(\Delta, \beta) \leq \frac{3\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\beta}B_n(1/\Delta)}. \quad (10)$$

Аналогичным путем оценим $\Sigma_n(\Delta, \delta, \beta)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= |f(X_1, t)|^n \leq \exp \left\{ -\frac{n}{2}(1 - |f(X_1, t)|^2) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2} \int (1 - \cos tx) F^*(dx) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -n \int_{|x| \leq 1/\Delta} \sin^2 \frac{tx}{2} F^*(dx) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для $t_r = D + (r + \theta_r)\delta \in [D, D + \Delta]$, где $\theta_r \in [0, 1]$, учитывая периодичность функции $\sin^2 z$, находим, что

$$\begin{aligned} h(t_r, \Delta) &= \int_{|x| \leq 1/\Delta} \sin^2 \frac{t_r x}{2} F^*(dx) = \int_{|x| \leq 1/\Delta} \sin^2(Dx/2 + (r + \theta_r)\delta x/2) F^*(dx) \\ &= \int_{|x| \leq 1/\Delta} \sin^2(v + (r + \theta_r)\delta x/2) F^*(dx), \end{aligned}$$

где $v = v(x, D)$, но $|v| \leq \pi/2$ и v не зависит от r . Для $0 < (r + \theta_r)\delta \leq \Delta$ и $|x| \leq 1/\Delta$

$$|v + (r + \theta_r)\delta x/2| \leq \frac{\pi + 1}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} h(t_r, \Delta) &\geq c \int_{|x| \leq 1/\Delta} \left(v + \frac{(r + \theta_r)\delta x}{2} \right)^2 F^*(dx) \\ &= c \left(B_1^2(1/\Delta) \left(\frac{(r + \theta_r)\delta}{2} + B_1^{-2}(1/\Delta) \int_{|x| \leq 1/\Delta} vx F^*(dx) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x| \leq 1/\Delta} v^2 F^*(dx) - B_1^{-2}(1/\Delta) \left(\int_{|x| \leq 1/\Delta} vx F^*(dx) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши к

$$\int_{|x| \leq 1/\Delta} vx F^*(dx),$$

получим, что

$$h(t_r, \Delta) \geq c B_1^2(1/\Delta) ((r + \theta_r)\delta/2 + A)^2,$$

где

$$A = B_1^{-2}(1/\Delta) \int_{|x| \leq 1/\Delta} vx F^*(dx) = A(F, D, \Delta),$$

но A не зависит от r . Из (11) и последней оценки следует, что

$$\Sigma_n(\Delta, \delta, \beta) \leq \sup_D \sup_{\{t_r\}} \sum_{r=0}^{[\Delta/\delta]} \exp\{-c\beta B_n^2(1/\Delta)((r + \theta_r)\delta/2 + A)^2\}.$$

Используя свойства функции $\exp\{-cx^2\}$, находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\Delta, \delta, \beta) &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \exp\{-c\beta B_n^2(1/\Delta)j^2\delta^2\} \\ &\leq 2 + 2 \int_0^{\infty} \exp\{-c\beta\delta^2 B_n^2(1/\Delta)x^2\} dx \\ &\leq 2 + \frac{c}{\sqrt{\beta}\delta B_n(1/\Delta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $\beta > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$

$$\Sigma_n(\Delta, \delta, \beta) \leq c \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}\delta B_n(1/\Delta)} \right). \quad (12)$$

Из (9), (12) и (3) получаем оценки

$$\begin{aligned} P_n(F) &\leq u_0 I_n(1/u_1, 1/2) \sum_n (1/u_0, 1/u_1, 1/2) \\ &\leq cu_0 I_n(1/u_1, 1/2) (1 + \sqrt{2}u_1/B_n(u_0)) \\ &\leq c\sqrt{s}u_0 I_n(1/u_1, 1/2) (1 + u_1/M_n(u_0)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, разбивая область интегрирования в $I_n(1/u_1, 1/2)$ и повторяя эту процедуру r раз, получим, что

$$P_n(F) \leq (c\sqrt{s})^r u_0 I_n(1/u_r, 1/2^r) \prod_{i=1}^r (1 + u_i/M_n(u_{i-1})).$$

Для доказательства (4) осталось использовать (10) и (3). Доказательство (5) очевидно.

Для фиксированных (не зависящих от n) решетчатых распределений F асимптотическое поведение $P_n(F, m)$ и $P_n(F)$ хорошо изучено (см., например, [9] и имеющуюся там библиографию). Рассмотрим случай фиксированных не обязательно решетчатых $F \in G(s)$.

Теорема 3. Если среди $a_2, a_3, \dots, a_s$ имеется ν значений $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\nu}$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} m_j a_{i_j} \neq 0$$

для любых целых m_j не равных нулю одновременно (то есть a_i являются линейно независимыми элементами векторного пространства размерности, не меньшей ν , над полем целых чисел), то

$$P_n(F) = O(n^{-\nu/2}).$$

В данном случае можно описать поведение $P_n(F)$ и $P_n(F, m)$ более точно. Теорема 3 легко получается из приводимого ниже утверждения.

Пусть для $i = 2, \dots, s$

$$a_i = \sum_{j=1}^{\nu} r_{ij} h_j, \quad (13)$$

где h_j — некоторые вещественные числа, $h_j \neq 0$, $r_{ij} \in \mathbf{Z}$, $\nu = 1, \dots, s-1$, причем ν — минимальное число, при котором существует такое представление ($\nu = 1$ соответствует случаю решетчатых распределений). Рассмотрим ν -мерный случайный вектор $\bar{X}$ с целочисленными компонентами такой, что $\mathbf{P}\{\bar{X} = \bar{r}_i\} = p_i$, где $\bar{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{i\nu})$ для $i \geq 2$ и $\bar{r}_1 = (0, \dots, 0)$. Пусть Q — матрица ковариаций вектора $\bar{X}$ и

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_\nu) : |x|_i \leq 1/2, |x| > 0\}$$

— ν -мерный куб без центральной точки.

Теорема 4. Если для любого $d \in \Omega$ существует $i = 2, \dots, s$ такое, что $(\bar{r}_i, d) \in \mathbf{Z}$, то для

$$m = \sum_{j=1}^{\nu} m_j h_j, \quad m_j \in \mathbf{Z},$$

справедлива оценка

$$P_n(F, m) = n^{-\nu/2} \varphi_Q \left(\frac{\bar{m} - n \mathbf{M} \bar{X}}{\sqrt{n}} \right) + o(n^{-\nu/2}), \quad (14)$$

где $\bar{m} = (m_1, \dots, m_\nu)$, φ_Q — плотность ν -мерного нормального закона с нулевым средним и матрицей ковариаций Q . Соотношение (14) выполняется равномерно по всем m с целыми компонентами. Отсюда,

$$P_n(F) = (2\pi n)^{-\nu/2} (\det Q)^{-1/2} + o(n^{-\nu/2}).$$

При $\nu = 1$ условие теоремы эквивалентно требованию, чтобы h_1 было максимальным шагом решетчатых случайных величин X_k , так что в этом случае получаем классическую локальную предельную теорему для решетчатых случайных величин.

Доказательство. В силу минимальности ν в выражении (13) представление

$$m = \sum_{j=1}^{\nu} m_j h_j,$$

как легко проверить, является единственным, то есть из

$$\sum_{j=1}^{\nu} m_j h_j = \sum_{j=1}^{\nu} m'_j h_j$$

следует, что $m_j = m'_j$ для любого $j = 1, \dots, \nu$. Поэтому

$$P_n(F, m) = \mathbf{P} \left\{ S_n = \sum_{j=1}^{\nu} m_j h_j \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n \bar{X}_k = \bar{m} \right\},$$

где $\bar{X}_k$ — независимые случайные ν -мерные векторы с тем же распределением, что у $\bar{X}$. Поскольку распределение

$$n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^n \bar{X}_k - n \mathbf{M} \bar{X}_1 \right)$$

слабо сходится к нормальному с нулевым средним и матрицей ковариаций Q , доказательство (14) сводится к проверке справедливости локальной предельной теоремы для $\{\bar{X}_k\}$. Из теоремы 1 работы [9] следует, что локальная предельная теорема в случае одинаково распределенных случайных величин (в том числе и многомерных) эквивалентна выполнению интегральной предельной теоремы и условия

$$H(\bar{X}_1, d) = M \langle (\bar{X}_1^*, d) \rangle^2 > 0 \quad (15)$$

для $d \in \Omega$, где $\bar{X}_1^*$ — симметризованная случайная величина $\bar{X}_1$, $\langle \cdot \rangle$ — расстояние до ближайшего целого числа. Последнее условие эквивалентно в свою очередь равенству единице максимального шага распределения.

В наших предположениях (15) означает, что

$$\sum_{i,j} p_i p_j \langle ((\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_j), d) \rangle^2 > 0,$$

то есть для любого $d \in \Omega$ существуют i и j , $i \neq j$, такие, что $((\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_j), d)$ не целое, что эквивалентно условию теоремы.

Замечание. Если

$$\sum_{j=2}^s l_j a_j \neq 0$$

для любых целых l_j , не равных нулю одновременно, то с помощью элементарной локальной предельной теоремы для последовательности испытаний легко получить более простое представление $P_n(F, m)$, чем (14), а именно,

$$P_n \left(F, \sum_{j=2}^s m_j a_j \right) = \frac{(2\pi n)^{-(s-1)/2}}{\sqrt{p_1 \dots p_s}} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^s \frac{(m_j - np_j)^2}{2np_j} \right\} + o(n^{-(s-1)/2})$$

равномерно по всем целым $m_j \geq 0$ таким, что $m_1 + \dots + m_s = n$.

Список литературы

1. Хенгартнер В., Теодореску Р. *Функции концентрации*. Наука, Москва, 1980.
2. Esseen C. G. On the concentration function of a sum of independent random variables. *Z. Wahrsh. Verw Gebiete* (1968) **9**, 290–308.
3. Ушаков Н. Г. Верхние оценки максимальной вероятности для сумм независимых случайных векторов. *Теория вероятностей и ее применения* (1985) **30**, №1, 33–43.
4. Рогозин Б. А. Неравенства для функций концентрации свертки арифметических распределений и распределений с ограниченными плотностями. *Теория вероятностей и ее применения* (1987) **32**, №2, 351–355.
5. Мухин А. Б. *Оценки концентрации распределений сумм независимых случайных величин*. Изд-во Университет, Ташкент, 1995.
6. Мухин А. Б. О концентрации распределений сумм независимых случайных величин. I, II. *Известия АН УзССР, серия физ-матем. н.* (1973) №2, 25–29; №6, 18–23.
7. Лукач Е. *Характеристические функции*. Наука, Москва, 1979.
8. Мухин А. Б. О предельной теореме для плотностей и оценке скорости сходимости. *Известия АН УзССР, серия физ-матем. н.* (1971) №5, 13–19.
9. Мухин А. Б. Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.

Статья поступила 12.09.1997.

Переработанный вариант поступил 25.06.1998.