Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Маканин, Т. А. Маканина, Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 133–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:23:34

УДК 519.4

Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде

© 1999 г. Г. С. Маканин, Т. А. Маканина

Вводятся параметризующие функции Fa , La , Do , зависящие от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных переменных. С помощью параметризующих функций Fa , La , Do описываются конечные формулы для семейства решений уравнения

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 = x_4^2$$

в свободном моноиде.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98-01-00885.

1. Введение

Параметризовать решения уравнения в свободном моноиде — это значит выписать общее решение (множество всех решений) этого уравнения при помощи конечных формул, зависящих от параметров. В 1967 году Хмелевский [1] показал, что множество всех решений уравнения с тремя неизвестными в свободном моноиде может быть параметризовано конечным числом формул, зависящих от словарных переменных и натуральных переменных. Такая параметризация теперь называется примитивной. В 1971 году Хмелевский [2] доказал, что множество всех решений уравнения Маркова

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_4 x_1$$

в свободном моноиде не допускает примитивной параметризации.

В дальнейшем [3–5] для параметризации решений уравнения в свободном моноиде стали использовать параметризующие функции, зависящие от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных переменных.

При исследовании структуры решения произвольного уравнения в свободном моноиде важную роль играют уравнения квадратов, то есть уравнения вида

$$x_1^2 x_2^2 \dots x_r^2 = x_{r+1}^2 x_{r+2}^2 \dots x_n^2.$$

В настоящей статье исследуются три уравнения квадратов в свободном моноиде. Доказано, что уравнения

$$x_1^2 x_2^2 = x_3^2$$

и

$$x_1^2 x_2^2 = x_3^2 x_4^2$$

допускают примитивную параметризацию своих решений. Для параметризации решений уравнения

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 = x_4^2$$

в свободном моноиде в статье определены рекурсивные функции

$$\begin{aligned} Fa(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, \quad s \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ La(x_1, x_2, x_3, x_4)_i^{\mu_1, \dots, \mu_s}, \quad s \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ Do(x_1, x_2, x_3, x_4)_i^{\nu_1, \dots, \nu_s}, \quad s \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

зависящие от словарных переменных x_i и рекурсивно от конечных последовательностей: натуральных переменных λ_i , переменных μ_i для последовательностей переменных λ_i и переменных ν_i для последовательностей переменных μ_i . Показано, каким образом множество всех решений уравнения

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 = x_4^2$$

в свободном моноиде параметризуется конечными формулами, построенными при помощи параметризующих функций Fa , La , Do .

2. Определения и обозначения

Пусть Π — свободный моноид (свободная полугруппа с единицей) со счетным алфавитом образующих

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \quad (1)$$

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (2)$$

— алфавит словарных переменных.

Уравнение в свободном моноиде задается равенством слов $\Phi = \Psi$ в алфавите (1), (2). Слова в алфавите (1), входящие в уравнение $\Phi = \Psi$, называются коэффициентами уравнения. Если Φ, Ψ — пустые слова, то уравнение $\Phi = \Psi$ называется тривиальным уравнением.

Преобразование

$$T = \begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ \dots \\ x_n \rightarrow X_n, \end{cases}$$

где $X_1, \dots, X_n$ — слова в алфавите (1), называется решением уравнения $\Phi = \Psi$, если в результате применения этого преобразования и последующих сокращений мы получаем тривиальное уравнение. Объединяя преобразования переменных фигурной скобкой, мы указываем, что в данном преобразовании замена переменных происходит одновременно.

В этой работе мы рассматриваем бескоэффициентные уравнения в свободном моноиде. Длина слова A в алфавите (1) обозначается через $|A|$. Пустое слово обозначается через 1.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \dots$$

— счетный алфавит переменных натуральных чисел (называемых также натуральными параметрами).

Любое слово в алфавите $x_1, x_2, \dots, x_n$ является примитивным параметрическим словом. Если P — примитивное параметрическое слово, λ — натуральный параметр, то $(P)^\lambda$ является примитивным параметрическим словом. Если P, Q — примитивные параметрические слова, то PQ является примитивным параметрическим словом.

Преобразование переменных вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ \dots \\ x_n \rightarrow X_n, \end{cases}$$

где каждое слово X_i есть слово в алфавите (1), называется коэффициентным преобразованием.

Преобразование переменных вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow W_1(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_t), \\ \dots \\ x_n \rightarrow W_n(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_t), \end{cases}$$

где каждое W_i есть примитивное параметрическое слово, называется примитивным параметрическим преобразованием. Неподвижные переменные часто не выписываются.

Примитивное параметрическое преобразование (коэффициентное преобразование) называется примитивным параметрическим решением (решением) уравнения $\Phi = \Psi$ в свободном моноиде, если в результате применения этого преобразования к уравнению $\Phi = \Psi$ и последующих сокращений мы получаем тривиальное уравнение.

Любая натуральная переменная является комплексной натуральной переменной. Переменная, значениями которой являются конечные последовательности комплексных натуральных переменных, является комплексной натуральной переменной.

Любое примитивное параметрическое слово является параметризующей функцией. Если для всякой последовательности комплексных натуральных переменных $\omega_1, \dots, \omega_k$ из заданного класса последовательностей комплексных натуральных переменных выражение $F(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_k)$ является суперпозицией параметризующих функций, то выражение $F(x_1, \dots, x_n, \omega)$, где ω — комплексная натуральная переменная, значением которой являются последовательности $\omega_1, \dots, \omega_k$, является параметризующей функцией.

Суперпозиция параметризующих функций называется параметрическим словом.

Преобразование переменных вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow F_1(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_m), \\ \dots \\ x_n \rightarrow F_n(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_m), \end{cases}$$

где каждое F_i есть параметрическое слово, называется параметрическим преобразованием.

Говорят, что параметрическое преобразование T содержит коэффициентное преобразование C посредством вспомогательного преобразования I , если $TI = C$.

Конечный список параметрических решений уравнения E будем называть общим решением уравнения E , если каждое решение уравнения E содержится в некотором параметрическом решении этого списка. Общее решение уравнения E обозначается через $\langle E \rangle$.

Уравнение в свободном моноиде часто рассматривается вместе с условиями на натуральные параметры и на длины словарных переменных.

Условие на натуральные параметры имеет вид

$$L_1(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \leq L_2(\lambda_1, \dots, \lambda_t),$$

где L_1, L_2 — линейные полиномы от натуральных параметров. Условие на длины словарных переменных имеет вид

$$\partial(P) \leq \partial(Q),$$

где P, Q — примитивные параметрические слова.

Параметрическое решение T уравнения E удовлетворяет условию R , если в результате применения преобразования T к условию R получается предложение, истинное для всех значений переменных.

Пусть E — некоторое уравнение, возможно, с условиями, и пусть $R_1, \dots, R_m$ — дополнительный список условий. Через (E, R_i) мы обозначаем уравнение E с дополнительным условием R_i . Будем говорить, что уравнение E разделяется в список уравнений $(E, R_1), \dots, (E, R_m)$, если каждое решение S уравнения E является решением некоторого уравнения (E, R_i) из списка.

Будем говорить, что уравнение E_1 переводится параметрическим преобразованием T в уравнение E_2 , если $E_1 T = E_2$ и для каждого решения S_1 уравнения E_1 существует решение S_2 уравнения E_2 такое, что $S_1 = TS_2$. Будем говорить, что решение S_2 является образом решения S_1 при преобразовании T .

Пусть уравнение E_1 переводится преобразованием T в уравнение E_2 . Пусть S_1 — решение уравнения E_1 и S_2 — образ решения S_1 при преобразовании T . Если параметрическое решение Q_2 уравнения E_2 содержит решение S_2 уравнения E_2 , то параметрическое решение TQ_2 уравнения E_1 содержит решение S_1 уравнения E_1 .

Пусть уравнение E_1 переводится параметрическим преобразованием T в уравнение E_2 . Если общее решение $\langle E_2 \rangle$ уравнения E_2 есть $Q_1, \dots, Q_r$, то общее решение $\langle E \rangle$ уравнения E_1 есть $TQ_1, \dots, TQ_r$.

Пусть уравнение E разделяется в список уравнений $(E, R_1), \dots, (E, R_m)$. Если общее решение $\langle (E, R_i) \rangle$ уравнения (E, R_i) есть $Q_{i,1}, \dots, Q_{i,r_i}$, $i = 1, \dots, m$, то общее решение $\langle E \rangle$ уравнения E есть $Q_{1,1}, \dots, Q_{1,r_1}, \dots, Q_{m,1}, \dots, Q_{m,r_m}$.

3. Предварительные утверждения

Предложение 1. Общее решение уравнения

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \tag{3}$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Предложение 2. Общее решение уравнения

$$x_1 x_2 x_3 = x_3 x_2 x_1 \quad (4)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow (x_1 x_2)^\alpha x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2 (x_1 x_2)^\beta, \\ x_3 \rightarrow (x_1 x_2)^\gamma x_1, \end{cases}$$

где α, β, γ — натуральные параметры.

Предложение 3. Общее решение уравнения

$$x_1^2 x_2^2 = x_3^2 \quad (5)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^{\alpha+\beta}, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Доказательство. Словарные переменные удовлетворяют условию

$$\partial(x_3) = \partial(x_1 x_2)$$

на длины, следовательно,

$$x_3 = x_1 x_2.$$

Подставляя это равенство в уравнение (5), получаем $x_1 x_2 = x_2 x_1$. Согласно предложению 1

$$x_1 = y^\alpha, \quad x_2 = y^\beta,$$

где y — новая словарная переменная, α, β — натуральные параметры. Используя равенство $x_3 = x_1 x_2$, получаем, что

$$x_3 = y^{\alpha+\beta}.$$

Предложение 4. Общее решение уравнения

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_1 x_4 \quad (6)$$

с $\partial(x_4) \leq \partial(x_1)$ описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2^\beta x_1, \\ x_2 \rightarrow x_2^\alpha, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_2^\beta, \\ x_4 \rightarrow x_2^\beta, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Доказательство. Легко видеть, что в результате применения преобразования к уравнению получается тривиальное уравнение и что преобразование удовлетворяет условию.

С другой стороны, пусть коэффициентное преобразование S

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4, \end{cases}$$

где $X_i, i = 1, \dots, 4$, — слова в алфавите (1), является решением уравнения (6). По условию получаем, что

$$X_1 = X_4 Y_1$$

для некоторого слова Y_1 . Легко видеть, что уравнение (6) переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_4 x_1$ в уравнение E_1

$$x_3 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_4 x_1 x_4,$$

а образом решения S при преобразовании $x_1 \rightarrow x_4 x_1$ будет решение S_1

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Y_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4 \end{cases}$$

уравнения E_1 .

Словарные переменные уравнения E_1 удовлетворяют условию на длины

$$\partial(x_3) = \partial(x_1 x_4),$$

следовательно,

$$x_3 = x_1 x_4.$$

Подставляя это равенство в уравнение E_1 , получаем, что

$$x_4 x_2 = x_2 x_4.$$

Согласно предложению 1

$$x_4 = y^\alpha, \quad x_2 = y^\beta,$$

где y — новая словарная переменная, α, β — натуральные параметры. Таким образом, общее решение уравнения (6) описывается последовательным произведением следующих преобразований:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_4 x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_4, \\ \begin{cases} x_2 &\rightarrow x_2^\alpha, \\ x_4 &\rightarrow x_2^\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Объединяя это произведение преобразований в общее преобразование, получаем требуемое.

Предложение 5. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_1 x_4 \quad (7)$$

с $\partial(x_4^\lambda) \leq \partial(x_2)$, $\partial(x_1 x_2) \leq \partial(x_4^{\lambda+1}) \leq \partial(x_1^2 x_2)$, где λ — натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_4 x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow (x_1^\beta x_4 x_1^\alpha x_4)^\lambda x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\alpha x_4, \\ x_4 \rightarrow x_4 x_1^{\alpha+\beta} x_4, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Предложение 6. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (8)$$

с $\partial((x_4 x_2)^\lambda) \leq \partial(x_3)$, $\partial(x_3 x_2) \leq \partial((x_4 x_2)^\lambda x_4) \leq \partial(x_3 x_2^2)$, где λ — натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_3^\beta x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_3^\beta, \\ x_3 \rightarrow (x_3^{\alpha+\beta} x_1 x_3^\beta x_1 x_3^\beta)^\lambda x_3^\alpha, \\ x_4 \rightarrow x_3^\beta x_1 x_3^{\alpha+\beta}, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Предложение 7. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (9)$$

с $\partial(x_2) \leq \partial(x_4)$, $\partial((x_4 x_2)^\lambda x_4) \leq \partial(x_3 x_2) \leq \partial((x_4 x_2)^{\lambda+1})$, где λ — натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 x_3^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_3^\alpha x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_3^{\alpha+\beta} x_2 x_3^\alpha x_2)^\lambda x_3^{\alpha+\beta}, \\ x_4 \rightarrow x_2 x_3^{\alpha+\beta}, \end{cases}$$

где α, β — натуральные параметры.

Предложение 8. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_1 x_4 \quad (10)$$

с $\partial(x_1) \leq \partial(x_4)$, $\partial(x_2) \leq \partial(x_4^{\lambda+1}) \leq \partial(x_1 x_2)$, где λ — натуральный параметр, описывается последовательным произведением преобразований

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_1 x_4, \\ x_2 &\rightarrow (x_4 x_3)^\lambda x_4 x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ x_1 &\rightarrow x_3 x_1. \end{aligned}$$

Если преобразование T имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow W_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_2 \rightarrow W_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_3 \rightarrow W_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_4 \rightarrow W_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{cases}$$

то преобразование

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow W_1(x_2, x_1, x_4, x_3), \\ x_1 \rightarrow W_2(x_2, x_1, x_4, x_3), \\ x_4 \rightarrow W_3(x_2, x_1, x_4, x_3), \\ x_3 \rightarrow W_4(x_2, x_1, x_4, x_3) \end{cases}$$

будем обозначать через T^π .

Предложение 9. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (11)$$

с $\partial(x_4) \leq \partial(x_2)$ описывается последовательным произведением преобразований

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_4 x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2. \end{aligned}$$

Предложение 10. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (12)$$

с $\partial(x_2) \leq \partial(x_4)$, $\partial((x_4 x_2)^\lambda x_4) \leq \partial(x_3) \leq \partial((x_4 x_2)^{\lambda+1})$, где λ — натуральный параметр, описывается последовательным произведением преобразований

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_1 x_4, \\ x_3 &\rightarrow (x_4 x_2^2)^\lambda x_4 x_2 x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ x_1 &\rightarrow x_2 x_1. \end{aligned}$$

4. Параметризующие функции

Приведем совместное индуктивное определение функций

$$Fa(y, z, v)_1^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, \quad Fa(y, z, v)_2^{\lambda_1, \dots, \lambda_s},$$

где $s \geq 0$, y, z, v — словарные переменные, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — натуральные параметры:

$$\begin{aligned} Fa(y, z, v)_i &= 1, \quad i = 1, 2, \\ Fa(y, z, v)_1^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} &= z^{Fa(y, z, v)_2^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}} v^{Fa(y, z, v)_1^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}}, \\ Fa(y, z, v)_2^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} &= (Fa(y, z, v)_2^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} v^{Fa(y, z, v)_1^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}} y)^{\lambda_1} Fa(y, z, v)_2^{\lambda_2, \dots, \lambda_s}, \end{aligned}$$

в частности,

$$\begin{aligned} Fa(y, z, v)_1^{\lambda_1} &= zv, \\ Fa(y, z, v)_2^{\lambda_1} &= (vy)^{\lambda_1}, \\ Fa(y, z, v)_1^{\lambda_1, \lambda_2} &= zv(vy)^{\lambda_2} zv, \\ Fa(y, z, v)_2^{\lambda_1, \lambda_2} &= ((vy)^{\lambda_2} vzy)^{\lambda_1} (vy)^{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$x_1 P x_2 U = Q x_2 R x_1 V,$$

где P, Q, R — примитивные параметрические слова в алфавите $\{x_3, \dots, x_n\}$, U, V — параметрические слова. Рассмотрим последовательность параметрических преобразований

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{cases} x_1 \rightarrow Q x_2 R x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 R x_1 P)^{\lambda_1} x_2, \end{cases} \\ &\dots \\ T_k &= \begin{cases} x_1 \rightarrow Q x_2 R x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 R x_1 P)^{\lambda_k} x_2, \end{cases} \\ &\dots \end{aligned} \tag{13}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots$ — натуральные параметры.

Теорема 1. Для каждого натурального s произведение первых s параметрических преобразований из последовательности преобразований (13) совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Fa(x_1 P, Q, x_2 R)_1^{\lambda_1, \dots, \lambda_s} x_1, \\ x_2 \rightarrow Fa(x_1 P, Q, x_2 R)_2^{\lambda_1, \dots, \lambda_s} x_2. \end{cases}$$

Доказательство. При $s = 0$ теорема очевидна. Пусть $s > 0$. Предположим, что произведение преобразований $T_2, \dots, T_s$ совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Fa(x_1 P, Q, x_2 R)_1^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_1, \\ x_2 \rightarrow Fa(x_1 P, Q, x_2 R)_2^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_2. \end{cases}$$

По условию первое преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Qx_2Rx_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2Rx_1P)^{\lambda_1}x_1. \end{cases}$$

Следовательно, произведение первых s преобразований совпадает с преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow Q^{Fa}(x_1P, Q, x_2R)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_2 R^{Fa}(x_1P, Q, x_2R)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_1, \\ x_2 \rightarrow (F^a(x_1P, Q, x_2R)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_2 R^{Fa}(x_1P, Q, x_2R)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_1 P)^{\lambda_1} \\ \quad \times F^a(x_1P, Q, x_2R)^{\lambda_2, \dots, \lambda_s} x_2. \end{cases}$$

Теперь остается воспользоваться определением функций $F^a(y, z, v)_1^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$ и $F^a(y, z, v)_2^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$.

Пусть

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_u, \dots$$

— счетный алфавит переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных параметров.

Предложение 11. *Общее решение уравнения*

$$x_4x_3x_2x_3 = x_1x_2x_1x_4 \quad (14)$$

описывается преобразованиями

$$F^a1(\mu)\langle 6 \rangle, \quad F^a1(\mu)\langle 7 \rangle, \quad F^a1(\mu)\langle 10 \rangle,$$

где

$$F^a1(\mu) = \begin{cases} x_4 \rightarrow F^a(x_4x_3, x_1, x_2x_1)_1^\mu x_4, \\ x_2 \rightarrow F^a(x_4x_3, x_1, x_2x_1)_2^\mu x_2, \end{cases}$$

μ — переменная для последовательностей натуральных параметров.

Доказательство. Пользуясь определением функций

$$F^a(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s}, \quad s \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

легко убедиться, что в результате применения преобразования $F^a1(\mu)$ к уравнению (14) вновь получается уравнение (14) и, следовательно, каждое из трех преобразований предложения 11 является параметрическим решением уравнения (14).

С другой стороны, пусть коэффициентное преобразование S

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow X_4, \end{cases}$$

где $X_i, i = 1, \dots, 4$, — слова в алфавите (1), есть произвольное решение уравнения (14).

Индукцией по $|X_1X_2X_3X_4|$ мы докажем, что преобразование S содержится в списке параметрических преобразований предложения 11.

Легко видеть, что найдется натуральное число t такое, что длины компонент решения S будут удовлетворять хотя бы одному из следующих четырех условий:

- (1) $|X_4| \leq |X_1|$,
- (2) $|X_1| \leq |X_4|$, $|X_4^t| \leq |X_2| \leq |X_4^{t+1}|$, $|X_4^{t+1}| \leq |X_1 X_2|$,
- (3) $|X_1| \leq |X_4|$, $|X_4^t| \leq |X_2| \leq |X_4^{t+1}|$, $|X_1 X_2| \leq |X_4^{t+1}| \leq |X_1^2 X_2|$,
- (4) $|X_1| \leq |X_4|$, $|X_4^t| \leq |X_2| \leq |X_4^{t+1}|$, $|X_1^2 X_2| \leq |X_4^{t+1}|$.

Если компоненты решения S удовлетворяют условию 1, то решение S содержится в параметрическом преобразовании $F^a 1(\mu) \langle 6 \rangle$ при пустом значении для μ .

Если компоненты решения S удовлетворяют условию 2, то решение S содержится в параметрическом преобразовании $F^a 1(\mu) \langle 10 \rangle$ при пустом значении для μ .

Если компоненты решения S удовлетворяют условию 3, то решение S содержится в параметрическом преобразовании $F^a 1(\mu) \langle 7 \rangle$ при пустом значении для μ .

Пусть длины компонент решения S удовлетворяют условию 4. Тогда

$$X_4 = X_1 Y_4$$

для некоторого слова Y_4 . Легко видеть, что уравнение (14) переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_1 x_4$$

в уравнение E_1

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_2 x_1^2 x_4,$$

а образом решения S при преобразовании $x_4 \rightarrow x_1 x_4$ будет решение S_1

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow Y_4 \end{cases}$$

уравнения E_1 . Длины компонент решения S_1 будут удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} |(X_1 Y_4)^t| &\leq |X_2| \leq |(X_1 Y_4)^{t+1}|, \\ |X_1^2 X_2| &\leq |(X_1 Y_4)^{t+1}|, \\ |X_1| &= |X_3|, \end{aligned}$$

и, следовательно, $X_2 = (Y_4 X_3)^t Y_2$ для некоторого слова Y_2 . Легко видеть, что уравнение E_1 переводится преобразованием

$$x_2 \rightarrow (x_4 x_3)^\lambda x_2,$$

где λ — натуральный параметр, в уравнение E_2

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_2 x_1^2 x_4$$

с $\partial(x_2) \leq \partial(x_4 x_3)$, а образом решения S_1 при преобразовании

$$x_2 \rightarrow (x_4 x_3)^\lambda x_2$$

будет решение S_2

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow Y_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow Y_4 \end{cases}$$

уравнения E_2 . Длины компонент решения S_2 будут удовлетворять условиям

$$|X_1| = |X_3|, \quad |X_1 Y_2| \leq |Y_4|,$$

и, следовательно,

$$Y_4 = X_2 X_1 Z_4$$

для некоторого слова Z_4 . Легко видеть, что уравнение E_2 переводится преобразованием

$$x_4 \rightarrow x_2 x_1 x_4$$

в уравнение E_3

$$x_4 x_3 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_1 x_4,$$

а образом решения S_2 при преобразовании $x_4 \rightarrow x_2 x_1 x_4$ будет решение S_3

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow Y_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ x_4 \rightarrow Z_4 \end{cases}$$

уравнения E_3 .

Уравнение E_3 совпадает с уравнением (14) и

$$|X_1 Y_2 X_3 Z_4| < |X_1 X_2 X_3 X_4|.$$

По индуктивному предположению решение S_3 содержится в списке

$$F^a 1(\mu)\langle 6 \rangle, \quad F^a 1(\mu)\langle 7 \rangle, \quad F^a 1(\mu)\langle 10 \rangle.$$

Следовательно, исходное решение S содержится в списке

$$T^{Fa} 1(\mu)\langle 6 \rangle, \quad T^{Fa} 1(\mu)\langle 7 \rangle, \quad T^{Fa} 1(\mu)\langle 10 \rangle,$$

где T есть последовательное произведение преобразований

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_1 x_4, \\ x_2 &\rightarrow (x_4 x_3)^\lambda x_2, \\ x_4 &\rightarrow x_2 x_1 x_4, \end{aligned}$$

то есть преобразование

$$\begin{cases} x_4 \rightarrow x_1 x_2 x_1 x_4, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1 x_4 x_3)^\lambda x_2. \end{cases}$$

Используя теорему 1, легко доказать, что

$$T^{Fa} 1(\mu) = F^a 1(\lambda, \mu).$$

Предложение 12. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (15)$$

описывается преобразованиями

$$F^a 2(\mu) \langle 11 \rangle, \quad F^a 2(\mu) \langle 8 \rangle, \quad F^a 2(\mu) \langle 9 \rangle, \quad F^a 2(\mu) \langle 12 \rangle,$$

где

$$F^a 2(\mu) = \begin{cases} x_4 \rightarrow F^a(x_4 x_2^2, x_1, x_3 x_1)_1^\mu x_4, \\ x_3 \rightarrow F^a(x_4 x_2^2, x_1, x_3 x_1)_2^\mu x_3, \end{cases}$$

а μ — переменная для последовательностей натуральных параметров.

Введем обозначения для примитивно параметрических преобразований:

$$A(\lambda) = \begin{cases} x_1 \rightarrow x_3 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_4 x_2 x_3)^\lambda x_4 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_3 x_1 x_4, \end{cases}$$

$$B(\lambda) = \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_4 (x_3 x_2)^2)^\lambda x_4 x_3 x_2 x_3, \\ x_4 \rightarrow x_2 x_1 x_4, \end{cases}$$

$$C(\lambda) = \begin{cases} x_1 \rightarrow x_4 x_1, \\ x_2 \rightarrow x_1 x_2, \end{cases}$$

где λ — натуральный параметр.

Преобразование

$$L^a(\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2, \dots, \mu_{2k-1}, \lambda_{2k-1}, \mu_{2k}, \lambda_{2k}),$$

где $k \geq 0$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2k-1}, \mu_{2k}$ — переменные для последовательностей натуральных параметров, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}$ — натуральные параметры, определяемые следующим произведением преобразований

$$\prod_{i=0}^k F^a 2(\mu_{2i-1}) B(\lambda_{2i-1}) F^a 1(\mu_{2i}) A(\lambda_{2i}).$$

Пусть

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_v, \dots$$

— счетный алфавит переменных, значениями которых являются последовательности вида

$$\mu_i, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2, \dots, \mu_{2k-1}, \lambda_{2k-1}, \mu_{2k}, \lambda_{2k},$$

где μ_i — переменные для последовательностей натуральных параметров, λ_i — натуральные параметры.

Через $L^a(\nu)$ будем обозначать параметризующую функцию, зависящую от параметра ν .

Предложение 13. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (16)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} & L^a(\nu)\langle 8 \rangle, \\ & L^a(\nu)\langle 9 \rangle, \\ & L^a(\nu)^{Fa} 2(\mu) B(\lambda)\langle 6 \rangle, \\ & L^a(\nu)^{Fa} 2(\mu) B(\lambda)\langle 7 \rangle, \\ & L^a(\nu)^{Fa} 2(\mu) C^{Fa} 1(\mu_2)^\pi A(\lambda)^\pi \langle 16 \rangle^\pi, \end{aligned}$$

где ν — переменная для последовательностей вида

$$\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2, \dots, \mu_{2k-1}, \lambda_{2k-1}, \mu_{2k}, \lambda_{2k}.$$

Преобразование

$$\begin{aligned} & D^o(\nu_1, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \nu_2, \mu_3, \mu_4, \lambda_2, \dots, \\ & \nu_{2k-1}, \mu_{4k-3}, \mu_{4k-2}, \lambda_{2k-1}, \nu_{2k}, \mu_{4k-1}, \mu_{4k}, \lambda_{2k}), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

определяется следующим произведением преобразований:

$$\prod_{i=0}^k L^a(\nu_{2i-1})^{Fa} 2(\mu_{4i-3}) C^{Fa} 1(\mu_{4i-2})^\pi A(\lambda_{2i-1})^\pi L^a(\nu_{2i})^\pi F^a 2(\mu_{4i-1})^\pi C^\pi F^a 1(\mu_{4i}) A(\lambda_{2i}).$$

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_w, \dots$$

— счетный алфавит переменных, значениями которых являются последовательности вида

$$\nu_1, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \nu_2, \mu_3, \mu_4, \lambda_2, \dots, \nu_{2k-1}, \mu_{4k-3}, \mu_{4k-2}, \lambda_{2k-1}, \nu_{2k}, \mu_{4k-1}, \mu_{4k}, \lambda_{2k}, \quad k \geq 0.$$

Через $D^o(\xi)$ обозначаем параметризующую функцию, зависящую от параметра ξ .

Предложение 14. *Общее решение уравнения*

$$x_4 x_2^2 x_3 = x_1 x_3 x_1 x_4 \quad (17)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} & D^o(\xi)^{La}(\nu)\langle 8 \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu)\langle 9 \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu)^{Fa} 2(\mu) B(\lambda)\langle 6 \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu)^{Fa} 2(\mu) B(\lambda)\langle 7 \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu_1)^{Fa} 2(\mu_1) C\langle 6^\pi \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu_1)^{Fa} 2(\mu_1) C\langle 7^\pi \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu_1)^{Fa} 2(\mu_1) C^{Fa} 1(\mu_2)^\pi A(\lambda_1)^\pi L^a(\nu_1)^\pi F^a 2(\mu_1) C^\pi \langle 6 \rangle, \\ & D^o(\xi)^{La}(\nu_1)^{Fa} 2(\mu_1) C^{Fa} 1(\mu_2)^\pi A(\lambda_1)^\pi L^a(\nu_1)^\pi F^a 2(\mu_1) C^\pi \langle 7 \rangle, \end{aligned}$$

где ξ — переменная для последовательностей вида

$$\nu_1, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \nu_2, \mu_3, \mu_4, \lambda_2, \dots, \nu_{2k-1}, \mu_{4k-3}, \mu_{4k-2}, \lambda_{2k-1}, \nu_{2k}, \mu_{4k-1}, \mu_{4k}, \lambda_{2k}.$$

Предложение 15. *Общее решение уравнения*

$$x_1^2 x_2 x_4 = x_4 x_3 x_2 x_3 \quad (18)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_1 x_4, \\ &\langle 14 \rangle, \\ \begin{cases} x_1 \rightarrow x_4 x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\alpha x_4, \end{cases} \end{aligned}$$

где α, β — натуральные параметры.

Предложение 16. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1^2 x_4 = x_3 x_4 x_2 x_3 \quad (19)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow (x_3 x_4)^\lambda x_2, & x_2 &\rightarrow (x_3 x_4)^\lambda x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, & x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ x_1 &\rightarrow x_3 x_2, & x_4 &\rightarrow x_2 x_4, \\ &\langle 15 \rangle, & &\langle 18 \rangle. \end{aligned}$$

Предложение 17. *Общее решение уравнения*

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 = x_4^2 \quad (20)$$

описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_4 &\rightarrow x_1 x_4 x_3, \\ &\langle 19^\pi \rangle. \end{aligned}$$

Предложение 18. *Общее решение уравнения*

$$x_1^2 x_2^2 = x_3^2 x_4^2 \quad (21)$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_2 x_1)^{(\alpha+\beta+1)\lambda+\alpha} x_2 (x_2 x_1)^{\alpha+\beta+1}, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\gamma x_2, \\ x_3 \rightarrow (x_2 x_1)^{(\alpha+\beta+1)\lambda+\alpha} x_2, \\ x_4 \rightarrow (x_1 x_2)^{\alpha+\beta+1} (x_2 x_1)^\gamma x_2, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — натуральные параметры.

Список литературы

1. Хмелевский Ю. И., Решение уравнений в словах с тремя неизвестными. *Докл. АН СССР* (1967) **177**, 1023–1025.
2. Хмелевский Ю. И., Уравнения в свободной полугруппе. *Труды МИАН* (1971) **107**, 281–284.
3. Makanin G. S., On the general solution of equations in a free semigroup. *Lect. Notes Computer Sci.* (1991) **677**, 1–5.
4. Makanin G. S., Multiplication of natural number parameters and equations in a free semigroup. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1996) **348**, 4813–4824.
5. Makanin G. S., Abdulrab H., Goralcic P., Functions for the general solution of parametric Word equations. *Lect. Notes Computer Sci.* (1997) **1234**, 189–202.

Статья поступила 14.05.1998.