Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Дёгтев, Д. И. Иванов, Слабо импликативно селекторные множества размерности 3, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 126–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 03:32:35

УДК 517.11

Слабо импликативно селекторные множества размерности 3

© 1999 г. А. Н. Дегтев, Д. И. Иванов

По n -местной булевой функции β определяется класс $K(\beta)$ слабо β -импликативно селекторных множеств, являющихся подмножествами натуральных чисел. Размерность класса $K(\beta)$ — это число существенных переменных в β . Описаны, с точностью до включения, все классы $K(\beta)$ размерностей 2 и 3, за исключением одного случая.

Данная работа в идейном плане является продолжением статьи [1] и близка по духу работам [2, 3]. Пусть $A \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ и β — n -местная булева функция (БФ) без фиктивных переменных. Если $x \in \mathbb{N}$, то положим $\bar{x} = 1$, если $x \in A$, и $\bar{x} = 0$ в противном случае. Назовем A слабо β -импликативно селекторным (β -ИС) множеством, если существует n -местная частично-рекурсивная функция (ЧРФ) f такая, что

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\beta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 1 \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in A \cap \{x_1, \dots, x_n\}).$$

Говорим также, что f соответствует A . Положим

$$K(\beta) = \{A \subseteq \mathbb{N}: A \text{ — } \beta\text{-ИС множество}\},$$

а число n назовем размерностью класса $K(\beta)$.

Считаем БФ β допустимой, если $\beta(0, \dots, 0) = 0$. Ясно, что если β не является такой, то $K(\beta) = \{\mathbb{N}\}$ и этот случай неинтересен. Поэтому ниже под БФ понимаем только допустимые булевы функции.

Лемма 1. Для любой БФ β

$$K(x \vee y) \subseteq K(\beta).$$

Доказательство. Пусть β — n -местная БФ, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, а A — слабо $x \vee y$ -ИС множество с соответствующей ЧРФ $f(x, y)$. Можно считать, что $f(x, x) = x$ и $f(x, y) = f(y, x)$. Ищем $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$ такое, что $f(a, x_i) \downarrow$, то есть определено для всех i , $1 \leq i \leq n$. Если такого a нет, то полагаем $g(x_1, \dots, x_n) \uparrow$, то есть неопределено. Если $f(a, x_i) = a$ для всех i , то полагаем $g(x_1, \dots, x_n) = a$. Иначе, пусть $y_1, \dots, y_m \in \{x_1, \dots, x_n\}$ такие, что $f(a, y_j) = y_j$ и $y_j \neq a$ для всех j , $1 \leq j \leq m$. Ясно, что $m < n$ и если $\{x_1, \dots, x_n\} \cap A \neq \emptyset$, то и $\{y_1, \dots, y_m\} \cap A \neq \emptyset$. Теперь продолжаем такую процедуру дальше, заменяя $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_m$. Если $\{y_1, \dots, y_m\} \cap A \neq \emptyset$, то через конечное число шагов обладающий указанными выше свойствами элемент a будет найден. Тогда значение $g(x_1, \dots, x_n)$ будет определено и принадлежать A . Поэтому $A \in K(\beta)$, и лемма 1 доказана.

Так как любое рекурсивно-перечислимое множество (РПМ) является слабо $x \vee y$ -ИС, то все они лежат в каждом из $K(\beta)$.

Лемма 2. Если γ получена из БФ β в результате отождествления некоторых переменных или подстановки вместо некоторых переменных константы 0, то $K(\beta) \subseteq K(\gamma)$.

Доказательство. Смотрите лемму 2 из [1].

Лемма 3. Если $\beta \rightarrow \gamma$ — тождественная истинная БФ, то

$$K(\gamma) \subseteq K(\beta).$$

Доказательство. Если A является слабо γ -ИС множеством с ЧРФ f , то A является и слабо β -ИС множеством с этой же ЧРФ.

Лемма 4. Если $\beta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq \bar{x}_i$ для подходящего $i \leq n$, то

$$K(\beta) = \{A: A \subseteq N\}.$$

Доказательство. Если $\beta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 1$, то $\bar{x}_i = 1$. Поэтому любое $A \subseteq N$ оказывается слабо β -ИС множеством с соответствующей общерекурсивной функцией $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Следствие 1. Среди всех классов $K(\beta)$ класс $K(x \vee y)$ является наименьшим, а $K(xy)$ наибольшим.

Разумеется, ниже будут рассматриваться БФ с точностью до перестановки переменных. Классов $K(\beta)$ размерности 2 всего четыре:

$$K(x \vee y), \quad K(x \oplus y) = K(x\bar{y} \vee \bar{x}y), \quad K(x\bar{y}), \quad K(xy).$$

По лемме 4 $K(x\bar{y}) = K(xy)$. По следствию 1

$$K(x \vee y) \subset K(x \oplus y) \subset K(xy),$$

причем, как будет видно ниже, включения везде строгие. Авторами, с использованием определенной техники, были выписаны все (допустимые) БФ от трех переменных. Их (с точностью до перестановок переменных) оказалось 34.

Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Справедливо равенство

$$K(\beta) = K(xy),$$

если β — одна из следующих 8 БФ:

$$xyz, \quad x(y \vee z), \quad x(y \vee \bar{z}), \quad x(yz \vee \bar{y}\bar{z}), \quad xy\bar{z}, \quad x\bar{y}\bar{z}, \quad x(\bar{y} \vee \bar{z}), \quad x(\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z).$$

Положив $z = 0$, из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Лемма 6. Справедливо равенство

$$K(\beta) = K(x \vee y),$$

если β — одна из следующих 11 БФ:

$$x \vee y \vee z, \quad x \vee y\bar{z}, \quad x \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z, \quad x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y, \quad xy \vee \bar{z}(x \vee y) \vee \bar{x}\bar{y}z, \\ xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}, \quad x\bar{z} \vee \bar{x}y, \quad \bar{z}(x \vee y), \quad \bar{x}y \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z, \quad x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z, \quad x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z.$$

Отождествив z с y , из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Лемма 7. Справедливо равенство

$$K(\beta) = K(x \vee y),$$

если β — одна из следующих 5 БФ:

$$x \vee yz, \quad x\bar{z} \vee yz, \quad yz \vee x\bar{y}\bar{z}, \quad xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z, \quad yz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}.$$

Осталось рассмотреть следующие 10 БФ, к которым добавлены еще $xy, x \vee y$ и $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= x \vee y, \\ \beta_1 &= x \oplus y \oplus z = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz, \\ \beta_2 &= xy \vee xz \vee yz, \\ \beta_3 &= x \oplus y, \\ \beta_4 &= xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz, \\ \beta_5 &= xy, \\ \beta_6 &= x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz, \\ \beta_7 &= xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}, \\ \beta_8 &= x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z, \\ \beta_9 &= \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y), \\ \beta_{10} &= x\bar{y} \vee \bar{x}yz, \\ \beta_{11} &= x\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z}, \\ \beta_{12} &= x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}. \end{aligned}$$

Ниже вместо $K(\beta_i)$, $0 \leq i \leq 12$, пишем K_i .

Лемма 8. Справедливы равенства

$$K_3 = K_9 = K_{10} = K_{11} = K_{12}.$$

Доказательство. Так как $\beta_i \rightarrow \beta_3$ при $9 \leq i \leq 12$ суть тождественно истинные БФ, по лемме 3 $K_3 \subseteq K_i$. Но

$$\beta_9(x, y, 0) = \beta_{10}(x, y, y) = \beta_{11}(x, y, 0) = \beta_{12}(x, y, y) = \beta_3(x, y).$$

По лемме 3 $K_i \subseteq K_3$, и лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$K_3 = K_8.$$

Доказательство. Пусть A является слабо β_3 -ИС множеством с ЧРФ $f(x; y)$. Если из трех чисел x, y, z в точности одно принадлежит A , скажем x , то вычисляются $f(x, y)$ и $f(x, z)$ и оказываются равными x . Полагаем $g(x, y, z) = x$. В то же время

$$(f(x, y) = f(x, z) = x \ \& \ x \notin A \Rightarrow y, z \notin A) \Rightarrow \beta_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Если выяснится, что $f(y, x) = f(y, z) = y$ или $f(z, x) = f(z, y) = z$, то положим, соответственно $g(x, y, z) = y$ или $g(x, y, z) = z$. Иначе, считаем $g(x, y, z) \uparrow$. Ясно, что A будет слабо β_8 -ИС множеством с ЧРФ $g(x, y, z)$, то есть $K_3 \subseteq K_8$. С другой стороны, $K_8 \subseteq K_3$, так как $\beta_8(x, y, 0) = \beta_3(x, y)$, что и требовалось проверить.

Лемма 10. *Справедливо включение*

$$K_3 \subseteq K_4.$$

Доказательство. Пусть A является слабо β_3 -ИС множеством с ЧРФ $f(x, y)$. Если из трех чисел в точности два принадлежат A , скажем x и y , то должны вычисляться $f(x, z) = z$ и $f(y, z) = y$. Полагаем $g(x, y, z) = x$. В то же время

$$(f(x, z) = x \ \& \ f(y, z) = y \ \& \ x \notin A \Rightarrow z \notin A) \Rightarrow \beta_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0.$$

Если выяснится, что $f(x, y) = x$ и $f(z, y) = z$, то положим $g(x, y, z) = z$. Если же выяснится, что $f(y, x) = y$ и $f(z, x) = z$, то положим $g(x, y, z) = y$. Иначе, считаем $g(x, y, z) \uparrow$. Ясно, что A будет слабо β_4 -ИС множеством с ЧРФ $g(x, y, z)$, что и требовалось доказать.

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$K_3 = K_6.$$

Доказательство. Пусть A является слабо β_3 -ИС множеством с ЧРФ $f(x, y)$. Если $x = y$ или $x = z$ ($y = z$), то положим $g(x, y, z) = x$ (соответственно y). В противном случае, полагаем

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если первым вычислится значение } f(x, y), \\ f(x, z), & \text{если первым вычислится значение } f(x, z), \\ \uparrow, & \text{если } f(x, y) \uparrow \text{ и } f(x, z) \uparrow. \end{cases}$$

Легко проверить, что A оказывается слабо β_6 -ИС множеством с ЧРФ g . Значит, $K_3 \subseteq K_6$. Но $\beta_6(x, y, y) = \beta_3(x, y)$, что влечет включение $K_6 \subseteq K_3$.

Лемма 12. *Справедливо равенство*

$$K_1 = K_7.$$

Доказательство. Пусть A является слабо β_7 -ИС множеством с ЧРФ $f(x, y, z)$. Вычисляем одновременно $f(x, y, z)$ и $f(x, z, y)$. Если оба значения неопределены, то и $g(x, y, z) \uparrow$. Пусть первым вычислилось $f(x, y, z)$. Положим

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, z, y), & \text{если } f(x, y, z) = x, \\ f(y, z, x), & \text{если } f(x, y, z) = y, \\ z, & \text{если } f(x, y, z) = z. \end{cases}$$

Если же первым вычислилось $f(x, z, y)$, то пусть

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{если } f(x, z, y) = x, \\ y, & \text{если } f(x, z, y) = y, \\ f(z, y, x), & \text{если } f(x, z, y) = z. \end{cases}$$

Разумеется, если в правой части значение неопределено, то и $g(x, y, z) \uparrow$.

Утверждаем, что A оказывается слабо β_1 -ИС множеством с ЧРФ $g(x, y, z)$. Это понятно, если $x, y, z \in A$. Иначе, пусть, например, $y \in A$ и $x, z \notin A$. Тогда $f(x, y, z) \downarrow$ и $f(x, y, z) = y$. Если $f(x, y, z)$ будет вычислено первым, то $g(x, y, z) = f(y, z, x) = y$. Если же первым будет вычислено значение $f(x, z, y)$ и оно не равно y , то

$$f(x, y, z) \downarrow \& f(z, y, x) \downarrow \& (g(x, y, z) = f(x, y, z) = y = f(z, y, x)).$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Значит, $K_7 \subseteq K_1$. С другой стороны, $\beta_7 \rightarrow \beta_1$ — тождественно истинная формула. По лемме 3 $K_1 \subseteq K_7$, что и доказывает данную лемму.

Следствие 2. *Справедливы включения*

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_3 \subseteq K_4 \subseteq K_5, \quad K_0 \subseteq K_2 \subseteq K_4.$$

Доказательство. То, что K_0 и K_5 — наименьший и наибольший классы среди всех $K(\beta)$ следует из следствия 1. В частности, $K_0 \subseteq K_1$ и $K_0 \subseteq K_2$. Так как $\beta_1(x, y, 0) = \beta_3$, по лемме 2 $K_1 \subseteq K_3$. Но $\beta_4 \rightarrow \beta_2$ — тождественно истинная БФ и по лемме 3 $K_2 \subseteq K_4$. Наконец, по лемме 10 $K_3 \subseteq K_4$.

Результат следствия 2 изображен на диаграмме, приведенной на рис. 1.

Возникает серия вопросов: являются ли включения, указанные в следствии 2, строгими. Мы ответим на все вопросы утвердительно, за исключением включения $K_0 \subset K_1$. Если ответ на него также положителен, то остается открытым еще один вопрос: верно ли, что $K_1 \subseteq K_2$?

Предложение 1. *Существует множество B , не являющееся рекурсивно-перечислимым, и общерекурсивная функция f такие, что*

$$(\forall x, y, z)(|B \cap \{x, y, z\}| \geq 2 \Rightarrow f(x, y, z) \in B).$$

Кроме того, $B = {}_m\mathbf{N} \setminus B$.

Доказательство. Пусть A — нерекурсивное полурекурсивное множество [2],

$$B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x + 1 : x \notin A\}.$$

Рис. 1.

Ясно, что B — не рекурсивно-перечислимое множество и $B = {}_m\mathbf{N} \setminus B$, так как $2x \in B \iff 2x + 1 \in \mathbf{N} \setminus B$. Так как A полурекурсивное, существует селекторная общерекурсивная функция g такая, что

$$(\forall x, y)(x \in A \vee y \in A \iff g(x, y) \in A).$$

Пусть также $g'(x, y) = x$, если $g(x, y) = y$, и наоборот. Возьмем произвольные три числа. Если не менее двух из них равные, то положим $f(x, y, z)$, равной одному из этих равных чисел. Если же они разные, то не менее двух из них имеют одну и ту же четность. Предположим, что они суть $2u$ и $2v$. Положим $f(x, y, z) = 2g(u, v)$. Если же они имеют вид $2u + 1$ и $2v + 1$, то положим $f(x, y, z) = 2g'(u, v) + 1$. Нетрудно понять из определения B и свойств функции g , что f удовлетворяет условию предложения.

Следствие 3. *Справедливы соотношения*

$$K_2 \not\subseteq K_3, \quad K_4 \not\subseteq K_3.$$

Доказательство. Пусть A, B и f такие, как в предложении 1. Тогда B будет как слабо β_2 -ИС, так и слабо β_4 -ИС множеством даже с общерекурсивной функцией f . Предположим, что B является слабо β_3 -ИС множеством с ЧРФ $h(x, y)$. Тогда $h(2n, 2n + 1)$ всегда определено и

$$n \in A \iff h(2n, 2n + 1) = 2n.$$

Это противоречит нерекурсивности множества A .

Лемма 13. *Дополнение любого рекурсивно-перечислимого множества A является как слабо β_3 -ИС, так и слабо β_4 -ИС множеством.*

Доказательство. Ясно, что $\bar{A} = \mathbf{N} \setminus A$ будет слабо β_4 -ИС множеством со следующей ЧРФ f : имея три числа x, y и z перечисляем A , пока одно из них, например, x , не вычислится в A . Полагаем $f(x, y, z) = y$ (или z). Если же $x, y, z \in \bar{A}$, то $f(x, y, z) \uparrow$. Аналогично показывается, что $\bar{A}$ будет и слабо β_3 -ИС множеством.

Предложение 2. *Справедливо соотношение*

$$K_3 \not\subseteq K_1.$$

Доказательство. Для каждого n вычислим $\varphi_n(3n, 3n+1, 3n+2)$, где φ_n — трехместная ЧРФ с клиниевским номером n . Если

$$\varphi_n(3n, 3n+1, 3n+2) \in \{3n, 3n+1, 3n+2\},$$

то относим к A само значение $\varphi_n(3n, 3n+1, 3n+2)$. В противном случае числа $3n, 3n+1, 3n+2$ не принадлежат A .

Так как A — рекурсивно-перечислимое множество, по лемме 13 $\bar{A}$ является слабо β_3 -ИС множеством. Предположим, что $\bar{A}$ слабо β_1 -ИС множество с ЧРФ $f(x, y, z)$. Найдется номер n такой, что $f(x, y, z) = \varphi_n(x, y, z)$. Рассмотрим значение $y = \varphi_n(3n, 3n+1, 3n+2)$. Если оно не определено, то по построению $3n, 3n+1, 3n+2 \in \bar{A}$, а поэтому $\theta = \beta_1(\overline{3n}, \overline{3n+1}, \overline{3n+2}) = 1$. Следовательно, значение y определено и $y \in \{3n, 3n+1, 3n+2\}$. По построению в точности одно из трех $3n, 3n+1$ и $3n+2$, именно y , принадлежит A . Но это означает, что, хотя $\theta = 1$, но $y \in A$, что противоречит соответствию f множеству $\bar{A}$.

Предложение 3. *Справедливо соотношение*

$$K_5 \not\subseteq K_4.$$

Доказательство. Для каждого n , если $y = \varphi_n(3n, 3n+1, 3n+2) \downarrow$ и справедливо включение $y \in \{3n, 3n+1, 3n+2\}$, то число y относим к A . В противном случае к A относим число $3n$. Легко проверить, что $\bar{A} \notin K_4$, но $\bar{A} \in K_5$ по лемме 4.

Следствие 4. *Справедливы строгие включения*

$$K_1 \subset K_3 \subset K_4 \subset K_5, \quad K_0 \subset K_2 \subset K_4,$$

причем $K_2 \not\subseteq K_3$.

Список литературы

1. Дегтев А. Н., Импликативно селекторные множества. *Алгебра и логика* (1996) **35**, №2, 145–153.
2. Jockusch C. G., Owings J. C., Weakly semirecursive sets. *J. Symb. Logic* (1990) **55**, №2, 637–644.
3. Kummer M., Stephan F., Weakly semirecursive sets and r. e. orderings. *Ann. Pure and Appl. Logic* (1993) **60**, 133–150.

Статья поступила 11.05.97.

Переработанный вариант поступил 11.02.98.