Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Кравцов, А. П. Крачковский, О некоторых свойствах
трехиндексных транспортных многогранников, *Дискрет.
матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 109–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:26:36

УДК 519.10

О некоторых свойствах трехиндексных транспортных многогранников

© 1999 г. М. А. Кравцов, А. П. Крачковский

Для всякого трехиндексного планарного транспортного многогранника (3-ПТМ) M порядка $m \times n \times k$ размерности d указан трехиндексный аксиальный транспортный многогранник (3-АТМ) M' порядка $mk \times nk \times mn$, у которого найдена d -грань, комбинаторно эквивалентная многограннику M , и наоборот, для всякого 3-АТМ M порядка $m \times n \times k$ указан 3-ПТМ M' порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$, у которого найдена $(mnk - m - n - k + 2)$ -грань комбинаторно эквивалентная многограннику M . С помощью этих результатов получен ряд новых свойств, касающихся строения трехиндексных транспортных многогранников.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, проект Ф95-70.

1. Введение

Исследованию области определения p -индексных транспортных задач линейного программирования, имеющих большую сферу приложений в математической кибернетике, экономике и теории расписаний, посвящен ряд работ (см., например, [1–6]). Однако наиболее существенные и глубокие результаты получены лишь для случая, когда $p = 2$ [1, 3, 6–11].

В отличие от классической (двухиндексной) транспортной задачи, у которой матрица ограничений всегда унимодулярна, матрица ограничений многоиндексной транспортной задачи линейного программирования не является унимодулярной. Поэтому многоиндексный транспортный многогранник может иметь и нецелочисленные вершины при целочисленных исходных данных. Это, естественно, затрудняет нахождение целочисленных решений, превращая, например, проблему проверки целочисленной совместности трехиндексной планарной транспортной задачи в NP-полную [12]. Установлена также NP-полнота аксиальной и планарной трехиндексной проблемы выбора [13, 14]. Этим, в частности, объясняется большой интерес к свойствам и методам решения многоиндексных транспортных задач, который оправдывает неослабевающие усилия по исследованию структуры многогранников этого класса задач.

Настоящая работа посвящена исследованию полиэдральных аспектов трехиндексных планарных и аксиальных транспортных задач, то есть вопросов, связанных со строением областей определения таких задач. Найдены также оценки снизу

для максимального диаметра, радиуса, числа вершин и целочисленных вершин 3-ПТМ заданного порядка. Показано, что в классе 3-ПТМ порядка $m \times n \times k$, $m \geq 6$, $n \geq 4$, $k \geq 3$, определенных целочисленными матрицами, имеются многогранники, у которых нет ни одной целочисленной точки.

Сначала введем некоторые определения и обозначения, которыми будем пользоваться далее.

Трехиндексным планарным транспортным многогранником (3-ПТМ) порядка $m \times n \times k$, $m, n, k > 1$, называется область определения трехиндексной планарной транспортной задачи [1], то есть множество $M(A, B, C)$ матриц $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ijt} &= a_{it} \quad \forall (i, t) \in N_m \times N_k, \\ \sum_{i=1}^m x_{ijt} &= b_{jt} \quad \forall (j, t) \in N_n \times N_k, \\ \sum_{t=1}^k x_{ijt} &= c_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n, \\ x_{ijt} &\geq 0 \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k, \end{aligned}$$

где

$$A = \|a_{it}\|_{m \times k}, \quad B = \|b_{jt}\|_{n \times k}, \quad C = \|c_{ij}\|_{m \times n}$$

— матрицы с неотрицательными элементами, $N_p = \{1, 2, \dots, p\}$.

Наряду с $M(A, B, C)$ будем рассматривать трехиндексный аксиальный транспортный многогранник (3-АТМ) $M(a, b, c)$ порядка $m \times n \times k$, $m, n, k > 1$, представляющий собой множество матриц $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$, элементы которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^k x_{ijt} &= a_i \quad \forall i \in N_m, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^k x_{ijt} &= b_j \quad \forall j \in N_n, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ijt} &= c_t \quad \forall t \in N_k, \\ x_{ijt} &\geq 0 \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k, \end{aligned}$$

где

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$$

— векторы с действительными положительными компонентами,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{t=1}^k c_t.$$

Неопределяемые здесь термины и обозначения взяты из [1].

2. Аксиальное представление 3-ПТМ

В этом разделе для всякого 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$ размерности d указан 3-АТМ $M(a', b', c')$ порядка $mk \times nk \times mn$, у которого найдена d -грань комбинаторно эквивалентная многограннику $M(A, B, C)$. Такую d -грань будем называть аксиальным представлением 3-ПТМ $M(A, B, C)$. Здесь компоненты векторов

$$a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{mk}), \quad b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_{nk}), \quad c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_{mn})$$

определяются однозначно по элементам матриц A, B и C соответственно.

В самом деле, каждой паре (i, t) из множества $N_m \times N_k$ поставим в соответствие индекс $i_1 \in N_{mk}$ согласно формуле

$$i_1 = (i - 1)k + t. \quad (1)$$

Очевидно, что это соответствие взаимно однозначное. Действительно, для каждого индекса $i_1 \in N_{mk}$ соответствующая пара $(i, t) \in N_m \times N_k$ обозначается $i_1 \rightarrow (i, t)$ и определяется по формулам

$$i =]i_1/k[, \quad t = i_1 - (i - 1)k,$$

где $]h[$ — наименьшее целое число, не меньшее числа h .

Аналогично, парам $(j, t) \in N_n \times N_k$ и $(i, j) \in N_m \times N_n$ поставим в соответствие индексы $i_2 \in N_{nk}$ и $i_3 \in N_{mn}$, определяемые по формулам

$$i_2 = (j - 1)k + t, \quad i_3 = (i - 1)n + j. \quad (2)$$

Теперь по заданным матрицам A, B и C единственным образом определяются векторы a', b' и c' с помощью формул

$$a'_{i_1} = a_{it} \iff i_1 \rightarrow (i, t) \quad \forall i_1 \in N_{mk}, \quad (3)$$

$$b'_{i_2} = b_{jt} \iff i_2 \rightarrow (j, t) \quad \forall i_2 \in N_{nk}, \quad (4)$$

$$c'_{i_3} = c_{ij} \iff i_3 \rightarrow (i, j) \quad \forall i_3 \in N_{mn}. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$Q = N_{mk} \times N_{nk} \times N_{mn}.$$

С помощью формул (1) и (2), определим отображение

$$\gamma: N_m \times N_n \times N_k \rightarrow Q,$$

которое каждой тройке $(i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k$ ставит в соответствие некоторую тройку $(i_1, i_2, i_3) \in Q$. Обозначим через E множество значений отображения γ , т.е.

$$E = \{(i_1, i_2, i_3) \in Q: (i_1, i_2, i_3) = \gamma(i, j, t) \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k\}.$$

Лемма 1. *Отображение $\gamma: N_m \times N_n \times N_k \rightarrow E$ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Очевидно, что каждой тройке $(i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k$ соответствует единственная тройка $(i_1, i_2, i_3) \in E$. Теперь покажем обратное, то есть покажем, что любой тройке множества E соответствует единственная тройка множества

$N_m \times N_n \times N_k$. Зафиксируем некоторую тройку $(i_1^0, i_2^0, i_3^0) \in E$ и рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных i, j, t

$$\begin{aligned} ki + t &= i_1^0 + k, \\ kj + t &= i_2^0 + k, \\ ni + j &= i_3^0 + n. \end{aligned} \quad (6)$$

Определитель этой системы равен $-k(n+1)$. Следовательно, система (6) имеет единственное решение (i^0, j^0, t^0) , которое в силу определения множества E удовлетворяет условиям

$$i^0 \in N_m, \quad j^0 \in N_n, \quad t^0 \in N_k.$$

Лемма 1 доказана.

Положим $H = Q \setminus E$. Заметим, что множество H определяется однозначно в силу однозначности определения множества E , задаваемого формулами (1) и (2).

Введем в рассмотрение множество

$$M_H(a', b', c') = \{y = \|y_{i_1 i_2 i_3}\| \in M(a', b', c') : y_{i_1 i_2 i_3} = 0 \quad \forall (i_1, i_2, i_3) \in H\}.$$

Легко видеть, что это множество является некоторой гранью 3-АТМ, порядок которой равен $mk \times nk \times mn$.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$M(A, B, C) \neq \emptyset \iff M_H(a', b', c') \neq \emptyset.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть x — некоторая матрица 3-ПТМ $M(A, B, C)$. Используя лемму 1, по матрице x построим матрицу y согласно формуле

$$y_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} x_{ijt}, & \text{если } (i_1, i_2, i_3) \in E, \quad (i_1, i_2, i_3) = \gamma(i, j, t), \\ 0, & \text{если } (i_1, i_2, i_3) \in H. \end{cases} \quad (7)$$

Легко проверить, что $y \in M_H(a', b', c')$.

Докажем достаточность. Пусть y — некоторая матрица из множества $M_H(a', b', c')$. С помощью леммы 1 по матрице y построим матрицу x согласно формуле

$$x_{ijt} = y_{i_1 i_2 i_3}, \quad (i_1, i_2, i_3) = \gamma(i, j, t) \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что $x \in M(A, B, C)$. Лемма 2 доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что 3-ПТМ $M(A, B, C) \neq \emptyset$. Тогда в силу леммы 2 многогранник $M_H(a', b', c') \neq \emptyset$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\dim M(A, B, C) = \dim M_H(a', b', c').$$

Доказательство. Известно [1], что выпуклый многогранник M имеет размерность d тогда и только тогда, когда M содержит подмножество, состоящее из $d+1$ аффинно независимых точек, а любое подмножество $S \subset M$, состоящее из $d+2$ точек аффинно зависимо. Размерность пустого множества считается равной -1 .

Пусть $\dim M(A, B, C) = d$, а $\{x^1, x^2, \dots, x^{d+1}\}$ — аффинно независимое множество точек (матриц) многогранника $M(A, B, C)$. Тогда по формуле (7) определим множество $\{y^1, y^2, \dots, y^{d+1}\}$ точек (матриц) многогранника $M_H(a', b', c')$. Легко видеть, что из аффинной независимости множества $\{x^1, x^2, \dots, x^{d+1}\}$ следует аффинная независимость множества $\{y^1, y^2, \dots, y^{d+1}\}$. Поэтому

$$\dim M_H(a', b', c') \geq d.$$

Предположим, что $\dim M_H(a', b', c') > d$. Это означает, что найдется подмножество

$$\{\hat{y}^1, \hat{y}^2, \dots, \hat{y}^{d+2}\} \subset M_H(a', b', c'),$$

состоящее из $d + 2$ аффинно независимых точек. Тогда по формуле (8) определим множество точек

$$\{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{d+2}\} \subset M(A, B, C),$$

которое также является аффинно независимым. Но это противоречит условию, что $\dim M(A, B, C) = d$. Следовательно, $\dim M_H(a', b', c') = d$. Лемма 3 доказана.

Известно (см. [1]), что размерность всякого непустого 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \dim M(A, B, C) \leq (m-1)(n-1)(k-1),$$

причем нижняя и верхняя оценки являются достижимыми. В [15] показано, что любое число вида

$$(m-1)(n-1)(k-1) - m_1 n_1 k_1 - m_2 n_2 k_2 + 1,$$

где

$$m_1 + m_2 = m, \quad n_1 + n_2 = n, \quad k_1 + k_2 = k$$

и $m_1, m_2, n_1, n_2, k_1, k_2$ — целые неотрицательные числа, реализуется как размерность некоторого 3-ПТМ порядка $m \times n \times k$.

Напомним [1], что грань F многогранника $M(A, B, C)$ определяется следующим образом:

$$F = \{x \in M(A, B, C) : x_{ijt} = 0 \ \forall (i, j, t) \in P\},$$

где P — некоторое подмножество множества $N_m \times N_n \times N_k$. Если $\dim F = s$, то F называется s -гранью многогранника $M(A, B, C)$, а 0-границы называются вершинами многогранника $M(A, B, C)$, множество всех вершин обозначаем через $\text{vert } M(A, B, C)$.

Аналогично задается грань многогранника $M_H(a', b', c')$.

Пусть задано отображение

$$\psi: M(A, B, C) \rightarrow M_H(a', b', c'),$$

которое каждой матрице $x \in M(A, B, C)$ по формуле (7) ставит в соответствие матрицу $y \in M_H(a', b', c')$.

Теорема 1. *Отображение $\psi: M(A, B, C) \rightarrow M_H(a', b', c')$ обладает следующими свойствами:*

(1) ψ — взаимно однозначное отображение, имеющее обратное отображение

$$\psi^{-1}: M_H(a', b', c') \rightarrow M(A, B, C),$$

определяемое по формуле (8);

(2) точка x является вершиной многогранника $M(A, B, C)$ тогда и только тогда, когда $\psi(x)$ — вершина многогранника $M_H(a', b', c')$;

(3) множество F является гранью многогранника $M(A, B, C)$ тогда и только тогда, когда $\psi(F)$ — грань многогранника $M_H(a', b', c')$.

Доказательство. Справедливость первого свойства непосредственно следует из формул (7) и (8).

Установим справедливость второго свойства. Сначала докажем импликацию

$$x \in \text{vert } M(A, B, C) \Rightarrow \psi(x) \in \text{vert } M_H(a', b', c').$$

Допустим, что для некоторой вершины $x^0 \in \text{vert } M(A, B, C)$ ее образ $\psi(x^0)$ не является вершиной многогранника $M_H(a', b', c')$. Тогда точка $\psi(x^0)$ представима в виде выпуклой комбинации некоторых вершин $y^1, y^2, \dots, y^r$ многогранника $M_H(a', b', c')$, то есть

$$\psi(x^0) = \sum_{i=1}^r \lambda_i y^i,$$

где

$$r \geq 2, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i \in N_r.$$

Отсюда, учитывая свойство 1 теоремы, получаем, что в многограннике $M(A, B, C)$ существует последовательность вершин

$$x^i = \psi^{-1}(y^i) \quad \forall i \in N_r,$$

для которой справедливо равенство

$$x^0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i.$$

Но это противоречит предположению, что $x^0 \in \text{vert } M(A, B, C)$. Следовательно, $\psi(x^0) \in \text{vert } M_H(a', b', c')$.

Аналогично доказывается обратная импликация

$$\psi(x) \in \text{vert } M_H(a', b', c') \Rightarrow x \in \text{vert } M(A, B, C).$$

Таким образом свойство 2 доказано.

Теперь докажем третье свойство. На основании только что доказанного свойства 2 теоремы достаточно доказать свойство 3 для d -граней, $d \geq 1$, многогранников $M(A, B, C)$ и $M_H(a', b', c')$. Сначала докажем, что если F — грань многогранника $M(A, B, C)$, то $\psi(F)$ — грань многогранника $M_H(a', b', c')$.

Предположим, что для некоторой грани F^0 многогранника $M(A, B, C)$ множество $\psi(F^0)$, принадлежащее многограннику $M_H(a', b', c')$, не является гранью. Тогда

в множестве $\psi(F^0)$ найдется матрица y^0 , а в множестве $\text{vert } M_H(a', b', c')$ последовательность вершин

$$y^i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad l \geq 2, \quad \{y^1, y^2, \dots, y^l\} \setminus \text{vert } M_H(a', b', c') \cap \psi(F^0) \neq \emptyset,$$

такие, что справедливо представление

$$y^0 = \sum_{i=1}^l \lambda_i y^i,$$

где

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i \in N_l.$$

Отсюда в силу свойств 1 и 2 теоремы получаем, что в грани F^0 есть матрица $x^0 = \psi^{-1}(y^0)$, а в множестве $\text{vert } M(A, B, C)$ вершины

$$x^i = \psi^{-1}(y^i) \quad \forall i \in N_l, \quad \{x^1, x^2, \dots, x^l\} \setminus \text{vert } F^0 \neq \emptyset,$$

для которых выполняется равенство

$$x^0 = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^i.$$

Но это противоречит предположению, что F^0 — грань многогранника $M(A, B, C)$. Следовательно, $\psi(F^0)$ — грань многогранника $M_H(a', b', c')$.

Аналогично доказывается, что если $\psi(F)$ — грань многогранника $M_H(a', b', c')$, то F — грань многогранника $M(A, B, C)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Многогранник $M_H(a', b', c')$ порядка $mk \times nk \times mp$ всегда является вырожденным.*

Напомним [1, 16], что два многогранника M и M' называются комбинаторно эквивалентными (обозначается $M \cong M'$), если между множествами их граней всех размерностей существует взаимно однозначное отображение φ , сохраняющее операцию включения, то есть

$$F_1 \subset F_2 \iff (F_1) \subset (F_2)$$

для любых множеств граней F_1, F_2 многогранника M .

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$M(A, B, C) \cong M_H(a', b', c').$$

Важность этой теоремы состоит, в частности, в том, что задача нахождения экстремума линейной функции на 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$ может быть сведена к решению аналогичной задачи на многограннике $M_H(a', b', c')$ порядка $mk \times nk \times mp$ (см. [2]).

Доказательство. Определим отображение φ между множествами граней всех размерностей многогранников $M(A, B, C)$ и $M_H(a', b', c')$, ставя в соответствие каждой грани F многогранника $M(A, B, C)$ грань $\varphi(F)$ многогранника $M_H(a', b', c')$, совпадающую с образом грани F при отображении ψ (см. свойство 3 теоремы 1).

На основании теоремы 1 отображение φ является взаимно однозначным. Более того, из свойства 2 теоремы 1 следует, что для любых двух различных граней F_1 и F_2 многогранника $M(A, B, C)$ справедливо утверждение

$$\text{vert } F_1 \subset \text{vert } F_2 \iff \text{vert } \psi(F_1) \subset \text{vert } \psi(F_2).$$

Отсюда, учитывая, что любая грань многогранника есть выпуклая оболочка своих вершин, заключаем, что отображение φ сохраняет операцию включения.

Теорема 2 доказана.

Поскольку множество $M_H(a', b', c')$ представляет собой d -грань 3-АТМ $M(a', b', c')$, где $d = \dim M(A, B, C)$ (см. лемму 3), на основании теоремы 2 $M_H(a', b', c')$ — аксиальное представление 3-ПТМ $M(A, B, C)$.

Из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Граф 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $t \times n \times k$ изоморфен графу многогранника $M_H(a', b', c')$ порядка $tk \times nk \times tn$.

С помощью теоремы 2 легко устанавливаются следующие свойства, касающиеся комбинаторно эквивалентных многогранников $M(A, B, C)$ и $M_H(a', b', c')$:

- (1) $\dim F = \dim \varphi(F)$ и $F \cong \varphi(F)$;
- (2) $f_s(M(A, B, C)) = f_s(M_H(a', b', c'))$, $s = 0, 1, 2, \dots, d-1$, где $d = \dim M(A, B, C)$;
- (3) $\text{diam } M(A, B, C) = \text{diam } M_H(a', b', c')$;
- (4) $r(M(A, B, C)) = r(M_H(a', b', c'))$.

Здесь $f_s(M)$, $\text{diam } M$ и $r(M)$ обозначают соответственно число s -граней, диаметр и радиус многогранника M .

Известно [1], что среди 3-ПТМ порядка $t \times n \times k$ существуют $(t-1)(n-1)(k-1)$ -симплексы. Поэтому из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Среди 3-АТМ порядка $tk \times nk \times tn$ существуют многогранники, у которых найдется $(t-1)(n-1)(k-1)$ -грань, являющаяся симплексом.

3. Планарное представление 3-АТМ

В данном разделе для всякого 3-АТМ $M(a, b, c)$ порядка $t \times n \times k$ указан 3-ПТМ $M(A', B', C')$ порядка $(t+1) \times (n+1) \times (k+1)$, у которого найдена $(tnk - t - n - k + 2)$ -

грань комбинаторно эквивалентная многограннику $M(a, b, c)$, где

$$A' = \begin{bmatrix} R & R & \dots & R & nR - a_1 \\ R & R & \dots & R & nR - a_2 \\ & & \dots & & \\ R & R & \dots & R & nR - a_m \\ nR - c_1 & nR - c_2 & \dots & nR - c_k & R \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} R & R & \dots & R & mR - b_1 \\ R & R & \dots & R & mR - b_2 \\ & & \dots & & \\ R & R & \dots & R & mR - b_n \\ mR - c_1 & mR - c_2 & \dots & mR - c_k & R \end{bmatrix},$$

$$C' = \begin{bmatrix} R & R & \dots & R & kR - a_1 \\ R & R & \dots & R & kR - a_2 \\ & & \dots & & \\ R & R & \dots & R & kR - a_m \\ kR - b_1 & kR - b_2 & \dots & kR - b_n & R \end{bmatrix},$$

$$R \geq \max\{a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_k\}.$$

Такую $(mnk - m - n - k + 2)$ -грань будем называть планарным представлением 3-АТМ $M(a, b, c)$.

Имеется глубокая аналогия между материалами настоящего и предыдущего разделов. Поэтому однотипные доказательства будем опускать, уделив больше внимания специфическим особенностям.

Введем обозначение

$$G = \{(m+1, n+1, t) : t \in N_k\} \cup \{(m+1, j, k+1) : j \in N_n\} \cup \{(i, n+1, k+1) : i \in N_m\}.$$

Очевидно, что непустое множество

$$M_G(A', B', C') = \{y = \|y_{ijt}\| \in M(A', B', C') : y_{ijt} = 0 \forall (i, j, t) \in G, y_{m+1, n+1, k+1} = R\}$$

образует некоторую грань многогранника $M(A', B', C')$.

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$M_G(A', B', C') \neq \emptyset \iff \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{t=1}^k c_t.$$

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{t=1}^k c_t.$$

Тогда $M(a, b, c) \neq \emptyset$. Возьмем некоторую матрицу $x = \|x_{ijt}\| \in M(a, b, c)$ и по ее

элементам построим матрицу $y = \|y_{ijt}\|_{(m+1) \times (n+1) \times (k+1)}$ согласно формуле

$$y_{ijt} = \begin{cases} x_{ijt}, & \text{если } (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k, \\ R - \sum_{s=1}^m x_{sjt}, & \text{если } i = m+1, (j, t) \in N_n \times N_k, \\ R - \sum_{s=1}^n x_{ist}, & \text{если } j = n+1, (i, t) \in N_m \times N_k, \\ R - \sum_{s=1}^k x_{ijs}, & \text{если } t = k+1, (i, j) \in N_m \times N_n, \\ 0, & \text{если } (i, j, t) \in G \\ R, & \text{если } i = m+1, j = n+1, t = k+1. \end{cases} \quad (9)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что построенная по формуле (9) матрица $y \in M_G(A', B', C')$. Достаточность в утверждении леммы 4 доказана.

Докажем необходимость. Возьмем некоторую матрицу $y = \|y_{ijt}\| \in M_G(A', B', C')$ и по ее элементам построим матрицу $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$ согласно формуле

$$x_{ijt} = y_{ijt} \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что определенная таким образом матрица x принадлежит многограннику $M(a, b, c)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\dim M_G(A', B', C') = mnk - m - n - k + 2.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 3, получим равенство

$$\dim M_G(A', B', C') = \dim M(a, b, c).$$

Теперь, учитывая, что $\dim M(a, b, c) = mnk - m - n - k + 2$ (см. [1]), убеждаемся в справедливости леммы 5.

Пусть задано отображение $\theta: M(a, b, c) \rightarrow M_G(A', B', C')$, которое каждой матрице $x \in M(a, b, c)$ по формуле (9) ставит в соответствие матрицу $y \in M_G(A', B', C')$.

Теорема 3. *Отображение $\theta: M(a, b, c) \rightarrow M_G(A', B', C')$ обладает следующими свойствами:*

- (1) θ — взаимно однозначное отображение, имеющее обратное отображение $\theta^{-1}: M_G(A', B', C') \rightarrow M(a, b, c)$, определяемое формулой (10);
- (2) точка x является вершиной многогранника $M(a, b, c)$ тогда и только тогда, когда $\theta(x)$ — вершина многогранника $M_G(A', B', C')$;
- (3) множество F является гранью многогранника $M(a, b, c)$ тогда и только тогда, когда $\theta(F)$ — грань многогранника $M_G(A', B', C')$.

Теорема 3 доказывается так же, как и теорема 1.

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Многогранник $M_G(A', B', C')$ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$ всегда является вырожденным.*

Теорема 4. *Справедливо соотношение*

$$M(a, b, c) \cong M_G(A', B', C').$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Отметим, что теорема 4 позволяет свести нахождение экстремума линейной функции на 3-АТМ $M(a, b, c)$ порядка $m \times n \times k$ к решению аналогичной задачи на многограннике $M_G(A', B', C')$ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$. На принципиальную возможность такого сведения ранее указывалось в [17].

На основании леммы 5 и теоремы 4 множество $M_G(A', B', C')$ есть планарное представление 3-АТМ $M(a, b, c)$.

Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Граф 3-АТМ $M(a, b, c)$ порядка $m \times n \times k$ изоморфен графу многогранника $M_G(A', B', C')$ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$.*

На основании теоремы 4 и следствия 5 получаем следующие свойства:

- (1) $\dim F = \dim \tau(F)$ и $F \cong \tau(F)$;
- (2) $f_s(M(a, b, c)) = f_s(M_G(A', B', C'))$, $s = 0, 1, 2, \dots, mnk - m - n - k + 1$;
- (3) $\text{diam } M(a, b, c) = \text{diam } M_G(A', B', C')$;
- (4) $r(M(a, b, c)) = r(M_G(A', B', C'))$.

Здесь τ — отображение между множествами граней всех размерностей многогранников $M(a, b, c)$ и $M_G(A', B', C')$.

4. Оценка снизу максимального числа вершин 3-ПТМ

Для двух 3-ПТМ $M(A_0, B_0, C_0)$ и $M(A_1, B_1, C_1)$ одного и того же порядка рассмотрим матрицы:

$$A_\lambda = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_0, \quad B_\lambda = \lambda B_1 + (1 - \lambda)B_0, \quad C_\lambda = \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_0,$$

где $\lambda \in [0, 1]$.

Спектром многогранников $M(A_0, B_0, C_0)$ и $M(A_1, B_1, C_1)$ назовем множество $S(A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1)$ всех чисел $\lambda \in (0, 1)$, для каждого из которых $M(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda)$ — вырожденный многогранник.

Описание класса всех 3-ПТМ заданного порядка с максимальным числом вершин дает следующая теорема.

Теорема 5 ([10]). *3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$, $m, n \geq 3, k \geq 2$, имеет максимальное число вершин тогда и только тогда, когда он невырожден и спектр $S(A, B, C, A^*, B^*, C^*) = \emptyset$, где*

$$A^* = \begin{bmatrix} n & \dots & n \\ n & \dots & n \\ & \dots & \\ n & \dots & n \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} m & \dots & m \\ m & \dots & m \\ & \dots & \\ m & \dots & m \end{bmatrix} \quad C^* = \begin{bmatrix} k & \dots & k \\ k & \dots & k \\ & \dots & \\ k & \dots & k \end{bmatrix}.$$

Отыскание максимального числа $\varphi(m, n, k)$ вершин 3-ПТМ порядка $m \times n \times k$ представляет собой трудную задачу. Найти явную формулу даже для максимального числа $\varphi(n, k)$ вершин классического транспортного многогранника порядка $n \times k$ до сих пор не удалось. Известно [18], что

$$\varphi(n, k) \geq k\varphi(n-1, k), \quad n, k \geq 2.$$

Следующая теорема дает рекуррентное неравенство, связывающее числа $\varphi(m, n, k)$ и $\varphi(m-1, n, k)$.

Теорема 6. *Справедливо неравенство*

$$\varphi(m, n, k) \geq \varphi(n, k)\varphi(m-1, n, k).$$

Это утверждение в случае, когда $k = 2$, впервые доказано в [19]. Там же была выведена формула

$$\varphi(2, n, 2) = \varphi(n, 2) = \binom{n}{[n/2]}(n - [n/2]).$$

Доказательство теоремы 6. Пусть $M(A, B, C)$ — 3-ПТМ порядка $(m-1) \times n \times k$, для числа вершин которого справедливо равенство

$$f_0(M(A, B, C)) = \varphi(m-1, n, k). \quad (11)$$

Наряду с $M(A, B, C)$ рассмотрим 3-ПТМ $M(A', B', C')$ порядка $m \times n \times k$, заданный матрицами A', B' и C' , элементы которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a'_{it} &= a_{it} & \forall (i, t) \in N_{m-1} \times N_k, \\ a'_{mt} &= \alpha n/k & \forall t \in N_k, \\ b'_{1t} &= b_{1t} + \frac{\alpha - (n-1)\beta}{k} & \forall t \in N_k, \\ b'_{jt} &= b_{jt} + \frac{\alpha + \beta}{k}, & j = 2, 3, \dots, n \quad \forall t \in N_k, \\ c'_{ij} &= c_{ij} & \forall (i, j) \in N_{m-1} \times N_n, \\ c'_{m1} &= \alpha - (n-1)\beta, \\ c'_{mj} &= \alpha + \beta, & j = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

где α , β и β/α — сколь угодно малые положительные числа.

Пусть $M(c, a)$ — классический транспортный многогранник порядка $n \times k$, определенный векторами

$$c = (\alpha - (n-1)\beta, \alpha + \beta, \dots, \alpha + \beta), \quad a = (\alpha n/k, \dots, \alpha n/k)$$

размера n и k соответственно.

Прежде всего заметим, что

$$M(A, B(y), C) \neq \emptyset \quad \forall y \in \text{vert } M(c, a),$$

где $B(y) = B' - y$.

Зафиксируем какую-нибудь вершину $y = \|y_{jt}\|_{n \times k} \in \text{vert } M(c, a)$. Пусть $x = \|x_{ijt}\|_{(m-1) \times n \times k}$ — произвольная вершина многогранника $M(A, B(y), C)$. Тогда, очевидно, матрица $z = \|z_{ijt}\|_{m \times n \times k}$ с элементами

$$z_{ijt} = \begin{cases} x_{ijt}, & \text{если } i \in N_{m-1}, j \in N_n, t \in N_k, \\ y_{jt}, & \text{если } i = m, j \in N_n, t \in N_k \end{cases}$$

является вершиной многогранника $M(A', B', C')$. Поэтому справедливо неравенство

$$f_0(M(A', B', C')) \geq \sum_{y \in \text{vert } M(c, a)} f_0(M(A, B(y), C)). \quad (12)$$

Поскольку α, β и β/α — сколь угодно малые положительные числа, выполняются равенства

$$S(A, B, C, A, B(y), C) = \emptyset \quad \forall y \in \text{vert } M(c, a).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (11), получаем соотношения

$$S(A, B(y), C, A^*, B^*, C^*) = \emptyset \quad \forall y \in \text{vert } M(c, a).$$

Поэтому согласно теореме 5

$$f_0(M(A, B(y), C)) = \varphi(m-1, n, k) \quad \forall y \in \text{vert } M(c, a). \quad (13)$$

Теперь, подставляя (13) в (12) и учитывая равенство $f_0(M(c, a)) = \varphi(n, k)$ (см. теорему 7.1 в [1]), убеждаемся в справедливости теоремы 6.

Так как $\varphi(1, n, k) = \varphi(n, k)$, из теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Справедливо неравенство*

$$\varphi(m, n, k) \geq \max\{(\varphi(n, k))^m, (\varphi(m, k))^n, (\varphi(m, n))^k\}.$$

Из теоремы 2 и следствия 6 получаем следующее утверждение.

Следствие 7. *Среди 3-АТМ порядка $mk \times nk \times tn$ имеются многогранники, у которых найдется $(m-1)(n-1)(k-1)$ -грань, содержащая по крайней мере $(\varphi(n, k))^m$ вершин.*

5. Оценка снизу максимального числа целочисленных вершин 3-ПТМ

Так как всякий 3-ПТМ порядка $m \times n \times 2$, определенный целочисленными матрицами, является целочисленным, то есть все его вершины целочисленные [1], на основании теоремы 2 получаем следующий результат: среди 3-АТМ порядка $2m \times 2n \times tn$ существуют многогранники, у которых найдется целочисленная $(m-1)(n-1)$ -грань.

Через $f_0^z(M(A, B, C))$ будем обозначать число целочисленных вершин 3-ПТМ $M(A, B, C)$, определенного целочисленными матрицами A, B и C .

Теорема 7. *Максимальное число целочисленных вершин в классе 3-ПТМ порядка $m \times n \times n$ не меньше $(n!)^{m-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times n$, определенный матрицами

$$A = C = \begin{bmatrix} (n-1)m+1 & (n-1)m+1 & \dots & (n-1)m+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} m & m & \dots & m \\ m & m & \dots & m \\ & & \dots & \\ m & m & \dots & m \end{bmatrix}.$$

Наряду с многогранником $M(A, B, C)$ рассмотрим классические транспортные многогранники $M(a^t, b^t)$, $t \in N_n$, порядка $m \times n$, каждый из которых определен векторами

$$a^t = (m(n-1) + 1, 1, 1, \dots, 1), \quad b^t = (m, m, \dots, m).$$

Для любого числа $t \in N_n$ и любой вершины $x^t = \|x_{ij}^t\|_{m \times n}$ многогранника $M(a^t, b^t)$ справедливы неравенства $x_{1j}^t > 0$, $j \in N_n$. Следовательно, так как число положительных компонент вершины x^t не превосходит $m+n-1$, в строке с любым номером i , $i = 2, \dots, m$, имеется только одна положительная компонента (равная единице), и она может находиться в любом столбце. Номер этого столбца будем обозначать через j_i^t .

Пусть для любых двух чисел $t_1, t_2 \in N_n$, $t_1 \neq t_2$, имеет место соотношение

$$\{(2, j_2^{t_1}), (3, j_3^{t_1}), \dots, (m, j_m^{t_1})\} \cap \{(2, j_2^{t_2}), (3, j_3^{t_2}), \dots, (m, j_m^{t_2})\} = \emptyset. \quad (14)$$

Отсюда с учетом равенств

$$c_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m, \quad \forall j \in N_n,$$

закключаем, что матрица $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times n}$ с компонентами

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_i^t, \\ 0, & \text{если } j \neq j_i^t, \quad i = 2, \dots, m, \quad \forall t \in N_n, \end{cases}$$

$$x_{1jt} = m - \sum_{i=2}^m x_{ijt} \quad \forall j \in N_n, \quad \forall t \in N_n,$$

является целочисленной вершиной 3-ПТМ $M(A, B, C)$. Поскольку число $(m-1)$ -выборок $\{j_2^t, j_3^t, \dots, j_m^t\}$, $t \in N_n$, для которых выполняется условие (14), равно $\prod_{t=1}^n (n-t+1)^{m-1}$, легко убедиться в том, что

$$f_0^z(M(A, B, C)) \geq \prod_{t=1}^n (n-t+1)^{m-1} = (n!)^{m-1}.$$

Теорема 7 доказана.

Из теорем 2 и 7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 8. Среди 3-АТМ порядка $mn \times n^2 \times mn$, заданных целочисленными векторами, имеются многогранники, у которых найдется $(m-1)(n-1)(n-1)$ -грань, содержащая по меньшей мере $(n!)^{m-1}$ целочисленных вершин.

6. Теорема о существовании 3-ПТМ, не содержащего целочисленных точек

Теорема 8. В классе 3-ПТМ порядка $m \times n \times k$, $m \geq 6$, $n \geq 4$, $k \geq 3$, определенных целочисленными матрицами, имеются многогранники, у которых каждая точка является нецелочисленной.

Доказательство. Рассмотрим 3-ПТМ $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$, $m \geq 6$, $n \geq 4$, $k \geq 3$, определенный матрицами

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} n-4 & n-4 & \dots & n-4 \\ n-4 & n-4 & \dots & n-4 \\ & & \dots & \\ n-4 & n-4 & \dots & n-4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} m-6 & m-6 & \dots & m-6 \\ m-6 & m-6 & \dots & m-6 \\ & & \dots & \\ m-6 & m-6 & \dots & m-6 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} k-3 & k-3 & \dots & k-3 \\ k-3 & k-3 & \dots & k-3 \\ & & \dots & \\ k-3 & k-3 & \dots & k-3 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что нецелочисленная точка $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$, где

$$\|x_{ijt}\|_{m \times n} = \begin{bmatrix} x^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = 1, 2, 3,$$

$$\|x_{ijt}\|_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^* \end{bmatrix}, \quad t = 4, 5, \dots, k,$$

где

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

принадлежит многограннику $M(A, B, C)$.

Так как для любой точки $x = \|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$ многогранника $M(A, B, C)$ справедливости равенства

$$x_{ijt} = 0 \quad \forall i \in N_6, \quad j = 5, 6, \dots, n, \quad \forall t \in N_k, \quad (15)$$

$$x_{ijt} = 0, \quad i = 7, 8, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad t \in N_k, \quad (16)$$

$$x_{ijt} = 0 \quad \forall i \in N_6, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad t = 4, 5, \dots, k, \quad (17)$$

$$x_{ijt} = 0 \quad i = 7, 8, \dots, m, \quad j = 5, 6, \dots, n, \quad t = 1, 2, 3, \quad (18)$$

многогранник $M(A, B, C)$ представим единственным образом в виде произведения многогранников $M(A_1, B_1, C_1)$, $M(A_2, B_2, C_2)$ и четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$M(A, B, C) = M(A_1, B_1, C_1) \otimes M(A_2, B_2, C_2) \otimes P_1 \otimes P_2 \otimes P_3 \otimes P_4,$$

где P_1, P_2, P_3, P_4 — точки с координатами (15), (16), (17), (18) соответственно. Поэтому для существования целочисленной точки в многограннике $M(A, B, C)$ необходимо и достаточно, чтобы многогранники $M(A_1, B_1, C_1)$ и $M(A_2, B_2, C_2)$ имели целочисленные точки. Отсюда получаем утверждение нашей теоремы, поскольку известно [20], что многогранник $M(A_1, B_1, C_1)$ не имеет ни одной целочисленной точки. Теорема 8 доказана.

Так как многогранник $M(A_1, B_1, C_1)$ вырождается в точку, на основании теорем 2 и 8 получаем следующее утверждение.

Следствие 9. Среди 3-АТМ порядка $mk \times nk \times tn$, $m \geq 6$, $n \geq 4$, $k \geq 3$, заданных целочисленными векторами, имеются многогранники, среди граней которых найдется $(m-7)(n-5)(k-4)$ -грань, все вершины которой являются нецелочисленными.

7. Диаметр и радиус 3-ПТМ

Известно [6], что всякое целое число вида $n+k-2+t$, где $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, реализуется и как диаметр, и как радиус некоторого 3-АТМ порядка $m \times n \times k$, $m \geq n \geq k$, $m \geq 4$, $n \geq 3$. Поэтому на основании теоремы 4 получаем следующий результат.

Теорема 9. Всякое целое число вида $n+k-2+t$, где $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, реализуется и как диаметр, и как радиус некоторого 3-ПТМ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$, $m \geq n \geq k$, $m \geq 4$, $n \geq 3$.

В [1] показано, что всякое целое число γ , $tnk - nk + n + k - 1 \leq \gamma \leq tnk$, может быть числом фасет (граней максимальной размерности) некоторого 3-ПТМ порядка $m \times n \times k$, $m = \max(m, n, k)$.

Следствием теорем 4 и 4 из [6] является следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть $m \geq 4$, $n \geq 3$. Тогда

- максимальный диаметр, так же, как и максимальный радиус, в классе 3-ПТМ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$ с $tnk - n + t$ фасетами не меньше $n+k-2+t$, если $t = 0, 1, \dots, m-2, m$;
- максимальный диаметр в классе 3-ПТМ порядка $(m+1) \times (n+1) \times (k+1)$ с $tnk - 1$ фасетами не меньше $m+n+k-3$, а максимальный радиус в том же классе не меньше $m+n+k-4$.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
2. Раскин Л. Г., Кириченко И. О., *Многоиндексные задачи линейного программирования*. Радио и связь, Москва, 1982.
3. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 3–24.
4. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П., Многоиндексные планарные транспортные многогранники с максимальным числом вершин. *Дискретная математика* (1992) **4**, №1, 3–18.
5. Bolker E. D., Simplicial geometry and transportation polytopes. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1976) **217**, 121–142.
6. Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты многоиндексных транспортных задач с аксиальными суммами. *Докл. АН СССР* (1990) **315**, №6, 1298–1302.
7. Емеличев В. А., Кравцов М. К., О некоторых свойствах транспортных многогранников с максимальным числом вершин. *Докл. АН СССР* (1976) **228**, №5, 1025–1028.
8. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П., О некоторых классах транспортных многогранников. *Докл. АН СССР* (1978) **241**, №3, 532–535.
9. Кравцов М. К., Диаметр и радиус транспортного многогранника. *Докл. АН СССР* (1983) **270**, №2, 278–281.
10. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П., Транспортные многогранники с максимальным числом k -граней. *Докл. АН СССР* (1985) **282**, №4, 784–788.
11. Кравцов М. К., Полиэдральные аспекты транспортных задач. *Докл. АН СССР* (1989) **309**, №2, 271–275.
12. Even S., Itai A., Shamir A., On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM J. Comput.* (1976) **5**, №4, 691–703.
13. Balas E., Saltzman M.J., Facets of the three-index assignment polytope. *Discrete Appl. Math.* (1989) **23**, №3, 201–229.
14. Frieze A. M., Complexity of a 3-dimensional assignment problem. *Europ. J. Oper. Research* (1983) №13, 161–164.
15. Korsnikov A. D., Burkard R. E., On the dimension of polytopes of planar three-index. *Optimization* (1989) **20**, №1, 107–116.
16. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Полиэдральные аспекты дискретной оптимизации. *Кибернетика* (1982) №6, 54–62.
17. Haley K., The multi-index problem. *Operat. Res.* (1963) **11**, №3, 369–379.
18. Klee V., Witzgall C., Facets and vertices of transportation polytopes. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1968), 257 – 282.
19. Кравцов М. К., Усеченные транспортные многогранники с максимальным числом вершин. *Вестн АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук* (1993) №3, 30–34.
20. Vlach M., Conditions for the existence of solutions of the three-dimensional planar transportation problem. *Discrete Appl. Math.* (1986) **13**, 61–78.

Статья поступила 12.01.1998.