Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Труб, Рекуррентный алгоритм решения комбинаторной задачи о размещениях с ограничениями, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 2, 112–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:27:23

Рекуррентный алгоритм решения комбинаторной задачи о размещении с ограничениями

© 1999 г. И. И. Труб

Пусть имеется N групп, каждая из которых состоит из Q одинаковых элементов, а элементы разных групп различны. Сколькими способами можно расставить эти QN элементов так, чтобы в получившейся перестановке оказалось ровно L пар соседних одинаковых элементов, $0 \leq L \leq N(Q-1)$? Частный случай $L = 0$ соответствует вычислению количества перестановок, в которых никакие два одинаковых элемента не стоят рядом.

В работе предлагается рекуррентный алгоритм решения этой задачи, а также его обобщение на случай необязательно одинаковых размеров групп.

1. Вводные замечания

Пусть имеется N групп, каждая из которых состоит из Q одинаковых элементов, а элементы разных групп различны. Сколькими способами можно расставить эти QN элементов так, чтобы в получившейся перестановке оказалось ровно L пар соседних одинаковых элементов, $0 \leq L \leq N(Q-1)$?

Элементы групп будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, a , b и так далее. Введем важное для дальнейшего изложения понятие звена.

Звеном в перестановке назовем пару элементов одной группы, стоящих рядом.

Например, в перестановке $abbcaaa$ имеется два звена, в перестановке $aaaabbbb$ имеется четыре звена.

Приступим теперь к исследованию задачи. Сформулируем несколько очевидных свойств, используемых при обосновании предлагаемого алгоритма.

Свойство 1. В любой перестановке kQ элементов (k групп по Q одинаковых элементов) число звеньев s таково, что $0 \leq s \leq k(Q-1)$. Удаление из такой перестановки всех элементов любой группы приводит к перестановке, в которой число звеньев s_1 удовлетворяет неравенствам

$$\max\{0, s - Q + 1\} \leq s_1 \leq \min\{(k-1)(Q-1), s + Q\}.$$

Свойство 2. Добавление к такой перестановке Q элементов новой группы порождает перестановку с числом звеньев s_2 таким, что

$$\max\{0, s - Q\} \leq s_2 \leq \min\{(k+1)(Q-1), s + Q - 1\}.$$

Свойство 3. Если перестановка N групп содержит L звеньев, то число звеньев в перестановке k групп, полученной из нее удалением любых $N - k$ групп, ограничено сверху величиной $(N - k)Q + L$.

Последнее свойство можно интерпретировать и таким образом: если перестановка k групп содержит более, чем $(N - k)Q + L$, звеньев, то невозможно дополнить ее $(N - k)Q$ элементами оставшихся групп так, чтобы итоговая перестановка содержала L звеньев.

2. Алгоритм решения задачи

Сформулируем теперь алгоритм, который позволяет, зная число перестановок k групп для каждого числа звеньев в диапазоне от нуля до $\min\{k(Q - 1), (N - k)Q + L\}$, получить число перестановок $k + 1$ группы для каждого числа звеньев в диапазоне от нуля до $\min\{(k + 1)(Q - 1), (N - k - 1)Q + L\}$, $k \geq 2$.

- (1) Пусть имеется совокупность $\{A_i^k\}$, $0 \leq i \leq \min\{k(Q - 1), (N - k)Q + L\}$, где A_i^k — число перестановок k групп с i звеньями.
- (2) $m := 0$, все элементы совокупности $\{A_i^{k+1}\}$ положить равными нулю.
- (3) Если $m > \min\{(k + 1)(Q - 1), (N - k - 1)Q + L\}$, то перейти к шагу 8, иначе к следующему шагу.
- (4) $n := \max\{m - Q + 1, 0\}$.
- (5) По формулам, полученным в следующей части работы, найти число всевозможных способов добавления Q элементов $(k + 1)$ -й группы для получения из перестановки k групп с n звеньями перестановки $k + 1$ группы с m звеньями. Обозначим это число символом $\text{Per}_n^m(k)$. Тогда $A_m^{k+1} := A_m^{k+1} + \text{Per}_n^m(k)A_n^k$.
- (6) $n := n + 1$. Если $n > \min\{(k + 1)(Q - 1), (N - k - 1)Q + L\}$, то перейти к шагу 7, иначе к шагу 5.
- (7) $m := m + 1$. Перейти к шагу 3.
- (8) Получили совокупность $\{A_i^{k+1}\}$, $0 \leq i \leq \min\{(k + 1)(Q - 1), (N - k - 1)Q + L\}$. Это результат работы алгоритма.

Далее k увеличиваем на единицу и применяем этот алгоритм вновь. Когда сформирована совокупность $\{A_i^{N-1}\}$, находится число всевозможных вставок Q элементов N -й группы только для $m = 0$. Это и будет решением исходной задачи, так как алгоритм учел все возможные перестановки.

Сформулируем теперь так называемый вводный алгоритм для перехода от $k = 1$ к $k = 2$. Особенность этого перехода состоит в том, что Q элементов одной группы можно расставить только одним способом, с $Q - 1$ звеньями. Совокупность $\{A_i^1\}$ состоит из одного элемента, соответствующего $i = Q - 1$, причем этот элемент равен единице.

- (1) $m := 0$, $n := Q - 1$. Все элементы совокупности $\{A_i^2\}$ положить равными нулю.

- (2) Если $m > \min\{2(Q-1), (N-2)Q+L\}$, то перейти к шагу 5, иначе перейти к следующему шагу.
- (3) По формулам, полученным в следующей части работы, найти число всевозможных способов добавления Q элементов второй группы, позволяющих получить из перестановки одной группы перестановку двух групп с m звеньями: $A_m^2 := A_m^2 + \text{Per}_{Q-1}^m(1)$.
- (4) $m := m + 1$. Перейти к шагу 2.
- (5) Получили совокупность $\{A_i^2\}$, $0 \leq i \leq \min\{2(Q-1), (N-2)Q+L\}$. Это результат работы вводного алгоритма.

Интересно отметить общность описанного алгоритма с известной схемой Беллмана решения оптимизационных задач [1]. Аналогия прослеживается в следующем.

- (1) Первый шаг решения очевиден и вытекает непосредственно из исходных данных (при $k = 1$ имеется одна перестановка с $Q - 1$ звеньями).
- (2) На каждом шаге решается совокупность однотипных задач для каждого значения из некоторого диапазона, причем для этого используется множество решений, полученное на предыдущем шаге. В этом смысле A_i^k можно считать формальным аналогом функции Беллмана, где k выполняет роль порядкового номера функции, а i ее аргумента. Отличие заключается в содержании: для нахождения значения функции Беллмана нужно решать задачу минимизации, а для вычисления A_i^k находить число перестановок k групп с i звеньями.
- (3) На заключительном шаге решение задачи ищется только для одного значения $i = L$.

3. Вывод основных формул

Перейдем к выводу формул, на которые делается ссылка в алгоритме. Прежде всего еще раз сформулируем задачу.

Имеется некоторая перестановка множества элементов, состоящего из k групп по Q одинаковых элементов в каждой группе, то есть в перестановке стоят в произвольном порядке kQ элементов. В ней есть n звеньев. Сколькими способами в нее можно включить Q элементов $(k+1)$ -й группы так, чтобы в получившейся перестановке стало m звеньев?

Следует отметить, что согласованность значений n и m , иными словами, корректность поставленной задачи обеспечивается работой алгоритма. Введем несколько обозначений.

Для краткости будем называть элементы $(k+1)$ -й группы φ -элементами, а элементы первых k групп f -элементами. Звено, образованное φ -элементами, назовем φ -звеном, все другие звенья будем называть f -звеньями.

Будем обозначать $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее x .

Итак, в готовой перестановке должно быть m звеньев. Пусть p из них приходятся на f -элементы, $m-p$ на φ -элементы (то есть имеют вид $\varphi\varphi$). Ясно, что $p \leq \min\{m, n\}$. Кроме того, $n-p$ f -звеньев нужно разорвать φ -элементами. После этого нам еще

потребуется по крайней мере $m - p$ φ -элементов, чтобы создать $m - p$ φ -звеньев. Поэтому требуется выполнение неравенства $Q - (n - p) - (m - p) \geq 0$, или $p \geq (n + m - Q)/2$. Другими словами, $p \geq \max\{0, (n + m - Q)/2\}$, так как $n + m - Q$ может быть и отрицательным числом. Сделаем несколько простых замечаний:

- (a) если Q φ -элементов попадают ровно в d промежутков между элементами, образованных f -элементами, то при этом получается ровно $Q - d$ φ -звеньев, поэтому $Q - d = m - p$ и $d = Q + p - m$;
- (b) число разбиений упорядоченного множества из Q элементов на $Q + p - m$ непустых отрезков равно $C_{Q-1}^{Q+p-m-1}$ (см., например, [2]);
- (c) при размещении φ -элементов число f -звеньев уменьшится на число промежутков, являвшихся f -звеньями, в которые попадают φ -элементы;
- (d) если kQ f -элементов, образующих $kQ + 1$ позиций, расположены так, что они образуют ровно n звеньев, то число способов выбора промежутков, содержащих ровно $n - p$ f -звеньев, равно $C_n^{n-p} C_{kQ-n+1}^{Q+p-m-(n-p)} = C_n^{n-p} C_{kQ-m+1}^{Q+2p-m-n}$.

В итоге получаем рабочую формулу

$$\text{Per}_n^m = \sum_{p=Z_1}^{Z_2} C_{Q-1}^{Q+p-m-1} C_n^{n-p} C_{kQ-n+1}^{Q+2p-m-n}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \max\{0, \lceil (n + m - Q)/2 \rceil\}, \\ Z_2 &= \min\{m, n\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим следующее обстоятельство. Что означает ситуация, когда выполняется неравенство $Q + 2p - n - m > kQ - n + 1$? Она означает, что промежутков для размещения φ -элементов не хватило, и перестановка при данных n , m и p невозможна. Поэтому верхнюю границу для p следует уточнить, положив

$$Z_2 = \min\{m, n, \lfloor (Q(k - 1) + m + 1)/2 \rfloor\}. \quad (3)$$

Докажем корректность формулы (1). Для этого нужно доказать справедливость следующих неравенств.

- (a) $Q + p - m - 1 \leq Q - 1$. Это неравенство следует из неравенства $p - m \leq 0$, которое обеспечивается выбором верхней границы (3) для p .
- (b) $Q + p - m - 1 \geq 0$. Согласно (2) $p \geq \lceil (n + m - Q)/2 \rceil$, откуда следует, что

$$Q + p - m - 1 \geq \lceil Q + (n + m - Q)/2 - m - 1 \rceil = \lceil (Q + n - m - 2)/2 \rceil.$$

Очевидно, что $m - n \leq Q - 1$, откуда

$$\lceil (Q - (m - n) - 2)/2 \rceil \geq \lceil (Q - (Q - 1)_2)/2 \rceil = \lceil -1/2 \rceil = 0.$$

Неравенство доказано.

- (c) $n - p \geq 0$. Это неравенство непосредственно следует из (3).

- (д) $Q + 2p - m - n \leq kQ - n + 1$. Это неравенство также непосредственно следует из (3).
- (е) $Q + 2p - m - n \geq 0$. Согласно (2) $2p \geq n + m - Q$. Отсюда прямо следует искомое неравенство.

Корректность формулы (1) полностью доказана.

4. Обобщение алгоритма

Распространим предложенный алгоритм на более общую задачу, когда каждая группа содержит свое число Q_i одинаковых элементов, $i = 1, \dots, N$. Отметим, что если

$$\max_{1 \leq i \leq N} Q_i = Q_j, \quad Q_j - 1 > \sum_{i=1}^{j-1} Q_i + \sum_{i=j+1}^N Q_i + L,$$

то задача не имеет решения (своеобразное правило треугольника). В противном случае упорядочиваем совокупность $\{Q_i\}$ по убыванию и применяем предложенный выше алгоритм, заменяя в нем Q на Q_{k+1} и kQ на $Q_1 + \dots + Q_k$. Упорядочение по убыванию необходимо для исключения в процессе вычислений различных нежелательных ситуаций, например, когда нужно вставить в перестановку количество элементов, превышающее число элементов, уже имеющееся в перестановке.

Перепишем основной алгоритм и формулу (1) применительно к обобщенной задаче.

- (1) Имеется совокупность $\{A_j^k\}$, $0 \leq j \leq \min \left\{ \sum_{c=1}^k (Q_c - 1), \sum_{c=k+1}^N Q_c + L \right\}$.
- (2) $m := 0$, $i := 0$, все элементы совокупности $\{A_j^{k+1}\}$ положить равными нулю.
- (3) Если

$$m > \min \left\{ \sum_{c=1}^{k+1} (Q_c - 1), \sum_{c=k+2}^N Q_c + l \right\},$$

то перейти к шагу 8, иначе перейти к следующему шагу.

- (4) $n := \max\{m - (Q_{k+1} - 1), 0\}$.
- (5) Найти число всевозможных способов добавления Q_{k+1} элементов $(k+1)$ -й группы для получения из перестановки k групп с n звеньями перестановки $k+1$ группы с m звеньями: $A_i^{k+1} := A_i^{k+1} + \text{Per}_n^m(k) A_n^k$.
- (6) $n := n + 1$. Если

$$n > \min \left\{ m + Q_{k+1}, \sum_{c=1}^k (Q_c - 1), \sum C = k + 1^N Q_c + L \right\},$$

то перейти к шагу 7, иначе перейти к шагу 5.

- (7) $m := m + 1$, $i := i + 1$. Перейти к шагу 3.

(8) Получим совокупность $\{A_j^{k+1}\}$, $0 \leq j \leq \min\left\{\sum_{c=1}^{k+1}(Q_c - 1), \sum_{c=k+2}^N Q_c + L\right\}$.

Формула (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Per}_n^m(k) &= \sum_{p=Z_1}^{Z_2} C_{Q_{k+1}-1}^{Q_{k+1}+p-m-1} C_{n-p}^{n-p} C_{Z_3}^{Q_{k+1}+2p-m-n}, \\ Z_1 &= \max\{0, \lceil (n+m-Q_{k+1})/2 \rceil\}, \\ Z_2 &= \min\{m, n, \lfloor (Q_1^k - Q_{k+1} + m + 1)/2 \rfloor\}, \\ Q_1^k &= \sum_{c=1}^k Q_c, \\ Z_3 &= Q_c^k - n + 1. \end{aligned}$$

5. Оценка трудоемкости алгоритма

Прежде всего дадим оценку сверху для $\min\{k(Q-1), (N-k)Q\}$, фигурирующего в описании алгоритма. Максимальное значение этого минимума достигается, естественно, при равенстве обоих аргументов. Приравняв их, получим, что $k = NQ/(2Q-1)$, и следовательно, при добавлении Q элементов очередной группы m и n ограничены сверху значением

$$B = NQ(Q-1)/(2Q-1).$$

Отсюда следует, что при этом переходе расчетная формула (4) будет применена не более B^2 раз. Оценим теперь трудоемкость формулы (1). Она представляет собой суммы, число слагаемых в каждой из которых не превышает B . Значит, трудоемкость одного шага вычислений оценивается сверху величиной B^3 . Так как для решения задачи необходимо сделать $N-1$ таких шагов, суммарная трудоемкость алгоритма имеет (подчеркиваем, очередь завышенную) оценку $B^3(N-1) = O(N^4Q^3)$, иными словами, четвертый порядок по N и третий порядок по Q . Таким образом, предложенный алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Список литературы

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Наука, Москва, 1980.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. Наука, Москва, 1969.

Статья поступила 05.08.1991.

Переработанный вариант поступил 09.01.1999.