Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Семаев, К вопросу о сведении вычисления дискретных логарифмов на эллиптической кривой к вычислению дискретных логарифмов в конечном поле, *Дискрет. матем.*, 1999, том 11, выпуск 3, 24–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:19:22

УДК 519.7

К вопросу о сведении вычисления дискретных логарифмов на эллиптической кривой к вычислению дискретных логарифмов в конечном поле

© 1999 г. И. А. Семаев

Предлагается алгоритм вычисления вспомогательной точки, который используется в методе сведения задачи вычисления дискретных логарифмов на эллиптической кривой к вычислению логарифмов в конечном поле, предложенном ранее Менезесом, Ванстоуном, Окамото и независимо автором. Алгоритм работает в более общем случае, чем соответствующий алгоритм из работы трех авторов, разработанный для случая супервырожденных кривых. Оценивается степень возникающего здесь расширения конечного поля, над которым задана эллиптическая кривая.

Пусть E — заданная в форме Вейерштрасса эллиптическая кривая

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (1)$$

над конечным полем F_q порядка q . Точки E образуют коммутативную группу, которая записывается аддитивно. Точка в бесконечности P_∞ является нулевым элементом этой группы. Пусть $E(F_{q'})$ — подгруппа точек E , определенных над $F_{q'} \supseteq F_q$. Очевидно, что $E(F_{q'})$ — конечная коммутативная группа. Пусть $P \in E(F_q)$ порождает циклическую группу порядка m . Задача вычисления дискретных логарифмов в $\langle P \rangle$ заключается в следующем. Для данной точки $Q \in \langle P \rangle$ найти вычет $n \pmod{m}$ такой, что $nP = Q$. Задача вычисления дискретных логарифмов в конечном поле F_q заключается в следующем. Пусть α — примитивный элемент поля F_q . Для данного ненулевого β найти вычет $n \pmod{q-1}$ такой, что $\alpha^n = \beta$. Эти задачи имеют большое значение для криптографии [1].

Пусть $\text{lcm}(m, q) = 1$ и расширение $F_{q_1} \supseteq F_q$ таково, что $E(F_{q_1})$ содержит подгруппу $E[m]$, изоморфную $\mathbf{Z}/m \oplus \mathbf{Z}/m$. Известно, что такое расширение существует [5]. Таким образом, $q_1 = q^k$ для некоторого $k \geq 1$. В [2] и независимо в статье автора [3] по существу была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть задана точка $T \in E(F_{q_1})$ такая, что $\langle P, T \rangle = E[m]$. Тогда сложность вычисления дискретных логарифмов в группе $\langle P \rangle$ не больше сложности вычисления дискретных логарифмов в F_{q_1} или сложности $O(\log m)$ операций в F_{q_1} .

Для того чтобы воспользоваться теоремой 1, надо определить степень k расширения поля F_{q_1} над F_q , а также некоторую точку T , для которой $\langle P, T \rangle = E[m]$. Для супервырожденной кривой E эти вопросы легко решаются. Действительно, из данных таблицы 1 в [2] следует, что $k \leq 6$. Там же построен вероятностный алгоритм вычисления вспомогательной точки T . Среднее время работы этого алгоритма ограничено полиномом от $\log q_1$. Примером супервырожденных кривых является кривая

$$y^2 = x^3 + a_4x$$

над простым полем F_p , где $p \equiv 3 \pmod{4}$, или кривая

$$y^2 = x^3 + a_6$$

над простым полем F_p , где $p \equiv -1 \pmod{3}$. В обоих случаях $k = 2$. В общем случае пусть G — максимальная подгруппа $E(F_{q_1})$, порядок элементов которой есть произведение простых делителей m . Таким образом, $E[m] \subseteq G$ и $G = \mathbf{Z}/m_1 \oplus \mathbf{Z}/m_2$, где m делит m_1 и m_2 . Если $m_1 = m_2$, то для вычисления вспомогательной точки T легко адаптировать метод статьи [2]. Заметим, что для супервырожденной эллиптической кривой это всегда так, как это следует из таблицы 1 этой статьи. В этом случае выполняется также лемма 7 из [2], которая утверждает, что если Q — случайная точка на G , то $T = (m_1/m)Q$ — случайная точка на $E[m]$. Тогда при $m \rightarrow \infty$ с вероятностью, стремящейся к единице, $\langle P, T \rangle = E[m]$. Однако при $m_1 \neq m_2$ легко представить себе такую ситуацию, когда последняя вероятность стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ (см. по этому поводу замечания в конце статьи). Таким образом, в общем случае проблема вычисления вспомогательной точки остается открытой. В статье [4], которая распространяет основные результаты статьи [2] на якобианы произвольных кривых, проблема вычисления вспомогательных точек не обсуждается.

Мы доказываем здесь следующую теорему 2. Пусть l — минимальное натуральное число, для которого $q^l \equiv 1 \pmod{m}$.

Теорема 2. Пусть $\text{lcm}(m, q-1) = 1$. Тогда $k = l$ и если известно разложение m на простые множители, то имеется вероятностный алгоритм вычисления точки $T \in E(F_{q_1})$, для которой $\langle P, T \rangle = E[m]$. Среднее время работы алгоритма равно $O(\log^c q_1)$ операций в поле F_{q_1} для некоторой постоянной c и $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение о существовании вероятностного алгоритма. Пусть G — максимальная подгруппа $E(F_{q_1})$, порядки элементов которой являются произведениями простых делителей m . Значит, $E[m] \subseteq G$. Пусть G_1 — циклическая подгруппа G , которая содержит некоторую точку Q такую, что $\langle P, Q \rangle = E[m]$. Заметим, что это эквивалентно равенству $e_m(P, Q) = \mu_m$ для некоторого корня μ_m степени m из единицы и спаривания e_m А. Вейля. Определение спаривания А. Вейля, а также его свойства приведены в книге [5]. Пусть σ — эндоморфизм Фробениуса кривой E над F_q , то есть отображение точек кривой в себя, индуцированное возведением их координат в степень Q . Таким образом, $R^\sigma = R$ тогда и только тогда, когда $R \in E(F_q)$. Поэтому $P^\sigma = P$. Рассмотрим эндоморфизм φ группы G , который задается соотношением

$$R \rightarrow R\sigma - R, \quad R \in G.$$

Так как $P \in \text{Ker } \varphi$, подгруппа $\text{Ker } \varphi$ нетривиальна. Рассмотрим группу $\varphi(G_1)$. Ясно, что $G_1 \cap \text{Ker } \varphi = P_\infty$, так как в противном случае G_1 содержала бы точку T из

$E(F_q)$ простого порядка r , делящего m , такую, что $T \in \langle Q \rangle$. Тогда по определению спаривания А. Вейля $\mu_r \in F_q$. Это противоречит условию $\text{lcm}(m, q-1) = 1$. Значит, $\varphi(G_1) \cong G_1$. Покажем, что

$$\varphi(G_1) \cap E(F_q) = P_\infty.$$

Действительно, в противном случае $P_1 \in \varphi(G_1) \cap E(F_q)$, где P_1 — точка простого порядка R , делящего m . Тогда $P_1 = R^\sigma - R$ для некоторой точки $R \in G_1$. Порядок точки R равен r , так как из равенства $(rR)^\sigma = (rR)$ следует, что $rR \in G_1 \cap E(F_q) = P_\infty$. Тогда из равенства $e_r(P_1, R + P_1) = \mu_r$ следуют равенства

$$(\mu_r)^\sigma = e_r(P_1, R + P_1) = \mu_r.$$

Значит, $q \equiv 1 \pmod{r}$. Это противоречит условию теоремы. Таким образом, справедливо равенство $\varphi(G_1) \cap E(F_q) = P_\infty$, то есть $\varphi(G_1)$ содержит некоторую точку T , для которой $\langle P, T \rangle = E[m]$.

Пусть T — минимальное натуральное число, для которого $\varphi^t(G)$ — циклическая группа. Очевидно, что

$$t \leq \log_2 |E(F_{q_1})| = O(\log q_1),$$

так как если группа $G' = \varphi^s(G)$ не является циклической для некоторого s , то она содержит подгруппу $E[r] \cong (\mathbf{Z}/r)^2$ для некоторого простого делителя r числа m . Следовательно, $G' \cap \text{Ker } \varphi \supseteq G' \cap \langle P \rangle \neq P_\infty$. Поэтому порядок $\varphi(G')$ по меньшей мере в r раз меньше порядка G' .

Обозначим через ψ эндоморфизм φ^t . Таким образом, $\psi(G)$ — циклическая группа, содержащая некоторую точку Q , для которой $e_m(P, Q) = \mu_m$. Сформулируем алгоритм для получения такой точки.

1. Методом статьи [6] вычислим порядок группы $E(F_{q_1})$. Пусть $|E(F_{q_1})| = m_1 n$, где n — максимальный делитель $|E(F_{q_1})|$, для которого $\text{lcm}(m, n) = 1$. Легко вычислить n , пользуясь разложением m на простые множители.

2. Вычислим случайную точку $R \in E(F_{q_1})$, решая квадратное уравнение (1) относительно y при заданном случайном x . Это уравнение имеет решение с вероятностью $1/2 + o(1)$ при $q_1 \rightarrow \infty$. Оно может быть найдено посредством вероятностного алгоритма из [7]. Тогда находим $R_1 = nR$. Так что R_1 — случайная точка в G , имеющая равномерное распределение на G при $q_1 \rightarrow \infty$.

3. Вычислим $U = \psi(R_1)$. Ясно, что U — случайная точка на $\psi(G)$. С вероятностью, не меньшей $\phi(m)/m$ точка U порождает циклическую группу порядка m_2 такого, что m делит m_2 , и m_2 — делитель числа m_1 . Здесь $\phi(m)$ — функция Эйлера. Легко вычислить m_2 , пользуясь разложением m на простые множители. Значит, $T = (m_2/m)U$ является точкой порядка m , для которой $e_m(P, T) = \mu_m$.

Очевидно, что приведенный алгоритм работает в среднем полиномиальное от $\log q_1$ время.

Остается доказать, что $k = l$. Это утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 2 за исключением, возможно, условия $\text{lcm}(m, q-1) = 1$. Тогда число l делит k и число k делит lm/v , где

$$v = \text{lcm}(m, (q^l - 1)/(q - 1)).$$

Доказательство. Значения спаривания e_m лежат в F_{q^l} , поэтому l делит k . Пусть P, Q — точки порядка m такие, что $\langle P, Q \rangle = E[m]$ и $P \in E(F_q)$. Пусть $e_m(P, Q) = \mu_m$.

Тогда

$$Q^\sigma = uQ + sP \quad (2)$$

для некоторых вычетов $u, s \pmod{m}$. Значит,

$$e_m(P, Q^\sigma) = e_m(P, Q)^\sigma = (\mu_m)^q.$$

С другой стороны,

$$e_m(P, Q^\sigma) = e_m(P, uQ + sP) = (\mu_m)^u.$$

Таким образом, $q \equiv u \pmod{m}$. Применим σ к обеим частям равенства (2). Так как $P^\sigma = P$, используя (2) снова, получаем, что

$$Q^{\sigma^2} = u^2Q + s(u+1)P,$$

и так далее. Справедливо равенство

$$Q^{\sigma^l} = u^lQ + s(u^{l-1} + \dots + u + 1)P = Q + \frac{s(q^l - 1)}{q - 1}P,$$

так как $q \equiv u \pmod{m}$ и $q^l \equiv 1 \pmod{m}$. Поэтому

$$Q\sigma^{lm/v} = q.$$

Таким образом, точка Q определена над $F_{q^{lm/v}}$ и, следовательно, k делит lm/v . Лемма доказана.

Теорема 2 также доказана, так как $\text{lcm}(m, q-1) = 1$ и поэтому $v = m$.

Условия теоремы 2 выполнены во многих случаях. Рассмотрим теперь случай, когда $\text{lcm}(m, q-1) \neq 1$. Для простоты изложения предположим, что число $m = r$ простое. Пусть максимальная r -подгруппа G группы $E(F_q)$ имеет ранг 2. Число r делит $q-1$. Таким образом, группа G имеет вид

$$G = \langle R \rangle \oplus \langle S \rangle, \quad \langle R \rangle \cong \mathbf{Z}/r^\nu, \quad \langle S \rangle \cong \mathbf{Z}/r^\lambda,$$

где $1 \leq \nu \leq \lambda$, для некоторых точек R, S . Достаточно рассмотреть два случая, $P = r^{\nu-1}R$ и $P = r^{\lambda-1}R$, где $\lambda > \nu$. Пусть сначала $P = r^{\nu-1}R$. Тогда для случайной точки $U \in G$ вероятность того, что $e_r(P, Q) = \mu_r$, где $Q = r^{\lambda-1}U$, не меньше $1 - 1/r$. Поэтому мы получаем в этом случае вероятностный алгоритм вычисления вспомогательной точки, который работает полиномиальное от $\log q$ время.

Пусть теперь $P = r^{\lambda-1}S$ и $\nu < \lambda$. Пусть для случайной точки

$$U = U_1 + U_2 \in G, \quad U_1 \in \langle R \rangle, \quad U_2 \in \langle S \rangle,$$

порядок U_1 , равный r^τ , $\tau \leq \nu$, не меньше, чем порядок U_2 . Тогда $Q = r^{\tau-1}U$ — точка порядка r такая, что $\langle P, Q \rangle = E[r]$. К сожалению, вероятность этого события не больше $1/r$. При $r \rightarrow \infty$ эта величина мала, то есть среднее время работы такого алгоритма велико и может быть экспоненциальным от $\log q$. Однако другой путь вычисления Q неизвестен.

Остается случай, когда максимальная r -подгруппа группы G имеет ранг 1 и r делит $q-1$. Этот случай сводится к случаю, когда ранг группы равен 2. Для этого надо взять более широкое поле, над которым максимальная r -подгруппа не является циклической. Правда, в этом случае нельзя воспользоваться первым утверждением теоремы 2, так как ее условия не выполнены. Значит, и в этом случае эффективный флгоритм вычисления вспомогательной точки остается неизвестным.

Список литературы

1. Miller V., Use of elliptic curves in cryptography. *Lect. Notes Computer Sci.* (1986) **218** 417–426.
2. Menezes A., Okamoto T., Vanstone S., Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1993) **39**, 1639–1646.
3. Семаев И. А., О вычислении логарифмов на эллиптических кривых. *Дискретная математика* (1996) **8**, 65–71.
4. Frey G., Ruck H. G., A remark concerning m -divisibility and the discrete logarithms in the divisor class group of curves. *Math. Comput.* (1994) **62**, 865–874.
5. Silverman J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, Berlin, 1986.
6. Schoof R., Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod p . *Math. Comput.* (1985) **44** 483–494.
7. Rabin M., Probabilistic algorithms in finite fields. *SIAM J. Comput.* (1980) **9**, 273–280.

Статья поступила 28.05.1998.