Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Некоторые характеристики двухэтапных планов экспериментов, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 83–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:29:02

Некоторые характеристики двухэтапных планов экспериментов

© 1999 г. М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков

Процедура выбора объекта с особыми свойствами нередко проводится в два этапа. Сначала по упрощенным измерениям выбирают подозрительные объекты, а затем их исследуют более детально, начиная с самых подозрительных. Важной характеристикой такой процедуры является величина τ , равная числу детально обследованных объектов на втором этапе. В данной работе исследуется распределение величины τ . Результаты применяются к оценке качества двухэтапной процедуры выбора из нескольких полиномиальных гипотез.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-15-96092.

1. Введение

Математическая постановка задачи о наилучшем выборе плана эксперимента и метода обработки наблюдений в общем случае затруднительна. Математическая задача более успешно ставится и решается для достаточно узких множеств рассматриваемых планов. Наиболее полно изучен классический случай, когда по выборке заданного объема требуется выбрать одну из двух гипотез (см. [1]). Качество статистического критерия для многих приложений в этом случае достаточно характеризовать ошибками первого и второго родов. При последовательном наборе наблюдений (см. [2]) для характеристики всей процедуры принятия решения к ошибкам первого и второго родов добавляется математическое ожидание числа наблюдений.

В качестве статистических критериев нередко используются порядковые статистики (члены вариационного ряда), построенные по самой выборке или по некоторым функциям от нее. Достаточно полно изучены порядковые статистики, построенные по независимым и одинаково распределенным случайным величинам. В книгах [3, 4] приводятся распределения порядковых статистик, изучено их асимптотическое поведение, указываются различные приложения.

Многими авторами изучались порядковые статистики, построенные по s -цепочкам ($s \geq 1$) исходов полиномиальной схемы или цепи Маркова для большого числа исходов и испытаний (см. [5–7, 13]). В этих работах рассматривались распределения порядковых статистик.

Необходимость изучения других характеристик вариационного ряда возникает в задачах, когда по наблюдениям некоторых объектов (партии изделий, проб радиоактивного грунта и т. п.) нужно отобрать объекты с особыми свойствами. Нередко эта

процедура проводится в два этапа. Сначала по упрощенным измерениям выбирают подозрительные объекты, а затем исследуют их более детально, начиная с самых подозрительных.

Такого рода процедуры широко используются в медицинской практике (см., например, [8], стр. 349). Для выявления редкого заболевания среди большой группы доноров делят эту группу на несколько частей и проводят анализ смешанной крови для каждой части, затем в части с обнаруженным заболеванием проводят уже индивидуальный анализ. При поиске полезных ископаемых можно сначала собрать информацию по легко измеряемым признакам, а затем подозрительные участки обследовать более детально (большее количество проб, бурение и т. д.). Во всех подобных случаях стоимость детальных исследований существенно выше предварительных, и потому для оценки процедуры полезно знать распределение моментов обнаружения разыскиваемых объектов.

В связи с такого рода задачами представляет интерес следующая математическая задача. Пусть по случайным величинам

$$X_0, X_1, \dots, X_r \quad (1)$$

построен вариационный ряд

$$Z_{(1)}, X_{(2)}, \dots, Z_{(z+1)}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что совместная функция распределения величин (1) непрерывна. Требуется исследовать место расположения τ величины X_0 в вариационном ряду:

$$Z_{(\tau+2-\tau)} = X_0. \quad (3)$$

При $\tau = 1$ величина X_0 является максимальным членом вариационного ряда (2), при $\tau = 2$ вторым по величине и т. д.

В параграфах 2 и 3 данной работы исследуется распределение величины τ , а в четвертом параграфе полученные результаты применяются к оценке двухэтапной процедуры выбора из нескольких гипотез.

Величины, аналогичные τ возникают также при исследовании эффективности методов оценки параметров, принимающих значения из конечного множества (см., например, [14]).

2. Зависимые статистики

Для моментов $M_\tau^{[k]}$, $\tau^{[k]} = \tau(\tau-1)\dots(\tau-k+1)$, и вероятностей $P\{\tau = k\}$ нетрудно получить формулы, которые могут быть использованы при численных расчетах. Приведем соответствующее утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 1. При любой целом $r \geq 1$

$$M(\tau-1)^{[k]} = k! S_k, \quad 1 \leq k \leq r, \quad (4)$$

$$P\{\tau = k+1\} = \sum_{l=0}^{r-k} (-1)^l S_{k+l} \binom{k+l}{k}, \quad 0 \leq k \leq r, \quad (5)$$

$$P\{\tau \geq k+1\} = \sum_{l=0}^{r-k} S_{k+l} \binom{k+l-1}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq r, \quad (6)$$

где

$$S_0 = 1, \quad U_i = \{X_i > X_0\}, \quad i = 1, \dots, r, \\ S_v = \sum_{1 \leq i_1 < \dots, i_v \leq r} \mathbf{P}\{U_{i_1} \dots U_{i_v}\}, \quad v \geq 1. \quad (7)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\tau = 1 + \chi(U_1) + \dots + \chi(U_r) \quad (8)$$

и

$$(\tau - 1)^{[k]} = (\tau - 1) \dots (\tau - k) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}} \chi(U_{i_1}) \dots \chi(U_{i_k}), \quad (9)$$

где $\chi(A)$ — индикатор события и

$$\mathcal{M} = \{(i_1, \dots, i_k) : i_l = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, k; \quad i_{l_1} \neq i_{l_2} \text{ при любых } l_1 \neq l_2\}.$$

Равенство (4) следует из (7) и (9). Событие $\{\tau - 1 = k\}$ равносильно осуществлению ровно k событий $U_1, \dots, U_r$ и, следовательно, (5) является переформулировкой результатов из книги Феллера ([9], стр. 124–125). Аналогично получается формула (6) из формулы (5.2) на стр. 128 книги [9]. Теорема доказана.

Из формул (4) легко получить, что

$$\mathbf{M}\tau = 1 + S_1, \quad \mathbf{D}\tau = S_2 + S_1 - S_1^2, \quad (10)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^r \mathbf{P}\{X_i > X_0\}, \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{P}\{X_i > X_0, X_j > X_0\}. \quad (11)$$

Многие задачи приводят к необходимости исследовать τ , когда случайные величины (1) имеют совместное нормальное распределение. В этом случае для величин S_k можно написать более явное выражение.

Пусть величины (1) имеют невырожденное нормальное распределение с математическими ожиданиями $\mathbf{M}X_i = A_i$, дисперсиями $\mathbf{D}X_i = B_i^2$ и ковариациями $\text{cov}(X_i X_j) = R_{ij} B_i B_j$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, r$. События U_i можно записать в виде $U_i = \{Y_i > 0\}$, где $Y_i = X_i - X_0$, $i = 1, \dots, r$. Величины $Y_1, \dots, Y_r$ имеют совместное нормальное распределение с параметрами

$$a_i = \mathbf{M}Y_i = A_i - A_0, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}Y_i = B_i^2 + B_0^2 - 2R_{0i} B_0 B_i, \\ \text{cov}(Y_i Y_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (12)$$

где

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (R_{ij} B_i B_j - R_{0j} B_0 B_j - R_{0i} B_0 B_i + B_0^2).$$

Вероятность события $U_{i_1} \dots U_{i_v}$ находится по формуле

$$\mathbf{P}(U_{i_1} \dots U_{i_v}) = \int_{\Delta_{i_1}}^{\infty} \dots \int_{\Delta_{i_v}} p_{i_1 \dots i_v}(u_1, \dots, u_v) du_1 \dots du_v, \quad (13)$$

где $\Delta_i = a_i/\sigma_i$, $p_{i_1 \dots i_v}(u_1, \dots, u_v)$ — совместная плотность нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(\rho_{i_k i_l})_{k,l=1}^v$, $\rho_{i_k i_k} = 1$.

При $v = 2$ для вычисления (13) можно воспользоваться разложением плотности (см. [1], стр. 320) в ряд по степеням $\rho_{i_1 i_2}$. Многочисленные обобщения этого разложения (см., например, [10, 11]) можно использовать при $v > 2$.

3. Независимые статистики

Пусть статистики (1) независимы и функции распределения

$$G(x) = \mathbf{P}\{X_0 \leq x\}, \quad F_i(x) = \{\{X_i < x\}, \quad i = 1, \dots, r,$$

непрерывны. Распределение величин τ в рассматриваемом случае удобно искать в виде

$$\mathbf{P}\{\tau \geq k+1\} = \mathbf{M}(\mathbf{P}\{\eta_r \geq k \mid X_0\}), \quad (14)$$

где $\eta_r = \chi(U_1) + \dots + \chi(U_r)$.

Отметим, что условное математическое ожидание

$$M_r(x) = \mathbf{M}(\chi(U_1) + \dots + \chi(U_r) \mid X_0 = x)$$

определяется формулой

$$M_r(x) = \sum_{l=1}^r (1 - F_l(x)). \quad (15)$$

Обозначим $u_\gamma(r)$ корень уравнения

$$\gamma = \frac{1}{r} M_r(x). \quad (16)$$

Теорема 2. Если при $r \rightarrow \infty$ корень $u_\gamma(r)$ уравнения (16) сходится к u_γ , то при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tau/r > \gamma\} \rightarrow G(u_\gamma), \quad 0 < \gamma < 1.$$

Доказательство. Вероятность $\mathbf{P}\{\tau/r > \gamma\} = \mathbf{P}\{\tau > [r\gamma] + 1\}$, используя (14), представим в виде

$$\mathbf{P}\{\tau > \gamma r\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{r}(\eta_r - M_r(x)) \geq \frac{1}{r}[\gamma r] - \frac{1}{r}M_r(x) \mid X_0 = x\right\} dG(x). \quad (17)$$

При условии $X_0 = x$ индикаторы $\chi(U_i)$, $i = 1, \dots, r$, независимы и

$$\mathbf{P}\{\chi(U_i) = 1 \mid X_0 = x\} = 1 - F_i(x), \quad i = 1, \dots, r.$$

По закону больших чисел последовательность $(\eta_r - M_r(x))/r$ сходится к нулю по вероятности. Таким образом, если x фиксировано и $r \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{r}(\eta_r - M_r(x)) \geq \frac{1}{r}[\gamma r] - \frac{1}{r}M_r(x) \mid X_0 = x\right\} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{при } x < u_\gamma, \\ 0 & \text{при } x > u_\gamma, \end{cases} \quad (18)$$

так как неравенство $\gamma - M_r(x)/r < 0$ выполняется при $x < u_\gamma(r)$, а по условию теоремы $u_\gamma(r) \rightarrow u_\gamma$. Переходя в (17) к пределу под знаком интеграла при $r \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau > \gamma r\} = \int_{-\infty}^{u_\gamma} dG(x) = G(u_\gamma).$$

Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы сохранится при любых условиях на случайные величины (1), обеспечивающих выполнение (18).

Следствие 1. Если $F_i(x) = F(x)$, $i = 1, \dots, r$, то при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tau/r > \gamma\} \rightarrow G(u_\gamma),$$

где u_γ — квантиль распределения $F(x)$, то есть $1 - F(u_\gamma) = \gamma$.

Если $G(x) = F(x)$, то $G(u_\gamma) = 1 - \gamma$, и предельным распределением для τ/r оказывается равномерное распределение на $[0, 1]$. Последнее утверждение легко следует из очевидного в этом случае равенства

$$\mathbf{P}\{X_{i_1} < \dots < X_{i_{r+1}}\} = \frac{1}{(r+1)!}$$

при любой перестановке $(i_1, \dots, i_{r+1})$ чисел $(0, 1, \dots, r)$.

Отметим, что в условиях следствия 1 упрощаются формулы (5) и (6). Например, вероятность $\mathbf{P}\{\tau = k+1\}$ можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{\tau = k+1\} = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{r}{k} (1 - F(x))^k f^{r-k}(x) dG(x). \quad (19)$$

Эту формулу легко получить непосредственно. Нужно воспользоваться тем, что величина $\eta_r = \chi(U_1) + \dots + \chi(U_r)$ при условии $X_0 = x$ является числом успехов в схеме Бернулли с r испытаниями и вероятностью успеха $1 - F(x)$.

4. Выборы из нескольких гипотез

Независимые случайные величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (20)$$

распределены в соответствии с одной из r гипотез $H_1, \dots, H_r$. При гипотезе H_l , $l = 1, \dots, r$,

$$\mathbf{P}\{x_t = k\} = p_{lk} > 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Будем полагать, что на гипотезах задано априорное распределение вероятностей $p_1, \dots, p_r$. Гипотеза H_l выбирается с вероятностью p_l , $l = 1, \dots, r$. Обозначим θ номер выбранной гипотезы.

Распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и ковариацию при гипотезе H_l будем обозначать соответственно $\mathbf{P}_l$, $\mathbf{M}_l$, $\mathbf{D}_l$, cov_l .

По реализации (20) и дополнительным наблюдениям нужно найти гипотезу, по которой была получена данная реализация. Рассмотрим следующую двухэтапную процедуру определения истинной гипотезы.

На первом этапе находится реализация (20), по ней вычисляются частоты исходов $\nu_1 = \nu_1(n), \dots, \nu_N = \nu_N(n)$ и статистики

$$\xi_i(n) = \ln p_i + \sum_{k=1}^N \nu_k(n) \ln p_{ik}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (22)$$

Номер наибольшей статистики по байесовскому критерию (см. [12], стр. 273) объявляется номером истинной гипотезы.

По статистикам (22) строится вариационный ряд

$$\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(r)}. \quad (23)$$

Если реализации всех статистик различны, то равенства

$$\xi_{(k)} = \xi_{i_k}, \quad k = 1, \dots, r, \quad i_k \in \{1, 2, \dots, r\},$$

однозначно определяют перестановку

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) \quad (24)$$

номеров $(1, 2, \dots, r)$. Если среди реализаций величин (22) оказались равные, например, одинаковыми оказались s значений статистик, то в (23) этим статистикам соответствует s одинаковых членов вариационного ряда, и порядок расположения номеров этой группы не определен. В этом случае, порядок расположения номеров группы будем задавать произвольным образом, например, выбирать расположения равновероятно. Таким образом, последовательность (24) будет полностью определена в любом случае.

На втором этапе проводятся более полные испытания, по которым однозначно решается, является ли истинной гипотеза H_{i_r} , соответствующая наибольшему члену вариационного ряда. Если окажется, что $\theta = i_r$, то решение найдено и испытания прекращаются. Если окажется, что $\theta \neq i_r$, то по новой серии дополнительных испытаний аналогично проверяется гипотеза $\theta = i_{r-1}$ и так далее. Такая процедура с вероятностью единица закончится правильным решением.

Существенной характеристикой процедуры является величина τ , определяющая место, на которое попала статистика ξ_θ : $\tau = l$, если $\theta = i_{r+1-l}$, $l = 1, \dots, r$. При любом способе упорядочивания членов вариационного ряда (23) справедливы неравенства $\underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$, где

$$\underline{\tau} = 1 + \sum_{i=1}^r \chi_i, \quad \bar{\tau} = 1 + \sum_{i=1}^r \bar{\chi}_i,$$

$$\chi_i = \chi\{\xi_i > \xi_\theta\}, \quad \bar{\chi}_i = \chi\{\xi_i \geq \xi_\theta\}, \quad i = 1, \dots, r, \quad i \neq \theta.$$

Здесь и далее в суммы со знаком $*$ не входят слагаемые с индексами, равными θ .

Будем рассматривать асимптотическое поведение τ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных r и p_i , $i = 1, \dots, r$, в схеме серий, когда

$$p_{ik} = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{w_{ik}(n)}{\sqrt{n}} \right), \quad w_{ik}(n) \rightarrow w_{ik}, \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, r. \quad (25)$$

При условии $\theta = l$ в схеме серий (25) случайные величины $\eta_{li} = \xi_i - \xi_l$, $i \neq l$, асимптотически нормальны. Для мометнов первого и второго порядков этих величин справедливы формулы

$$\mathbf{M}_l \eta_{li} = n \left(\bar{a}_{li} + \frac{1}{n} \ln \frac{p_i}{p_l} \right), \quad \text{cov}_l(\eta_{li} \eta_{lj}) = n \bar{\sigma}_{li, lj}, \quad (26)$$

где

$$\bar{a}_{li} = \sum_{k=1}^N p_{lk} c_{ik}^{(l)}, \quad \bar{\sigma}_{li, lj} = c_{ik}^{(l)} c_{jk}^{(l)} - \bar{a}_{li} \bar{a}_{lj}, \quad c_{ik}^{(l)} = \ln \frac{p_{ik}}{p_{lk}}. \quad (27)$$

Лемма 1. В схеме серий (25) при условии $\theta = l$ существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{a}_{li} = -\frac{1}{2} b_{ii}^{(l)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{\sigma}_{li, lj} = b_{ij}^{(l)},$$

где

$$b_{ij}^{(l)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (w_{ik} - w_{lk})(w_{jk} - w_{lk}). \quad (28)$$

Доказательство. Из формул (25) и (27), используя разложение логарифма, получим, что

$$c_{ik}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (w_{ik}(n) - w_{lk}(n)) - \frac{1}{2n} w_{ik}^2(n) + \frac{1}{2n} w_{il}^2(n) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{li} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} w_{lk}(n) \right) c_{ik}^{(l)} \\ &= \frac{1}{2Nn} \sum_{k=1}^N (w_{ik}(n) - w_{lk}(n))^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k=1}^N w_{ik}(n) = 0.$$

Аналогично доказывается другая формула.

Лемма 2. Если $b_{ii}^{(l)} > 0$, $i = 1, \dots, r$, то в схеме серий (25)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{li_1} > 0, \dots, \eta_{li_v} > 0\} = p_{i_1, \dots, i_v}^{(l)},$$

где

$$p_{i_1, \dots, i_v}^{(l)} = \mathbf{P}\{\zeta_1 > \Delta_{i_1}^{(l)}, \dots, \zeta_v > \Delta_{i_v}^{(l)}\}, \quad (29)$$

$(\zeta_1, \dots, \zeta_v)$ — нормально распределенный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$(b_{ikim}^{(l)}), \quad k, m = 1, \dots, v,$$

$b_{ij}^{(l)}$ определены равенством (28), $\Delta_{li}^{(l)} = (1/2) \sqrt{b_{ii}^{(l)}}$.

Утверждение леммы 2 следует из леммы 1 и асимптотической нормальности вектора $(\nu_1(n), \dots, \nu_N(n))$.

Отметим, что вероятности $P_l\{\eta_{li_1} > 0, \dots, \eta_{li_v} > 0\}$, $P_l\{\eta_{li_1} \geq 0, \dots, \eta_{li_v} \geq 0\}$, входящие в определение величин $\underline{\tau}$ и $\bar{\tau}$, в пределе не различаются. Отсюда, используя неравенства (24), неравенства

$$M_l(\underline{\tau} - 1)^{[k]} \leq M_l(\tau - 1)^{[k]} \leq M_l(\bar{\tau} - 1)^{[k]}, \quad P\{\underline{\tau} < k\} \leq P\{\tau < k\} \leq P\{\bar{\tau} < k\},$$

лемму 2 и теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Если $b_{ii}^{(l)} > 0$, $i = 1, \dots, r$, то в схеме серий (25)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_l(\tau - 1)^{[k]} = k! S_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_l\{\tau = k + 1\} = \sum_{v=0}^{r-k-1} (-1)^v S_{k+v}^{(l)} \binom{k+v}{k},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_l\{\tau \geq k + 1\} = \sum_{v=0}^{r-k-1} (-1)^v S_{k+v}^{(l)} \binom{k+v-1}{k-1},$$

где

$$S_0 = 1, \quad S_v^{(l)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq r}^* p_{i_1, \dots, i_v}^{(l)},$$

$p_{i_1, \dots, i_v}^{(l)}$ определены формулами (28), (29).

Список литературы

1. Крамер Г., *Математические методы статистики*. Мир, Москва, 1975.
2. Вальд А., *Последовательный анализ*. Наука, Москва, 1960.
3. Дейвид Г., *Порядковые статистики*. Наука, Москва, 1979.
4. Галамбош Я., *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*. Наука, Москва, 1984.
5. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
6. Ивченко Г. И., О предельных распределениях порядковых статистик полиномиальной схемы. *Теория вероятностей и ее применения* (1971) **16**, №1, 94–107.
7. Амбросимов А. С., Об асимптотическом поведении максимума в однородной цепи Маркова с большим числом состояний. *Теория вероятностей и ее применения* (1978) **23**, №2, 438–445.
8. Ермаков С. М., *Математическая теория планирования эксперимента*. Наука, Москва, 1983.
9. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 1, Мир, Москва, 1984.
10. Висков О. В., Несколько замечаний о полиномах Эрмита. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №3, 566–569.
11. Slepian D., On the symmetrized Kronecker power of a matrix and extensions of Mehker's formula for Hermite polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* (1972) **3**, №4, 606–616.
12. Боровков А. А., *Математическая статистика*. Наука, Москва, 1984.
13. Амбросимов А. С., О состоятельности метода максимального правдоподобия в задаче упорядочения исходов полиномиальной схемы в соответствии с их вероятностями. *Дискретная математика* (1995) **7**, №2, 118–130.
14. Амбросимов А. С., Об эффективности метода максимального правдоподобия определения входного слова полунепрерывного канала без памяти при гауссовском шуме. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1998) **5**, №2, 195–196.

Статья поступила 01.04.1999.