Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О спектрах связных графов, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 29–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 02:33:27

О спектрах связных графов

© 1999 г. С. В. Савченко

При помощи метода производящих функций изучены свойства спектров бесконечных связных графов вне некоторого критического круга. Радиус этого круга ρ является обратной величиной от максимума $r(G)$ радиусов сходимости $r_v(G)$ производящих функций $\varphi_{G,v}(z)$ числа циклических маршрутов с запретом захода в начальную вершину v . Пусть $R(G)$ — радиус сходимости производящей функции числа циклических маршрутов с началом в фиксированной вершине (для связного графа он не зависит от выбора вершины). Известно, что если $r(G) > R(G)$, то для ориентированного графа G и для любого $\varepsilon > 0$ существует пространство $\ell^1(\mu^{(\varepsilon)})$, действие матрицы смежности $A(G)$ на котором определяет оператор с дискретным спектром вне круга радиуса $\rho + \varepsilon$. В работе собственные значения в этой области представлены как элементы множества $J(G)^{-1}$, где $J(G)$ — совокупность нулей функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$, соответствующей вершине v , для которой $r_v(G) = r(G)$. Геометрическая кратность каждого собственного значения из множества $J(G)^{-1}$ равна единице, а размер жордановой клетки совпадает с кратностью соответствующего нуля функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$. Спектры сходящихся к G конечных подграфов вне круга радиуса $\rho + \varepsilon$ аппроксимируют собственные значения оператора $A(G)$. При условии $R(G) < r(G)$ спектр самосопряженного оператора на пространстве ℓ^2 , порожденного матрицей смежности неориентированного графа, в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ является дискретным и состоит не более, чем из двух точек. Одна из них является максимальной точкой спектра (число Перона-Фробениуса). Другая (при условии существования) расположена на отрицательной полуоси и характеризует размер максимальных двудольных частей графа (если она симметрична максимальной точке спектра относительно начала координат, то граф является двудольным).

Работа выполнена при поддержке INTAS-RFBR, грант 95-418.

1. Введение

В теории графов существуют несколько различных определений спектра неориентированного графа G . Самое известное (и естественное) из них, спектр по Мохару (см. [1]), получается как спектр самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве последовательностей ℓ^2 , порожденного матрицей смежности графа $A(G)$. Что касается ориентированного графа, то здесь вообще нет стандартного пространства последовательностей, на котором рассматривают действие матрицы $A(G)$. Еще в работе [2] было отмечено, что для любого графа G с отличным от нуля радиусом сходимости производящей функции $R(G)$ числа циклических маршрутов, выходящих из фиксированной вершины (для связного графа он не зависит от ее выбора), существует пространство $\ell^1(\mu)$ (мера μ сосредоточена на множестве $V(G)$)

вершин графа G), на котором матрица $A(G)$ действует как ограниченный оператор (в [2] и в далее цитируемой статье [3] матрицы действуют на векторы слева; в нашей работе мы будем считать, что они действуют справа на сопряженном к $\ell^1(\mu)$ пространстве). В [3] фактически доказано, что если радиус сходимости $r_v(G)$ производящей функции $\varphi_{G,v}(z)$ числа циклических маршрутов, выходящих из вершины v и не имеющих v в качестве промежуточной вершины, больше, чем $R(G)$ (очевидно, что всегда $r_v(G) \geq R(G)$), то найдется пространство $\ell^1(\mu)$, действие матрицы $A(G)$ на котором определяет квазикомпактный оператор с простым собственным значением в точке $\lambda = \lambda(G) \equiv R(G)^{-1}$. В предлагаемой работе (основные ее результаты были анонсированы в [4]) мы представляем дискретный спектр оператора $A(G)$ вне круга радиуса $r(G)^{-1}$, где $r(G)$ — максимум величин $r_v(G)$ по $v \in V(G)$, как множество $J(G)^{-1}$ обратных значений нулей функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$, где v — вершина графа, для которой $r_v(G) = r(G)$ (множество таких вершин непусто и всегда конечно при $r(G) > R(G)$). Такое представление позволяет доказать (без применения спектральной теории), что собственные значения сходящихся к G конечных подграфов в указанной области сосредотачиваются около элементов множества $J(G)^{-1}$, то есть около изолированных собственных значений конечной кратности оператора $A(G)$.

В случае конечного неориентированного графа G , используя теорему Релея, можно получить более точную информацию о его спектре в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$: помимо точки $\lambda = \lambda(G)$ он может содержать еще лишь одну точку, которая должна располагаться на отрицательной полуоси. Для двудольного графа это — точка $\lambda = -\lambda(G)$. Для произвольного неориентированного графа она может как существовать, так и не существовать. Знание асимптотических свойств спектров конечных подграфов позволяет при помощи метода конечной аппроксимации (см. [1]) перенести эти результаты на случай неориентированного счетного графа. Статья завершается доказательством необходимости и достаточности условия $r(G) > R(G)$ для изолированности максимальной точки $\lambda = \lambda(G)$ спектра неориентированного графа от остальной его части. Вместе с критерием Вер-Джонса (см. [5]) ее принадлежности собственному спектру этот результат завершает классификацию спектральной природы точки $\lambda = \lambda(G)$ для положительно-рекуррентного графа G (соответствующую терминологию см. в [1]). Спектральным свойствам этой точки в случае нуль-рекуррентного и транзитивного графа (точнее, ее устойчивости относительно добавления петель с весами) посвящена работа автора [6].

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и Б. Мохару за подробный комментарий основных результатов работы.

2. Производящие функции и спектры конечных графов

Пусть G — граф со счетным множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. В дальнейшем мы будем считать, что каждое ребро (v, w) графа G имеет положительный вес $Q(v, w)$. Если $Q(v, w) = Q(w, v)$, то ребро (v, w) будем называть неориентированным. В случае, когда $Q(v, w) = 1$, будем употреблять выражение ребро без веса.

Для любого маршрута $\gamma = \{v_i\}_{i=0}^n$ длины $l(\gamma) = n$, проходящего последовательно

вершины $v_i \in V(G)$, положим

$$Q(\gamma) = \prod_{i=0}^{n-1} Q(v_i, v_{i+1}).$$

Маршрут γ с $v_0 = v_{l(\gamma)} = v$ будем называть циклическим маршрутом с началом в вершине v (все определения из теории графов мы будем давать, следуя [7]). Обозначим через $K(G; v)$ множество всех циклических маршрутов графа G с началом в вершине v , а через $L(G; v)$ — множество тех циклических маршрутов графа G с началом в вершине v , у которых v не встречается в качестве промежуточной вершины, то есть $v_i \neq v$ при $i = 1, \dots, l(\gamma) - 1$ (если у графа G имеется петля (v, v) , то мы будем считать, что она принадлежит множеству $L(G; v)$).

Для любого $v \in V(G)$ положим

$$\Phi_{G,v}(z) = \sum_{\gamma \in K(G;v)} Q(\gamma) z^{l(\gamma)}, \quad (1)$$

$$\varphi_{G,v}(z) = \sum_{\gamma \in L(G;v)} Q(\gamma) z^{l(\gamma)}. \quad (2)$$

Обозначим через $R_v(G)$ и $r_v(G)$ радиусы сходимости соответственно рядов (1) и (2). Очевидно, $R_v(G) \leq r_v(G)$ при любом $v \in V(G)$. В дальнейшем мы будем одинаково обозначать ряды и их суммы. По теореме Вейерштрасса функции $\Phi_{G,v}(z)$ и $\varphi_{G,v}(z)$ являются аналитическими соответственно в $|z| < R_v(G)$ и $|z| < r_v(G)$.

Лемма 1 ([8]). Для любого $v \in V(G)$ в круге $|z| < R_v(G)$ имеет место тождество

$$\Phi_{G,v}(z) = \frac{\varphi_{G,v}(z)}{1 - \varphi_{G,v}(z)}. \quad (3)$$

Замечание 1. Формула (3), как и нижеследующие тождества (5), (8) и (9), справедливы и без условия положительности весов.

Следствие 1 ([5]). Если $\varphi_{G,v}(r_v(G)) \leq 1$, то $R_v(G) = r_v(G)$. В противном случае величина $R_v(G)$ является единственным решением уравнения $\varphi_{G,v}(z) = 1$ в интервале $(0, r_v(G))$.

Для любого графа G положим

$$R(G) = \inf\{R_v(G) : v \in V(G)\}.$$

Пусть $\mathcal{G}(G)$ — семейство конечных подграфов графа G .

Лемма 2 ([9]). Для любого графа G

$$R(G) = \inf\{R(G') : G' \in \mathcal{G}(G)\}. \quad (4)$$

Граф G будем называть связным, если для любых двух его вершин v и w существует маршрут γ с $v_0 = v$ и $v_{l(\gamma)} = w$. Если граф G является связным, то величина $R_v(G)$ от вершины $v \in V(G)$ не зависит [8] и, следовательно, при любом $v \in V(G)$ совпадает с $R(G)$.

Лемма 3. *Предположим, что граф G является связным и $r_v(G) > R(G)$ при некотором (а, следовательно, и при любом) $v \in V(G)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число вершин $w \in V(G)$, для которых $r_w(G) > R(G) + \varepsilon$.*

Доказательство. Выберем конечный связный подграф G' , для которого $R(G') < R(G) + \varepsilon$ (такой подграф существует в силу (4)), и произвольную вершину w из множества $V(G')$. Пусть $v \notin V(G')$ и γ — произвольный маршрут, принадлежащий множеству $L(G; v)$ и проходящий через вершину w . Тогда при положительных z

$$\varphi_{G,v}(z) \geq Q(\gamma)z^{l(\gamma)}\Phi_{G',w}(z)$$

и, следовательно, $r_v(G) \leq R(G') < R(G) + \varepsilon$. Лемма доказана.

Положим

$$r(G) = \sup\{r_v(G) : v \in V(G)\}.$$

Пусть $V^{\max}(G)$ — множество тех вершин v графа G , для которых $r_v(G) = r(G)$. Если граф G связан и $r(G) > R(G)$, то в силу леммы 3 множество $V^{\max}(G)$ непусто и конечно.

Со спектром графа непосредственно связаны только единицы функции $\varphi_{G,v}(z)$, то есть точки z_* , для которых $\varphi_{G,v}(z_*) = 1$. Если $\varphi_{G,v}(z_*) = 1$ и $\varphi_{G,v}^{(k-1)}(z_*) = 0$, но $\varphi_{G,v}^{(k)}(z_*) \neq 0$, где верхний индекс (k) означает дифференцирование порядка k , то будем говорить, что единица z_* имеет кратность k . Для любого $v \in V^{\max}(G)$ определим множество $J_v(G)$ как совокупность всех единиц (с учетом кратности) функции $\varphi_{G,v}(z)$ в круге $|z| < r(G)$. В силу теоремы единственности для аналитических функций множество $J_v(G)$ не более чем счетно. Так как в случае связного графа $\varphi_{G,v}(R(G)) = 1$ для всех $v \in V(G)$ при $r(G) > R(G)$, множество $J_v(G)$ непусто и точка $z = R(G)$ принадлежит $J_v(G)$ при любом $v \in V^{\max}(G)$.

Обозначим через $G - v$ граф, полученный из графа G удалением вершины $v \in V(G)$ и всех ребер с началом и концом в v . Сразу заметим, что если граф G связан, то граф $G - v$ уже не обязан быть таким.

Утверждение следующей леммы немедленно вытекает из леммы 3 работы [8]. Однако, мы приведем здесь свое доказательство, так как основной его ингредиент, неравенство (6), будет использоваться и в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть G — связный граф и $r(G) > R(G)$. Тогда для любых двух вершин v и w из множества $V^{\max}(G)$*

$$J_w(G) = J_v(G).$$

Доказательство. В [8] показано, что для любых двух вершин v и w графа G выполняется тождество

$$\frac{1 - \varphi_{G,v}(z)}{1 - \varphi_{G-w,v}(z)} = \frac{1 - \varphi_{G,w}(z)}{1 - \varphi_{G-v,w}(z)}. \quad (5)$$

Поэтому требуемое утверждение будет доказано, если мы покажем, что функции $1 - \varphi_{G-w,v}(z)$ и $1 - \varphi_{G-v,w}(z)$ при $v, w \in V^{\max}(G)$ аналитичны и не обращаются в нуль в круге $|z| < r(G)$. Очевидно, для этого достаточно установить справедливость неравенства

$$R(G - v) \geq r_v(G) \quad (6)$$

для любого $v \in V(G)$. Пусть $v' \neq v$ и γ — произвольный маршрут, принадлежащий множеству $L(G; v)$ и проходящий через вершину v' . Тогда при положительных z

$$\varphi_{G,v}(z) \geq Q(\gamma)z^{l(\gamma)}\Phi_{G-v,v'}(z)$$

и, следовательно, справедливо неравенство $r_v(G) \leq R_{v'}(G - v)$. Левая часть этого неравенства от $v' \in V(G)$ не зависит, поэтому $r_v(G) \leq R(G - v)$. Лемма доказана.

Обозначим через $J(G)$ множество $J_v(G)$, где v — любой элемент множества $V^{\max}(G)$. Если $r_w(G) < r(G)$, то в силу (5) функция $\varphi_{G,w}(z)$ имеет мероморфное продолжение в круг $|z| < r(G)$ (см. [8]). При помощи этого мероморфного продолжения множество $J_w(G)$ можно определить для любого $w \in V(G)$ точно так же, как это было сделано при $v \in V^{\max}(G)$. В силу (5), $J_w(G) \subseteq J(G)$ (см. лемму 3 в [8]).

Пусть

$$N_n(G; v) = \sum_{\gamma \in K(G; v), l(\gamma)=n} Q(\gamma),$$

$$N_n(G) = \sum_{v \in V(G)} N_n(G; v).$$

Положим

$$\zeta_G(z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} N_n(G) z^n / n \right).$$

Графу G сопоставим обобщенную матрицу смежности $A(G)$ (учитывающую веса) по следующему правилу:

$$A(G)(v, w) = \begin{cases} Q(v, w), & \text{если } (v, w) \in E(G), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае, когда матрица $A(G)$ является симметрической, граф G с весами будем называть неориентированным.

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус конечной матрицы A и положим

$$\lambda(G) = \sup\{\rho(A(G')) : G' \in \mathcal{G}(G)\}.$$

Для любого графа G справедливо равенство

$$\lambda(G) = R(G)^{-1}. \quad (7)$$

Если G — конечный граф, то $\lambda(G) = \rho(A(G))$ (см. [10]).

Обозначим через $\text{Спес } A(G)$ спектр матрицы смежности $A(G)$ конечного графа G (при этом мы считаем, что каждое собственное значение матрицы $A(G)$ входит в множество $\text{Спес } A(G)$ столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена $\det(A(G) - zE)$, где E — единичная матрица). Нетрудно проверить, что

$$N_n(G) = \text{Tr } A(G)^n = \sum_{\lambda \in \text{Спес } A(G)} \lambda^n.$$

Предложение 1 ([11]). Пусть G — конечный граф. Тогда при $|z| < R(G)$

$$\zeta_G(z) = \frac{1}{\det(E - zA(G))}. \quad (8)$$

Пусть e_v — вектор с компонентами $e_v(w) = \delta_{vw}$, где δ_{vw} — символ Кронекера. Так как $N_n(G; v) = (A(G)^n e_v, e_v)$, справедливы равенства

$$1 + \Phi_{G,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A(G)^n e_v, e_v) z^n = ((E - zA(G))^{-1} e_v, e_v).$$

Записав формулу для (v, v) -элемента матрицы, обратной к матрице $(E - zA(G))$, в следующем виде: (v, v) -элемент матрицы $(E - zA(G))^{-1}$ (т.е. $1 + \Phi_{G,v}(z)$) равен главному v -минору порядка $\text{card } V(G) - 1$ матрицы $(E - zA(G))$ (т.е. $\det(E - zA(G - v)) = \zeta_{G-v}(z)^{-1}$) деленному на $\det(E - zA(G))$ (т.е. на $\zeta_G(z)^{-1}$), получим следующее утверждение (см. также (3)).

Предложение 2 ([12]). Пусть G — конечный граф. Тогда для любого $v \in V(G)$ в круге $|z| < R(G)$ имеет место факторизационное (по вершине v) тождество

$$\zeta_G(z) = (1 - \varphi_{G,v}(z))^{-1} \zeta_{G-v}(z). \quad (9)$$

Замечание 2. В [12] показана справедливость формулы (9) в круге сходимости ряда, определяющего функцию $\zeta_G(z)$, для любого счетного графа G .

Замечание 3. Формула (5) легче всего доказывается при помощи двукратного применения (9): сначала факторизуем $\zeta_G(z)$ по v , а затем $\zeta_{G-v}(z)$ по w , результат будет тот же, если провести факторизацию в обратном порядке (если ряд, определяющий функцию $\zeta_G(z)$, имеет нулевой радиус сходимости, то вместо $\zeta_G(z)$ нужно факторизовать производящую функцию, в экспоненте которой суммирование идет по всем циклическим маршрутам, проходящим через вершины v и w).

Алгебраической кратностью собственного значения λ матрицы $A(G)$ (или оператора, порожденного этой матрицей) будем называть размерность соответствующего корневого подпространства, то есть максимального (по размерности) инвариантного подпространства, включающего в себя все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ , но не содержащего собственных векторов, отвечающих другим собственным значениям, а геометрической кратностью будем называть размерность собственного подпространства или, другими словами, число всех линейно независимых собственных векторов, соответствующих этому собственному значению. Если C — множество элементов, то под C^{-1} мы будем подразумевать множество $\{c^{-1} : c \in C\}$.

Лемма 5. Пусть G — конечный связный граф. Тогда

$$\text{Спец } A(G) \cap \{\lambda : |\lambda| > r(G)^{-1}\} = J(G)^{-1}. \quad (10)$$

Геометрическая кратность любого собственного значения из множества $J(G)^{-1}$ равна единице.

Доказательство. Для конечного графа функция $\zeta_{G-v}(z)$ аналитична и не обращается в ноль в круге $|z| < R(G-v)$. Так как $R(G-v) \geq r_v(G)$ (см. (6); при помощи формул (8) и (9) можно показать, что для конечного графа G на самом деле имеет место равенство), полюса функции $\zeta_G(z)$ в круге $|z| < r(G)$ совпадают с нулями функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$, где $v \in V^{\max}(G)$. Вспоминая теперь, как связаны между собой полюса функции $\zeta_G(z)$ с собственными значениями матрицы $A(G)$, получим первое утверждение леммы.

Пусть $v \in V^{\max}(G)$. Выпустим из вершины v петлю с весом a . Полученный граф обозначим через G' . Легко проверить, что

$$\varphi_{G',v}(z) = az + \varphi_{G,v}(z)$$

и, следовательно, $r_v(G') = r_v(G) = r(G)$. Так как $r_w(G') \leq r_w(G)$ при любом $w \in V(G')$, то $r_v(G') = r(G') = r(G)$. Очевидно, множество единиц функции $\varphi_{G',v}(z)$ не пересекается с множеством единиц функции $\varphi_{G,v}(z)$. Поэтому в силу первого, уже доказанного, утверждения леммы спектры графов G' и G различны в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$.

Предположим теперь, что в этой области имеется собственное значение λ матрицы $A(G)$, геометрическая кратность которого больше единицы. Тогда в соответствующем собственном подпространстве можно выбрать ненулевой вектор ξ с нулевой v -координатой. Для такого вектора $A(G')\xi = A(G)\xi = \lambda\xi$, то есть он является собственным для матрицы $A(G')$ с тем же собственным значением. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Замечание 4. Так как $\varphi'_{G,v}(R(G)) > 0$, то $\lambda = \lambda(G)$ является простым собственным значением матрицы $A(G)$. Этот факт является одним из утверждений хорошо известной теоремы Перрона–Фробениуса (см. [10]).

Пример 1. Пусть G — ориентированный граф, для некоторой вершины v которого все маршруты из множества $L(G;v)$ являются простыми циклами и любые два из них не имеют общих промежуточных вершин. В этом случае элементы множества $L(G;v)$ будем называть лепестками, а сам граф G лепестковым. Примером такого графа является граф G с множеством вершин $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством ребер $E(G) = \{(1, 2), (2, 1); (1, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ (в этом случае $v = 1$). Очевидно, для конечного лепесткового графа функция $\varphi_{G,v}(z)$ — полином, степень n которого равна длине самого длинного простого v -цикла (в нашем примере графа G без весов, $\varphi_{G,v}(z) = z^2 + z^3$ и $n = 3$). В силу леммы 5 граф G имеет n ненулевых собственных значений (с учетом кратности), причем каждой серии одинаковых собственных значений соответствует единственная жорданова клетка. Геометрическая кратность нулевого собственного значения равна количеству всех лепестков длины большей, чем 2, минус единица:

$$\text{card}\{\gamma \in L(G;v) : l(\gamma) \geq 2\} - 1.$$

Заметим, что все эти результаты справедливы и для лепесткового графа с комплексными весами (см. замечание 1).

Следствие 2. Если G — конечный связный неориентированный граф, то спектр матрицы $A(G)$ в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ состоит из простого собственного значения $\lambda = \lambda(G)$ и еще, быть может, одного собственного значения, которое также

является простым, расположено на отрицательной полуоси и принадлежит множеству $J(G)^{-1}$.

Доказательство. Возпользуемся теоремой Релея (см. задачу 11 к главе XIII [13]), которая утверждает следующее: если $\mu_1, \dots, \mu_n$ — собственные значения эрмитовой $n \times n$ матрицы и $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — собственные значения ее сужения на $(n-1)$ -мерное подпространство, расположенные в порядке возрастания, то

$$\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_n.$$

В силу справедливости неравенства $\lambda(G-v) \leq r_v(G)^{-1}$ (см. (6) и (7)) в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ нет собственных значений матрицы $A(G-v)$, где $v \in V^{\max}(G)$. Поэтому матрица $A(G)$ имеет на каждой полуоси вне круга $|\lambda| \leq r(G)^{-1}$ не более одного собственного значения (с учетом кратности). На положительной полуоси это — точка $\lambda = \lambda(G)$. На отрицательной полуоси, как это будет видно из нижеследующих примеров, оно может как существовать (в этом случае, в силу (10) оно является единственным элементом множества $J(G)^{-1} \cap \mathbf{R}^-$), так и не существовать. Следствие доказано.

Длина любого циклического маршрута двудольного графа является четным числом (см. теорему 7.1.1 в [7]). Поэтому для такого графа отрицательное собственное значение вне круга $|\lambda| \leq r(G)^{-1}$ всегда существует и равно $-\lambda(G)$. Если G — полный граф без весов, то

$$r_v(G) = r(G) = (\text{card } V(G) - 2)^{-1}$$

при любом $v \in V(G)$, а его спектр состоит из точек $\lambda = \lambda(G) = \text{card } V(G) - 1$ (кратности 1) и $\lambda = -1$ (кратности $\text{card } V(G) - 1$). Поэтому множество $J(G)^{-1} \cap \mathbf{R}^-$ пусто. Если $\text{card } V(G) = 3$, то

$$1 - \varphi_{G,v}(z) = (1 - 2z)(1 + z)(1 - z)^{-1}$$

для любого $v \in V(G)$ (здесь нужно применить формулы (8) и (9)). Мы видим, что $r_v(G) = r(G) = 1$ и $\varphi_{G,v}(-1) = 1$. Но точка $z = -1$ является нулем функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$ порядка единица, а собственное значение $\lambda = -1$ матрицы $A(G)$ имеет кратность два. Поэтому спектр полного графа G с $\text{card } V(G) = 3$ уже вне открытого круга $|\lambda| < r(G)^{-1}$ не совпадает с множеством элементов, обратных к единицам функции $\varphi_{G,v}(z)$. Пример графа G , для которого множество $J(G)^{-1} \cap \mathbf{R}^-$ непусто и не состоит из точки $\lambda = -\lambda(G)$, можно построить следующим образом. Возьмем изолированную вершину w и соединим ее неориентированным ребром без веса с какой-нибудь вершиной v полного графа с тремя вершинами. Для полученного графа G справедливо равенство

$$\varphi_{G,v}(z) = z^2 + 2z^2(1 - z)^{-1}.$$

Мы видим, что $r_v(G) = r(G) = 1$ (в силу формулы Адамара радиус сходимости бесконечного ряда с неотрицательными целочисленными коэффициентами не может быть больше единицы) и $\varphi_{G,v}(-1) = 2 > 1$. Так как $\varphi_{G,v}(0) = 0$, на отрезке $[-1, 0]$ существует точка z_* , для которой $\varphi_{G,v}(z_*) = 1$. При этом, очевидно, $z_* \neq -R(G)$.

3. Спектр счетного ориентированного графа

На любом векторном пространстве матрица $A(G)$ действует как линейный оператор (мы будем его обозначать также через $A(G)$), который сопоставляет вектору $\xi = \{\xi(v)\}$ вектор $\eta = \{\eta(v)\}$ с координатами

$$\eta(v) = \sum_{w \in V(G)} A(G)(v, w) \xi(w).$$

В этом параграфе в качестве векторных пространств мы будем рассматривать пространство $\ell^\infty(\{d\})$ с нормой

$$\|\xi\| = \sup\{|\xi(v)|d(v) : v \in V(G)\},$$

где $\{d\}$ — последовательность положительных чисел $d(v)$, индексируемая элементами множества $V(G)$. Пространство $\ell^\infty(\{d\})$ сопряжено к пространству $\ell^1(\mu)$, где $\mu(v) = d(v)^{-1}$, в следующем смысле: каждый линейный непрерывный функционал на $\ell^1(\mu)$ имеет вид $(\cdot, \xi)$, где

$$(\eta, \xi) = \sum_{v \in V(G)} \eta(v) \xi(v)$$

и $\xi \in \ell^\infty(\{d\})$, $d(v) = \mu(v)^{-1}$. В случае, когда $d(v) = 1$ при любом $v \in V(G)$, будем писать просто ℓ^∞ (пространство ℓ^∞ сопряжено к $\ell^1(\mu)$, если линейный непрерывный функционал представлять в виде

$$(\eta, \xi)_\mu = \sum_{v \in V(G)} \eta(v) \xi(v) \mu(v),$$

где $\eta \in \ell^1(\mu)$ и $\xi \in \ell^\infty$). Норма $\|\cdot\|_\infty$ пространства ℓ^∞ порождает норму $\|\cdot\|$ в пространстве операторов

$$\|A\| = \sup \left\{ \sum_{w \in V(G)} |A(v, w)| : v \in V(G) \right\},$$

где $A = (A(v, w))$ — соответствующая оператору матрица. Так как элементы матриц в нашей работе по условию неотрицательны, то $\|A\| = \|A\mathbf{1}\|_\infty$, где $\mathbf{1}$ — вектор, все координаты которого равны единице.

Пусть $K(G; w, v)$ — множество маршрутов графа G из w в v , $L(G; w, v)$ ($M(G; v, w)$) — множество маршрутов графа G из w в v (из v в w), не имеющих конечную (начальную) вершину v в качестве промежуточной вершины, и

$$\Phi_{G, w, v}(z) = \sum_{\gamma \in K(G; w, v)} Q(\gamma) z^{l(\gamma)},$$

$$\varphi_{G, w, v}(z) = \sum_{\gamma \in L(G; w, v)} Q(\gamma) z^{l(\gamma)},$$

$$\psi_{G, v, w}(z) = \sum_{\gamma \in M(G; v, w)} Q(\gamma) z^{l(\gamma)}.$$

Так как

$$\delta_{wv} + \Phi_{G,w,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A(G)^n e_v, e_w) z^n = ((E - zA(G))^{-1} e_v, e_w), \quad (11)$$

функции $\Phi_{G,w,v}(z)$ являются матричными элементами операторной функции, получающейся из резольвенты умножением на z и последующей заменой аргумента z на z^{-1} . Зафиксируем вершину $v \in V(G)$ и положим

$$\xi_G(w) = \varphi_{G,w,v}(R(G)).$$

Тогда если $\varphi_{G,v}(R(G)) = 1$, то $A(G)\xi_G = \lambda(G)\xi_G$ (см. [5]).

Нижеследующее предложение 3 было фактически доказано в [2] (см. лемму 1), а предложение 4 (без описания множества собственных значений) в [3] (см. теорему 2.16). Мы приводим здесь свои доказательства этих предложений, так как, на наш взгляд, они значительно проще и естественно связаны с содержанием нашей работы.

Предложение 3. Пусть G — бесконечный связный граф с $\lambda(G) < \infty$. Тогда существует такое пространство $\ell^\infty(\{d\})$, что оператор $A(G)$, действующий на нем, является ограниченным.

Доказательство. Предположим сначала, что $\varphi_{G,v}(R(G)) = 1$. Рассмотрим матрицу $A(G)'$ с элементами

$$A(G)'(w, w') = A(G)(w, w')\xi_G(w')/\xi_G(w).$$

Очевидно, что

$$A(G) = U^{-1}A(G)'U,$$

где U — диагональная матрица с элементами

$$U(w, w) = \xi_G(w)^{-1}.$$

Матрица U определяет унитарный оператор, переводящий пространство $\ell^\infty(\{d\})$, где $d(w) = \xi_G(w)^{-1}$, в пространство ℓ^∞ . Так как $A(G)\xi_G = \lambda(G)\xi_G$, то $A(G)'1 = \lambda(G)1$ и, следовательно, $\|A(G)'\| = \lambda(G)$. Поэтому матрица $A(G)'$ порождает ограниченный оператор на пространстве ℓ^∞ . Соответственно матрица $A(G) = U^{-1}A(G)'U$ определяет ограниченный оператор на пространстве $\ell^\infty(\{d\})$.

Пусть теперь $\varphi_{G,v}(R(G)) < 1$. Выпустим петлю из вершины v и выберем ее вес a так, чтобы для нового графа G' выполнялось равенство

$$\varphi_{G',v}(R(G)) = aR(G) + \varphi_{G,v}(R(G)) = 1.$$

Выше было доказано, что матрица $A(G')$ порождает ограниченный оператор на пространстве $\ell^\infty(\{d'\})$, где $d'(w) = \xi_{G'}(w)^{-1}$. Так как матрица $A(G)$ отличается от матрицы $A(G')$ только одним диагональным элементом, $A(G)$ тоже определяет ограниченный оператор на этом же пространстве. Предложение доказано.

Обозначим через $J_r(G)^{-1}$ множество $\{\lambda \in J(G)^{-1} : |\lambda| > r\}$. По теореме единственности для аналитических функций оно конечно при любом $r > r(G)^{-1}$.

Предложение 4. Пусть G — бесконечный связный граф с $r(G) > R(G)$. Тогда для любого $r > r(G)^{-1}$ существует такое пространство $\ell^\infty(\{d^{(r)}\})$, что для оператора $A(G)$, действующего на нем,

$$\text{Спес } A(G) \cap \{\lambda: |\lambda| > r\} = J_r(G)^{-1}.$$

Геометрическая кратность любого изолированного собственного значения из множества $J_r(G)^{-1}$ равна единице.

Доказательство. Пусть $v \in V^{\max}(G)$. Выберем произвольное число t из интервала $(r^{-1}, r(G))$ и уменьшим веса конечного числа ребер графа G так, чтобы для нового графа G' выполнялось равенство $\varphi_{G',v}(t) = 1$. Тогда $R(G') = t$. Рассмотрим матрицу $A(G')'$ с элементами

$$A(G')'(w, w') = A(G')(w, w')\xi_{G'}(w')/\xi_{G'}(w),$$

где, напомним, $\xi_{G'}(w) = \varphi_{G',w,v}(R(G'))$. Так как $A(G')\xi_{G'} = \lambda(G')\xi_{G'}$, то $A(G')'\mathbf{1} = \lambda(G')\mathbf{1}$ и, следовательно, $\|A(G')'\| = \lambda(G') = t^{-1} < r$. Пусть теперь $A(G)'$ — матрица с элементами

$$A(G)'(w, w') = A(G)(w, w')\xi_{G'}(w')/\xi_{G'}(w).$$

Так как матрица $A(G)$ отличается от матрицы $A(G')$ только на конечном числе элементов, это же справедливо и для матриц $A(G)'$ и $A(G')'$. Поэтому их разность $K = A(G)' - A(G')'$ является конечномерным, а, следовательно, компактным оператором на ℓ^∞ , при этом

$$\|A(G)' - K\| = \|A(G')'\| < r.$$

В силу леммы 2 параграфа 8 главы VIII работы [14] любая спектральная точка λ оператора $A(G)'$ в области $|\lambda| > \|A(G)' - K\|$ изолирована и соответствующий ей проектор имеет конечномерную область значений. Так как $A(G) = U^{-1}A(G')U$ и U с диагональными элементами $U(w, w) = \xi_{G'}(w)^{-1}$ является унитарным оператором из $\ell^\infty(\{d^{(r)}\})$, где $d^{(r)}(w) = \xi_{G'}(w)^{-1}$, в ℓ^∞ , утверждение о спектре вне круга $|\lambda| > r$ справедливо и для оператора $A(G)$ на пространстве $\ell^\infty(\{d^{(r)}\})$.

Покажем теперь, что функции $\Phi_{G,w,w'}(z)$ так же, как и функция $\Phi_{G,v}(z)$, допускают мероморфное продолжение в круг $|z| < r(G)$, полюса которого принадлежат множеству $J(G)$. Мы будем следовать доказательству, приведенному в [8]. Доказательство разобьем на три пункта.

1. $\Phi_{G,w,v}(z) = \varphi_{G,w,v}(z)(\Phi_{G,v}(z) + 1)$. Функция $\varphi_{G,w,v}(z)$ аналитична в круге $|z| < r_v(G) = r(G)$. Поэтому функция $\Phi_{G,w,v}(z)$ имеет требуемое мероморфное продолжение.

2. $\Phi_{G,v,w}(z) = (\Phi_{G,v}(z) + 1)\psi_{G,v,w}(z)$. Так как функция $\psi_{G,v,w}(z)$ аналитична в круге $|z| < r_v(G) = r(G)$, функция $\Phi_{G,v,w}(z)$ имеет требуемое мероморфное продолжение.

3. $\Phi_{G,w,w'}(z) = \varphi_{G,w,v}(z)\Phi_{G,v,w'}(z) + \Phi_{G-v,w,w'}(z)$ (здесь $w \neq v$ и $w' \neq v$). Так как функции $\varphi_{G,w,v}(z)$ и $\Phi_{G-v,w,w'}(z)$ аналитичны в круге $|z| < r_v(G) = r(G)$, а функция $\Phi_{G,v,w'}(z)$ мероморфна там, функция $\Phi_{G,w,w'}(z)$ имеет требуемое мероморфное продолжение.

Функции $\delta_{ww'} + \Phi_{G,w,w'}(z)$ являются матричными элементами операторной функции $(E - zA(G))^{-1}$. Поэтому в области $|\lambda| > r$ резольвента оператора $A(G)$ имеет полюса только в точках множества $J_r(G)^{-1}$, причем порядок каждого полюса в точке $\lambda \in J_r(G)^{-1}$ равен кратности точки $z = \lambda^{-1}$ как единицы функции $\varphi_{G,v}(z)$ (числу

копий λ в $J_r(G)^{-1}$. Таким образом, спектр оператора $A(G)$ в области $|\lambda| > r$ как геометрическое место точек совпадает с множеством $J_r(G)^{-1}$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 5, получим, что геометрическая кратность каждого собственного значения из множества $J_r(G)^{-1}$ равна единице. Поэтому число копий любого собственного значения из области $|\lambda| > r$ в множестве $\text{Spec } A(G)$ (алгебраическая кратность) совпадает с числом его же копий в множестве $J(G)^{-1}$. Предложение доказано.

Следствие 3. Пусть G — бесконечный связный граф и $1 < \varphi_{G,v}(r_v(G)) < \infty$ для некоторой вершины $v \in V(G)$. Тогда существует такое пространство $\ell^\infty(\{d\})$, что для оператора $A(G)$, действующего на нем,

$$\text{Spec } A(G) \cap \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\} = J(G)^{-1}.$$

Геометрическая кратность любого изолированного собственного значения из множества $J(G)^{-1}$ равна единице.

В параграфе 10 работы [15] была доказана теорема о том, что для связного графа G с $R(G) < r(G)$ найдется $\delta(G) > 0$, при котором все собственные значения λ любого конечного подграфа G' , удовлетворяющие условию $|\lambda| < \lambda(G')$, лежат в круге $|\lambda| < \lambda(G) - \delta(G)$. Мы уточним этот результат, исследуя асимптотические свойства спектров конечных подграфов в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$.

Определение 1. Будем говорить, что подграфы G_n графа G образуют сходящуюся к G последовательность, если каждое ребро графа G принадлежит графу G_n , начиная с некоторого n (число n зависит от выбора ребра).

Пусть S_n и S — конечные подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Будем писать $S_n \rightarrow S$, если $\text{card } S_n = \text{card } S$ при всех достаточно больших n и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что при $n \geq n(\varepsilon)$ для каждой точки $z \in S$ найдется ровно одно $z_n \in S_n$, для которого $|z - z_n| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть G — бесконечный связный граф с $\lambda(G) < \infty$. Предположим, что $r(G) > R(G)$. Тогда для любой сходящейся к G последовательности конечных связных подграфов G_n и числа $r > r(G)^{-1}$, для которого $\{\lambda: |\lambda| = r\} \cap J(G)^{-1} = \emptyset$, при $n \rightarrow \infty$

$$\text{Spec } A(G_n) \cap \{\lambda: |\lambda| > r\} \rightarrow J_r(G)^{-1}.$$

Доказательство. В силу леммы 5 нам нужно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$J(G_n) \cap \{z: |z| < r^{-1}\} \rightarrow J(G) \cap \{z: |z| < r^{-1}\}.$$

Пусть $v \in V^{\max}(G)$ и r — такое число из интервала $(r(G)^{-1}, \lambda(G))$, что функция $\varphi_{G,v}(z)$ не имеет единиц на множестве $\{z: |z| = r^{-1}\}$. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\{\lambda: |\lambda - s| \leq \varepsilon\} \subset \{\lambda: |\lambda| > r\}$$

при любом $s \in J_r(G)^{-1}$ и

$$\{\lambda: |\lambda - s| \leq \varepsilon\} \cap \{\lambda: |\lambda - t| \leq \varepsilon\} = \emptyset$$

для любых $s \neq t$, $s, t \in J_r(G)^{-1}$. Положим

$$U = \bigcup_{s \in J_r(G)^{-1}} \{\lambda: |\lambda - s| = \varepsilon\}^{-1} \cup \{z: |z| = r^{-1}\},$$

$$\delta = \min\{|1 - \varphi_{G,v}(z)|: z \in U\}.$$

Очевидно, $\delta > 0$ в силу выбора множества U . Пусть $L = L(r, \varepsilon)$ — такое конечное подмножество $L(G; v)$, что

$$\sum_{\gamma \in L(G; v) \setminus L} Q(\gamma) r^{-l(\gamma)} < \delta.$$

Для любой сходящейся к G последовательности конечных связных подграфов G_n графа G выберем число $n(\{G_n\}, L)$ так, чтобы $L \subset L(G_n; v)$ при $n \geq n(\{G_n\}, L)$. Для таких n в круге $|z| \leq r^{-1}$

$$\begin{aligned} |\varphi_{G_n, v}(z) - \varphi_{G, v}(z)| &\leq \varphi_{G, v}(r^{-1}) - \varphi_{G_n, v}(r^{-1}) \\ &\leq \sum_{\gamma \in L(G, v) \setminus L} Q(\gamma) r^{-l(\gamma)} < \delta. \end{aligned}$$

В силу выбора числа δ при $z \in U$ выполняется неравенство

$$|1 - \varphi_{G, v}(z)| > |\varphi_{G, v}(z) - \varphi_{G_n, v}(z)|.$$

По теореме Руше (см. [16]) функция $1 - \varphi_{G_n, v}(z)$ имеет столько же нулей (с учетом кратности) в $\{z: |z| < r^{-1}\}$ и $\{\lambda: |\lambda - s| < \varepsilon\}^{-1}$, где $s \in J_r(G)^{-1}$, что и функция $1 - \varphi_{G, v}(z)$. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть G — бесконечный связный граф с $\lambda(G) < \infty$. Предположим, что $1 < \varphi_{G, v}(r_v(G)) < \infty$ и $\varphi_{G, v}(z) \neq 1$ при $|z| = r_v(G)$ для некоторого $v \in V(G)$. Тогда для любой сходящейся к G последовательности конечных связных подграфов G_n

$$\text{Спес } A(G_n) \cap \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\} \rightarrow J(G)^{-1}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Пример 2. Пусть $f(z)$ — целая функция, отличная от полинома, с произвольными комплексными коэффициентами Маклорена a_n при n -й степени z , кроме $a_0 = f(0) = 0$ (например, $f(z) = e^z - 1$). Каждой такой функции сопоставим бесконечный ориентированный лепестковый граф G с центром в вершине v по следующему правилу. Будем считать, что для каждого натурального $n \geq 1$ существует не более одного простого цикла γ_n с началом в v (лепестка) длины n , причем $\gamma_n \in L(G; v)$ тогда и только тогда, когда $a_n \neq 0$. Выберем веса ребер цикла $\gamma_n \in L(G; v)$ так, чтобы $Q(\gamma_n) = a_n$. Тогда $\varphi_{G, v}(z) = f(z)$ и $r_v(G) = r(G) = \infty$. Положим вес ребра, с которого начинается простой цикл γ_n , где $n \geq 2$, равным $a_n^{1/2}$, а веса остальных ребер, входящих в этот цикл, положим равными $a_n^{1/(2(n-1))}$ (для любого лепесткового графа G' с $L(G'; v) = L(G; v)$ веса ребер которого удовлетворяют равенству $Q(\gamma_n) = a_n$, существует диагональная матрица U такая, что $A(G') = U^{-1}A(G)U$).

Пусть G_k — конечный связный подграф графа G , множество $L(G_k; v)$ которого состоит из простых циклов γ_n , $n = 1, \dots, k$. Нетрудно проверить, что

$$\|A(G) - A(G_k)\| = \max \left\{ \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^{1/2}, \sup_{n \geq k+1} |a_n|^{1/(2(n-1))} \right\}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{1/2} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0,$$

то матрица $A(G)$ порождает компактный оператор на пространстве ℓ^∞ . Функции $\Phi_{G,v,w}(z)$ и $\Phi_{G,w,v}(z)$ равны соответственно

$$Q(\gamma_{vw})z^{l(\gamma_{vw})}(1 + \Phi_{G,v}(z))$$

и

$$Q(\gamma_{wv})z^{l(\gamma_{wv})}(1 + \Phi_{G,v}(z)),$$

где γ_{vw} и γ_{wv} — простые цепи соответственно из v в w и из w в v (в нашем случае они единственны). Если w и w' отличны от v и принадлежат одному и тому же простому v -циклу γ_w , то функция $\Phi_{G,w,w'}(z)$ имеет вид

$$Q(\gamma_{ww'})z^{l(\gamma_{ww'})}(1 - \delta_{ww'} + Q(\gamma_w)z^{l(\gamma_w)}(1 + \Phi_{G,v}(z))),$$

где $\gamma_{ww'}$ — простая цепь из w в w' (при $w = w'$ мы считаем, что $Q(\gamma_{ww'}) = 1$ и $l(\gamma_{ww'}) = 0$). В случае, когда w и w' отличны от v и принадлежат разным элементам множества $L(G; v)$, функция $\Phi_{G,w,w'}(z)$ равна

$$Q(\gamma_{ww'})z^{l(\gamma_{ww'})}(1 + \Phi_{G,v}(z)).$$

Отсюда следует, что спектр оператора $A(G)$ есть объединение множества $J(G)^{-1}$ и точки $\lambda = 0$, кратность которой равна бесконечности (уравнение $A(G)\xi = 0$ имеет бесконечное число решений). По теореме Пикара (см. [17]) множество $J(G)$ или бесконечно и имеет только одну предельную точку $z = \infty$ (например, если $a_n \geq 0$ и $a_n > 0$ при бесконечно многих n) или пусто (например, если $f(z) = 1 - e^z$). Поэтому матрица смежности $A(G)$ порождает компактный оператор или с бесконечным или с пустым ненулевым собственным спектром (теорема Пикара эквивалента этому утверждению). Если $f(z) = e^z - 1$, то $f'(z) = e^z$ не обращается в ноль во всей плоскости $\mathbb{C}$ и, следовательно, каждое ненулевое собственное значение

$$\lambda_k = (2\pi ki + \ln 2)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

является простым. Для функции $f(z) = e^2 4^{-1} z^2 e^z$ точка $z = -2$ — единица второго порядка. Поэтому собственному значению $\lambda = -1/2$ соответствует жорданова клетка размера 2×2 (все остальные ненулевые собственные значения простые).

С ростом k каждое собственное значение графа G_k вне некоторого фиксированного круга $|\lambda| \leq r$ (r не зависит от k) стремится к своему элементу множества $J(G)^{-1}$. В круге $|\lambda| \leq r$ находится бесконечное число (с учетом кратности) точек спектра оператора $A(G)$. Но и число собственных значений графа G_k в этом круге стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Поэтому в случае лепесткового графа G спектры подграфов G_k в определенном смысле сходятся к множеству $\text{Spec } A(G)$.

4. Спектр счетного неориентированного графа

Пусть ℓ^2 — гильбертово пространство векторов ξ , координаты которых $\xi(v)$ проиндексированы элементами множества $V(G)$, со скалярным произведением

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{v \in V(G)} \xi_1(v) \overline{\xi_2(v)}.$$

Введем в пространстве ℓ^2 норму $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ и положим

$$\|A(G)\| = \sup\{\|A(G)\xi\| : \|\xi\| \leq 1\}.$$

В этом параграфе под $\text{Spec } A(G)$ мы будем понимать спектр самосопряженного оператора $A(G)$, определенного на пространстве ℓ^2 (каждое собственное значение повторяется в $\text{Spec } A(G)$ столько раз, какова размерность соответствующего собственного подпространства). Пусть $\rho(A(G))$ — спектральный радиус оператора $A(G)$.

Лемма 6 ([18]). Пусть G — неориентированный граф с $\lambda(G) < \infty$. Тогда матрица $A(G)$ порождает ограниченный самосопряженный линейный оператор на пространстве ℓ^2 , причем

$$\|A(G)\| = \rho(A(G)) = \lambda(G).$$

Замечание 5. Матрица смежности $A(G)$ неориентированного графа G без весов порождает ограниченный оператор на пространстве ℓ^2 тогда и только тогда, когда граф G является равномерно локально конечным вперед, то есть в его любую вершину входит (и из любой вершины выходит) не более чем $K < \infty$ ребер [18]. В этом случае $\|A(G)\| \leq K$.

Определение 2 ([19]). Будем говорить, что операторы A_n сходятся к оператору A в сильной операторной топологии, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n \xi - A \xi\| = 0$$

при любом $\xi \in \ell^2$.

Лемма 7 ([18]). Пусть G — бесконечный счетный неориентированный граф, для которого $\lambda(G) < \infty$, и неориентированные подграфы G_n графа G образуют сходящуюся к G последовательность. Тогда операторы $A(G_n)$ сходятся к оператору $A(G)$ в сильной операторной топологии.

Замечание 6. В [18] утверждение леммы получено для графов без весов. Общий случай доказывается аналогичным образом.

Определение 3 ([19]). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Регулярная счетно-аддитивная самосопряженная спектральная мера $E(\cdot)$, определенная на сигма-алгебре борелевских множеств прямой и принимающая значения в алгебре проекторов, для которой

$$A^n = \int_{\text{Spec } A} \lambda^n E(d\lambda) \quad (12)$$

при $n \in \mathbb{Z}_+$, называется разложением единицы для оператора A .

Предложение 5 ([19]). Пусть $E_n(\cdot)$ и $E(\cdot)$ — разложения единицы соответственно для самосопряженных операторов A_n и A . Предположим, что A_n сходится к A в сильной операторной топологии. Тогда если $E(\cdot)$ обращается в ноль на границе борелевского множества B , то $E_n(B)$ сходится к $E(B)$ в сильной операторной топологии.

Теорема 2. Пусть G — счетный связный неориентированный граф с $\lambda(G) < \infty$. Предположим, что $r(G) > R(G)$. Тогда для спектра графа G справедливо утверждение следствия 2.

Доказательство. Пусть $s \in \text{Спек } A(G) \cap \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\}$, но $s \notin J(G)^{-1}$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$[s - \delta, s + \delta] \subset \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\}, \quad [s - \delta, s + \delta] \cap J(G)^{-1} = \emptyset$$

и числа $s - \delta$, $s + \delta$ не являлись собственными значениями оператора $A(G)$ (это возможно, так как ℓ^2 — сепарабельное гильбертово пространство и, следовательно, собственный спектр любого ограниченного самосопряженного оператора на нем счетен). Пусть конечные неориентированные связные подграфы G_n образуют сходящуюся к графу G последовательность, $E_n(\cdot)$ и $E(\cdot)$ — разложения единицы соответственно для самосопряженных операторов $A(G_n)$ и $A(G)$. В силу теоремы 1 при всех достаточно больших n

$$\text{Спек } A(G_n) \cap (s - \delta, s + \delta) = \emptyset.$$

Поэтому $E_n((s - \delta, s + \delta)) = 0$ для таких n . Множество $(s - \delta, s + \delta) \cap \text{Спек } A(G)$ непусто и открыто в относительной топологии спектра оператора $A(G)$. Поэтому $E((s - \delta, s + \delta)) \neq 0$, и в силу выбора интервала $(s - \delta, s + \delta)$ последовательность проекторов $E_n((s - \delta, s + \delta))$ сходится к $E((s - \delta, s + \delta))$ в сильной операторной топологии (см. лемму 7 и предложение 5). Получаем противоречие с $E_n((s - \delta, s + \delta)) = 0$ при достаточно больших n . Таким образом, все точки спектра в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ (без учета кратностей) принадлежат множеству $J(G)^{-1}$.

В силу справедливости при любом $v \in V(G)$ спектрального тождества

$$1 + \Phi_{G,v}(z) = \int_{\text{Спек } A(G)} \frac{1}{1 - \lambda z} (E(d\lambda)e_v, e_v) \quad (13)$$

(см. (11) и (12)) и того факта, что в любой точке множества $J(G)$ мероморфное продолжение функции $1 + \Phi_{G,v}(z)$, где $v \in V^{\max}(G)$, в круг $|z| < r(G)$ имеет полюс, получаем, что

$$J(G)^{-1} \subset \text{Спек } A(G).$$

Таким образом, спектр оператора $A(G)$ в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ совпадает с множеством $J(G)^{-1}$ как геометрическое место точек.

То, что кратность любого собственного значения из множества $J(G)^{-1}$ равна единице, можно показать точно так же, как это сделано при доказательстве леммы 5. Простота нулей функции $1 - \varphi_{G,v}(z)$, где $v \in V^{\max}(G)$, в круге $|z| < r(G)$ следует из тождества (3) и спектрального представления (13). Поэтому

$$\text{Спек } A(G) \cap \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\} = J(G)^{-1}.$$

Утверждение о количестве собственных значений в области $|\lambda| > r(G)^{-1}$ и расположении их на полуосях действительной прямой для счетного графа G вытекает из аналогичного утверждения (см. следствие 2) для конечных графов и теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть G — счетный связный двудольный неориентированный граф с $\lambda(G) < \infty$. Предположим, что $r(G) > R(G)$. Тогда

$$\text{Спес } A(G) \cap \{\lambda: |\lambda| > r(G)^{-1}\} = \{-\lambda(G), \lambda(G)\}.$$

Замечание 7. Обозначим через $\xi^+ = \{\xi^+(v)\}$ и $\xi^- = \{\xi^-(v)\}$ собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda = \lambda(G)$ и $\lambda = -\lambda(G)$. Будем считать, что $\xi^-(w) = \xi^+(w) > 0$ при некотором $w \in V(G)$. Тогда $|\xi^-(v)| = \xi^+(v)$ при любом $v \in V(G)$ и каждое ребро графа G соединяет некоторую вершину из множества

$$V_- = \{v \in V(G): \xi^-(v) < 0\}$$

с некоторой вершиной из множества

$$V_+ = \{v \in V(G): \xi^-(v) > 0\}$$

(напомним, что наличие двух непересекающихся множеств с такими свойствами и означает, что граф G является двудольным).

Пример 3. Пусть G — неориентированный граф, представляющий собой односторонне-бесконечный путь. Его множество вершин совпадает с $\mathbf{Z}_+$, а множество ребер (неориентированных и без весов) с $\{(u, u+1): u \in \mathbf{Z}_+\}$. Функция $\varphi_{G,0}(z)$ находится из соотношения

$$\varphi_{G,0}(z) = z^2(1 + \Phi_{G,0}(z)).$$

Она равна

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z^2}).$$

Поэтому $r_0(G) = 1/2$. Так как $\varphi_{G,0}(1/2) = 1/2 < 1$, то $r_v(G) = R(G) = 1/2$ при любом $v \in V(G)$. Из вершины 0 выпустим m таких односторонне-бесконечных путей. Полученный граф обозначим через mG . Отметим, что граф mG принадлежит классу графов, спектральные свойства которых были рассмотрены в [20]. В дальнейшем мы будем предполагать, что $m \geq 3$. Очевидно, что

$$\varphi_{mG,0}(z) = \frac{m}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z^2}).$$

Так как $r_0(mG) = r_0(G) = 1/2$ и $r_v(mG) \leq 1/2$ при любом $v \in V(mG)$, то $r(mG) = r_0(mG) = 1/2$. Решая уравнение $\varphi_{mG,0}(z) = 1$ на интервале $(0, 1/2)$, получим, что

$$R(mG) = \sqrt{1/4 - (1/2 - 1/m)^2}.$$

В силу следствия 5 спектр графа mG в области $|\lambda| > 2$ состоит из двух простых собственных значений

$$\lambda_{\pm} = \pm 2/\sqrt{1 - (1 - 2/m)^2}.$$

Удалив из графа mG вершину 0 и все ребра, идущие в нее, получим m копий графа G . Спектр графа G и, следовательно, объединения конечного числа его копий

абсолютно непрерывен и состоит из отрезка $[-2, 2]$ (см. §7, п. А и теорему 3.4 в [1], а также работу [18]). Так как число удаленных ребер графа mG конечно, по теореме 4.4 главы 10 в [21] отрезок $[-2, 2]$ принадлежит абсолютно непрерывному спектру оператора $A(mG)$ (см. также текст после теоремы 3 в [20]). Поэтому при $m \geq 3$

$$\text{Спекс } A(mG) = \{\pm 2/\sqrt{1 - (1 - 2/m)^2}\} \cup [-2, 2].$$

Следствие 6. Пусть G — счетный связный неориентированный граф с $\lambda(G) < \infty$. Тогда точка $\lambda = \lambda(G)$ является изолированной точкой спектра оператора $A(G)$ тогда и только тогда, когда $R(G) < r(G)$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda = \lambda(G)$ является изолированной точкой спектра. Это означает, что $E((\lambda(G) - \delta, \lambda(G))) = 0$ при некотором $\delta > 0$ и $E(\lambda(G)) \neq 0$, причем в случае связного графа G при любом $v \in V(G)$ справедливо неравенство

$$(E(\lambda(G))e_v, e_v) = \xi(v)^2 > 0,$$

где $\xi(v)$ — v -координата нормированного положительного собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda = \lambda(G)$. Поэтому при любом $v \in V(G)$ функция $1 + \Phi_{G,v}(z)$ имеет в точке $z = R(G)$ полюс первого порядка (см. (13)). Отсюда и из формулы (3) следует, что функция $\varphi_{G,v}(z)$ аналитична в окрестности точки $z = R(G)$. По теореме Прингсхейма (см. [16]) это возможно только тогда, когда $r_v(G) > R(G)$. То, что $\lambda = \lambda(G)$ является при $r(G) > R(G)$ изолированной точкой спектра, доказано в теореме 2. Следствие доказано.

Замечание 8. Точка $\lambda = \lambda(G)$ принадлежит точечному спектру тогда и только тогда, когда $\varphi_{G,v}(R(G)) = 1$ и $\varphi'_{G,v}(R(G)) < \infty$ при некотором (а, следовательно, и при любом) $v \in V(G)$ (см. [5]).

Список литературы

1. Mohar B., Woess W., A survey on spectra of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc.* (1989) **21**, 209–234.
2. Vere-Jones D., On the spectra of some linear operators associated with queueing systems. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* (1963) **2**, 12–21.
3. Malyshev V. A., Spieksma F. M., Intrinsic convergence rate of countable Markov chains. *Markov Processes and Related Fields* (1995) **1**, №2, 203–266.
4. Савченко С. В., О спектрах конечных подматриц бесконечных неразложимых матриц. *Успехи матем. наук* (1997) **52**, №3, 175–176.
5. Vere-Jones D., Ergodic properties of nonnegative matrices I. *Pacific J. Math.* (1967) **22**, №2, 361–386.
6. Савченко С. В., Об устойчивости верхней границы спектра относительно возмущений диагональными матрицами для некоторого класса самосопряженных операторов. *Успехи матем. наук* (1998) **53**, №2, 163–164.
7. Оре О., *Теория графов*. Наука, Москва, 1980.
8. Vere-Jones D., Geometric ergodicity in denumerable Markov chains. *Quarterly J. Math.* (1962) **13**, 7–28.
9. Gurevich B. M., A variational characterization of one-dimensional countable state Gibbs random fields. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* (1984) **68**, 205–242.

10. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1967.
11. Bowen R., Lanford O. E., Zeta functions of restrictions of the shift transformation. *Proc. Global Analysis 1968 Summer Institute at Berkeley* (1968), 43–49.
12. Takahashi Y., Shift with orbit basis and realization of one dimensional maps. *Osaka J. Math.* (1983) **20**, 599–629.
13. Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, т.4. Мир, Москва, 1982.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы. Общая теория*. ИЛ, Москва, 1962.
15. Гуревич Б. М., Савченко С. В., Термодинамический формализм для символических цепей Маркова со счетным числом состояний. *Успехи матем. наук* (1998) **53**, №2, 3–106.
16. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., *Лекции по теории функций комплексного переменного*. Наука, Москва, 1989.
17. Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ*, ч. 1, 2. Наука, Москва, 1985.
18. Mohar B., The spectrum of an infinite graph. *Linear Algebra and its Appl.* (1982) **48**, 245–256.
19. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы. Спектральная теория*. Мир, Москва, 1966.
20. Новиков С. П., Оператор Шредингера на графах и топология. *Успехи матем. наук* (1997) **52**, №6, 177–178.
21. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*. Мир, Москва, 1972.

Статья поступила 14.06.1996.